



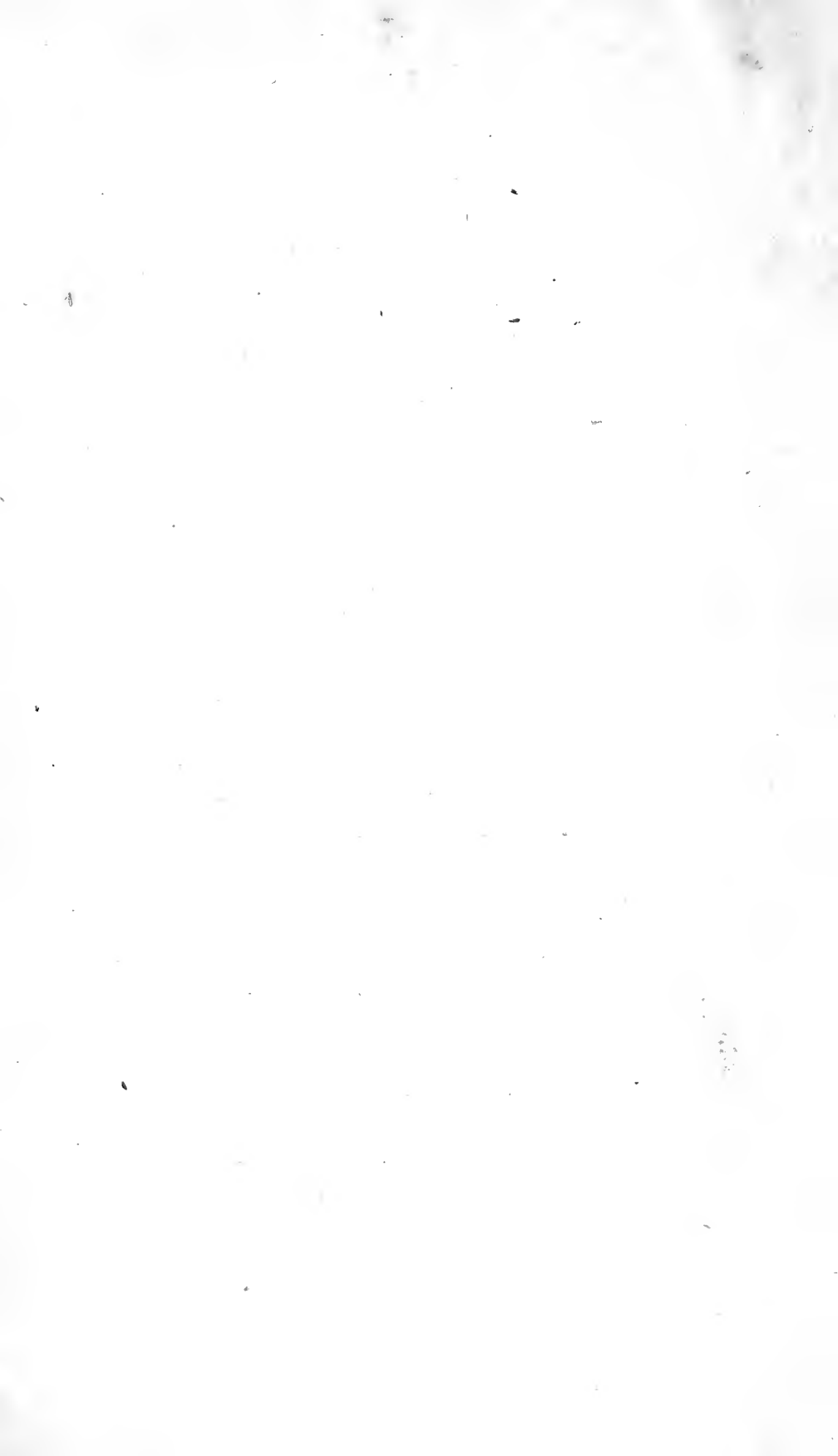




Albany



Digitized by the Internet Archive  
in 2010 with funding from  
Boston Public Library



# LA SCIENCE

D E

L'HOMME DE MER;

O U

PRINCIPES d'Arithmétique , de  
Géométrie , d'Astronomie , & de Mé-  
canique , dont l'application est néces-  
saire & utile à l'Art de la Marine.

Par CHARLES ROMME , *Professeur  
de Mathématiques & de Navigation.*

---

Imprimée chez P. L. CHAUVET , à la Rochelle ;

Et se vend

A P A R I S ;

Chez B A R R O I S l'aîné , Libraire.

---

An 3.<sup>e</sup> de la République Française,

32110211

—

1

# AVANT-PROPOS

---

C'EST l'ignorance , qui rendant incertains les pas des premiers navigateurs , a resserré leurs courses dans des espaces très-bornés. C'est elle , qui , depuis des siècles , restraint les sauvages insulaires à l'usage de bâtimens aussi frêles que grossiers. C'est elle , qui circonscrit encore , dans des limites très-étroites , la navigation de certains peuples civilisés ; & c'est en s'éclairant , que les Nations Européennes , sont parvenues à couvrir toutes les mers du Globe , non-seulement de Navigateurs dont l'instruction a d'ailleurs différencié les talens & les succès ; mais aussi de vaisseaux qui , variés dans leur grandeur & leur force , le sont encore dans leur forme & dans leurs qualités.

Si on considère particulièrement les progrès successifs de l'Art de la Marine , de cet art qui plus que tout autre honore l'esprit humain ; on remarque , que d'abord rapides & brillans , ensuite lents & foibles , & maintenant stationnaires , leur marche a toujours été parallèle à celle des progrès des sciences exactes , & avec une dépendance relative qu'il n'est pas permis de méconnoître. Un examen plus approfondi démontre même que ces sciences ont non-seulement concouru à établir solidement les bases de l'Art entier , mais qu'elles seules peuvent aujourd'hui lui assurer toute la perfection qu'il doit encore acquérir pour obtenir la confiance entière des

Navigateurs. Les sciences enfin sont nécessaires aux progrès de l'art , comme aux succès des artistes.

Sans doute , l'expérience a souvent averti du besoin de quelques regles essentielles de cet Art ; souvent elle a fait pressentir des opérations utiles ; mais c'est toujours dans le creuset des sciences que les procédés ont été épurés , séparés , analysés , & qu'ils ont reçu le caractère qui devoit les faire employer avec sécurité.

Tous les jours l'expérience s'aggrandit ; sans cesse , elle répand de nouvelles leçons ; tous les jours , elle nous fait connoître des limites que l'Art ne peut franchir , en signalant des vaisseaux , même parmi les modernes , qui ont , ou une stabilité insuffisante , ou une marche trop lente , ou une dérive trop grande , ou des mouvemens trop irréguliers & trop durs , ou des formes peu convenables sous plusieurs rapports : & tous ces défauts de perfection , n'ont pu encore être détruits par le seul secours de cette expérience très-prolongée , puisqu'elle n'a servi qu'à les couvrir par des palliatifs peu satisfaisans.

La pratique de la mer ne peut donc seule élever l'art à de nouveaux progrès. Néanmoins elle peut grandement y concourir ; parce qu'aujourd'hui il n'appartient qu'à elle de fournir toutes les données , nécessaires pour que la théorie fasse disparoître toutes les difficultés , ou parce que ce n'est qu'à la mer qu'on peut à présent recueillir & répéter les grandes expériences qui , pour la perfection entière de la marine , restent encore à faire , sur les mouvemens des vaisseaux ,



v

sur l'action des lames & des courans , sur la résistance de l'eau , & sur les effets utiles ou nuisibles de toute sorte de manœuvres.

De telles expériences demandent , sans doute , pour être bien faites , des hommes instruits qui sachent les diriger , les combiner , les varier , saisir leurs rapports importans , désigner leurs traits distinctifs , & sur-tout les décrire avec cette netteté , cette méthode & cet enchaînement qui préparent les découvertes. Ces mêmes expériences demandent aussi , pour être ensuite utilisées , des hommes qui soient profondément versés dans les sciences exactes. Mais les Savans célèbres ont négligé d'étudier , & la langue , & l'art des marins ; & si les navigateurs sont consultés dans les devis de leurs campagnes , on reconnoît , presque généralement qu'avec des connoissances théoriques plus étendues , ils auroient mieux dépeint les défauts des vaisseaux & les événemens de la mer : c'est-à-dire avec toutes les circonstances essentielles , complètes , & décisives , qui peuvent seules aider , à baser des regles nouvelles , ou à effacer les vices des anciennes.

L'instruction théorique est donc recommandée spécialement par cette double considération ; & si elle est nécessaire aux hommes de mer , soit pour devenir des observateurs utiles , soit pour perfectionner l'art de la marine ; elle l'est encore essentiellement pour exercer cet art avec autant d'intelligence que de succès. Car il n'est aucun navigateur qui , placé dans des cas difficiles & rares , n'ait senti que ses ressources ,

malgré une longue pratique , ont toujours été d'autant plus bornées , que son esprit étoit moins nourri de l'étude des sciences , & moins pénétré de leurs rapports intimes avec la marine.

En effet , s'agit-il d'arrimer un vaisseau, de manière à ajouter à ses qualités , ou à corriger les défauts attachés à la forme de sa carene. S'agit-il d'en varier convenablement, ou la mâture , ou la voilure, ou les manœuvres, pour lui donner une marche plus rapide , pour diminuer sa dérive , pour empêcher ses déviations , pour régulariser ou adoucir ses mouvemens , &c. ; c'est la mécanique des solides & des fluides qui fournit les principes de toutes les regles à suivre pour obtenir les résultats desirés. S'agit-il de mesurer la marche d'un bâtiment au milieu des mers ; d'assigner à chaque instant, sur le globe, ou sur des cartes, sa position réelle, ou ses distances relatives à des points connus ; de tracer les contours des mers , les sinuosités des détroits , l'étendue des rades & des ports , la situation exacte des rochers , des isles , des haut-fonds , des mouillages, &c ; c'est par le secours de la Géométrie & de l'Astronomie qu'on peut y parvenir. Enfin, dans les évolutions navales même, la Géométrie n'est pas sans utilité , pour diriger sagement la chasse ou la retraite d'un bâtiment , pour déterminer dans un corps d'armée la place qu'un vaisseau doit occuper , la route qu'il doit suivre pour y arriver , & celle qui le conduit à un nouveau poste dans le passage d'une disposition d'armée à un ordre différent.

Il faut donc cesser de penser , & sur-tout

de dire , avec les marins ignorans , que les connoissances théoriques ne sont pas nécessaires aux hommes qui veulent mériter quelque réputation d'habileté dans l'exercice de l'art de la marine : il faut cesser de croire qu'ils ne doivent s'instruire qu'à la seule école de l'expérience. Il faut enfin reconnoître que la théorie & la pratique doivent concourir ensemble , soit à perfectionner l'art , soit à former l'artiste ; & convenir que si celui-ci n'obtient un tel titre que lorsqu'il fait exécuter parfaitement les regles de son art ; ceux qui sont destinés , à lui commander ses opérations ou à le diriger dans leur exécution , doivent en connoître non-seulement les procédés , mais aussi les principes.

Certes l'étude de la théorie seule ne peut former complètement un homme de mer ; mais aussi les leçons d'une pratique aveugle ne peuvent le conduire qu'à des connoissances si bornées, qu'elles abandonnent sans ressources , un imitateur servile , dans tous les cas qui n'ont pas été prévus , & dans ceux dont les circonstances se présentent sous une forme nouvelle. La théorie étend la sphere des idées de l'homme qui s'en occupe ; elle prépare , elle dresse son esprit à des combinaisons variées ; elle porte , & elle aide même à inventer des moyens propres à produire des effets aussi directs qu'utiles. Il est vrai , que dans tout homme qui n'est appliqué qu'à des études purement spéculatives , les sens restent sans activité , les membres sans exercice ; & il n'apprend pas ainsi , ce qui ne peut être le fruit que d'une certaine expérience , c'est-à-dire , cet

art de saisir vivement l'époque souvent fugitive à laquelle il devient nécessaire en mer de commander, ou d'exécuter une manœuvre décisive. C'est alors à l'école seule de la pratique, qu'un marin peut recueillir cette instruction supplémentaire ; & c'est en exerçant son art, qu'il s'accoutume à juger sûrement, du moment important, & souvent unique, auquel il doit agir, pour éviter que l'application trop tardive d'un principe connu, reste dès lors, sans effet, comme sans utilité.

Il faut donc pour former complètement un homme de mer, réunir les leçons de la théorie à celles de l'expérience. Les unes & les autres, en se mêlant, se confirment & s'éclairent réciproquement. Elles accélèrent alors concurremment les progrès de l'artiste, & elles le rendent habile à choisir aussi sûrement que vivement les manœuvres qui conviennent à toutes les circonstances rares ou communes.

L'expérience instruit les hommes, non-seulement par les faits dont ils sont témoins attentifs & immédiats, mais aussi par ceux, dont la relation leur est transmise par leurs prédécesseurs ou par leurs contemporains, qui les ont observé avec soin. Ainsi, un tableau raisonné, de l'art de la marine, de ses efforts, de ses succès, de ses imperfections, de l'ordre successif de ses travaux, & de toutes les règles que des épreuves multipliées ont confirmé, devient nécessaire à l'instruction des hommes de mer, autant que des campagnes peuvent l'être, pour les exercer dans leur art.

Ensuite , si on analyse , toutes les opérations navales , les principes sur lesquels elles reposent , & les calculs les plus habituels qu'elles entraînent ; on reconnoît que , pour être exécutées avec autant de facilité que de confiance , elles exigent , suivant la nature de leurs résultats , comme on l'a dit précédemment , des connoissances plus ou moins profondes en Arithmétique , en Géométrie , en Astronomie , & en Mécanique.

Toutes ces sciences sont donc nécessaires à un homme de mer. Mais certes il ne doit pas les approfondir dans toute leur étendue , ni les parcourir dans toutes leurs ramifications. Il suffit qu'il les connoisse sous les rapports d'utilité qu'elles peuvent avoir avec l'art de la marine ; & autant qu'elles peuvent servir , soit à l'intelligence des regles de cet art , soit à la correction de ses défauts , soit à la conception de procédés nouveaux , soit à la perfection de toutes les opérations navales.

Ces sciences doivent donc faire partie de l'instruction qu'il convient de donner aux jeunes marins. Mais doivent-elles leur être enseignées isolément , comme on l'a fait jusqu'à présent ? Ne convient-il pas qu'ils s'instruisent en même temps , & de leur art , & des relations qui lient intimement les connoissances théoriques & pratiques ? Alors , comment cette instruction doit-elle leur être transmise ? Quel est l'ordre à établir dans l'enseignement pour obtenir de prompts succès ? Et cet ordre doit-il être dicté , ou par la marche des sciences , ou par celle de l'art ? Dans l'étude des sciences exactes , on pro-

cede des idées les plus simples aux combinaisons les plus sublimes. Dans l'art de la marine, au contraire, les premières opérations, qui ont pour objet, la forme des vaisseaux, ou l'architecture navale, supposent une théorie très-élevée; tandis que la dernière de ses branches, qui est la navigation, n'est fondée que sur les premiers élémens de mathématiques.

C'est pourquoi les Citoyens, qui se destinent à exercer l'art de la marine, & qui, dans un âge toujours peu avancé, ont un besoin commun d'apprendre, soit à raisonner avec méthode, soit à appliquer facilement à la pratique les résultats de la théorie, me paroissent devoir commencer leurs études par celle des sciences, & compléter ensuite leur instruction, non-seulement par une méditation profonde, mais aussi par un usage répété, de tous les procédés employés par l'art, depuis la construction des vaisseaux, jusqu'à l'exécution des campagnes de mer.

Il me semble que les leçons de théorie doivent aussi présenter aux élèves un attrait nécessaire, une utilité palpable, & une direction bien prononcée. Ainsi je pense que dans leur suite progressive elles doivent être entremêlées, & de plusieurs applications choisies de chaque principe à certaines opérations navales, & de quelques leçons de l'expérience qui seroient ou puisées dans un traité de l'art, ou reçues intermédiairement, au milieu des arsenaux, & dans des campagnes de mer. Cette marche serviroit à démontrer la nécessité des principes, à indiquer leurs usages & leurs applications, à développer leurs com-

binaisons , & à les identifier tellement avec leurs conséquences , que par elles ils seroient rappelés sans cesse , dans la pratique , à l'esprit qui se feroit une fois pénétré de leur vérité. Cette méthode , que je regarde comme la plus convenable à l'instruction des marins , enchaînant dans un ordre lumineux toutes les connoissances théoriques & pratiques , auroit encore l'heureux effet d'attacher , à l'étude des sciences , des hommes qui , en leur consacrant un temps précieux , se convaincroient des secours qu'elles leur fournissent pour apprendre à exercer & à perfectionner leur art.

Persuadé par ces réflexions , & animé par des motifs d'intérêt public , en considérant que les talens & les lumieres des Officiers de mer garantissent les succès des armées navales , les progrès & la sûreté de la navigation ; je me suis attaché à l'exécution du plan que je crois devoir assurer l'instruction complète des hommes de mer. Déjà en publiant un ouvrage *in* 4°. , intitulé *L'Art de la Marine* , j'ai tracé le tableau méthodique & détaillé de cet art. J'ai décrit toutes les opérations navales dans l'ordre successif qui les enchaîne naturellement. J'ai fait voir comment elles sont exécutées , soit pour construire un vaisseau , soit pour l'armer , le gréer , le manœuvrer , & le conduire à une destination quelconque , soit pour le faire évoluer dans un corps d'armée. En indiquant les préceptes , j'ai eu soin de désigner les principes dont ils sont les conséquences ; & j'ai démontré , autant qu'il m'a été possible , les bases , les sources ,

& les rapports des regles les plus importantes de l'art entier de la marine. ( 1 ) Aujourd'hui , pour faciliter l'intelligence de la partie théorique de cet ouvrage ( dont je me propose de donner bientôt une nouvelle édition ) , je publie *la science de l'Homme de mer* , en un volume in-8° , où j'ai réuni les seules parties des sciences exactes dont l'application est reconnue nécessaire ou utile à l'art de la marine : & afin que la partie pratique devienne commode à suivre par tous les citoyens , soit à terre , soit sur les vaisseaux ; j'ai fait imprimer séparément le *Dictionnaire de la Marine Française* , où j'ai présenté les définitions de ce grand nombre de termes techniques qui appartiennent exclusivement à la langue des hommes de mer.

Tels sont les ouvrages que je présente pour servir à l'instruction publique. Ils m'ont été utiles dans l'enseignement des sciences pendant une longue suite d'années ; & une telle épreuve me les a fait juger suffisans , soit pour initier dans la connoissance de l'art entier de la marine les jeunes citoyens qui se proposent de l'exercer , soit pour accélérer les progrès des hommes même qui auroient déjà quelque expérience de la mer. En effet ils y trouveront , une théorie assez étendue , & un tableau assez

---

(1) Ceux qui desireroient de plus grands détails sur le gréement & les manœuvres des vaisseaux , peuvent consulter les descriptions que j'ai données des Arts de la Mâture & de la Voilure , dont l'Académie avoit ordonné l'impression pour faire partie de la collection des arts & métiers.



détaillé de toutes les opérations navales ; pour les aider , soit à étudier dans le silence du cabinet , toutes les branches de cet art , avec autant de méthode que de lumieres ; soit à approfondir ses besoins & ses ressources ; soit à sentir la chaîne de toutes les regles qui le composent , ainsi que leurs liaisons avec la théorie qui leur sert de base. Avec de tels secours, dans les ports & à la mer , ils pourront , sans être embarrassés comme précédemment par l'ignorance de la langue des artistes , saisir la marche & la suite de toutes les opérations , raisonner leurs résultats , juger des moyens d'exécution , & méditer de nouveau les mêmes objets en reportant leur attention sur les developpemens relatifs qui sont présentés dans le traité de l'art de la marine. Dans un temps très-court ils pourront donc acquérir des lumieres étendues & nécessaires que , sans de tels ouvrages , & de telles études , ils n'obtiendroient qu'imparfaitement d'une expérience très-prolongée. L'effet avantageux de cette instruction transmise dans l'ordre que j'ai indiqué , fera aussi , sans doute , de disposer ceux qui l'auront reçu , à profiter habilement & rapidement des leçons de l'expérience ; de donner à leur génie tout l'effort nécessaire pour imaginer de nouveaux procédés , ou pour combiner & étendre avec autant de variété que de confiance ceux qui déjà sont connus ou adoptés ; & enfin de former promptement des marins utiles , ainsi que des observateurs, aussi exacts qu'éclairés, soit des phénomènes & des événemens de la mer , soit de tous les faits qui peuvent intéresser les progrès & l'entière perfection de l'art.

Ainsi désormais l'instruction , si nécessaire pour exercer l'art de la marine peut devenir aussi facile à acquérir , qu'à propager. Car l'enseignement des sciences est assuré à tous les citoyens , dans les écoles nationales des ports ; & des traités didactiques de l'art & de ses principes seront publiés , pour achever d'éclairer les travaux des arsenaux , ainsi que les manœuvres des vaisseaux.

La considération de ces ressources déterminera , sans doute , les hommes de mer à faire une étude approfondie & nécessaire de leur art. L'intérêt de la Patrie l'exige d'ailleurs impérieusement ; & si de tels motifs n'étoient pas encore assez puissans , l'intérêt particulier en imposeroit l'étroite obligation, Car , dans une République , où les talens distingués doivent seuls être appelés aux fonctions supérieures , le Gouvernement séparera irrévocablement les hommes éclairés , de ceux qui ne suivent qu'une routine toujours aveugle , pour ne confier qu'au mérite connu le commandement , ou la direction de toutes les opérations navales auxquelles sont attachées la gloire de la Nation & la prospérité publique.

---

# LA SCIENCE

DE

## L'HOMME DE MER.

### SECTION PREMIERE.

---

#### L'ARITHMÉTIQUE.

---

1. **L'ARITHMÉTIQUE** est la science du calcul des nombres. Elle enseigne l'art de compter, & elle donne les regles raisonnées suivant lesquelles on peut, non seulement, composer ou décomposer les nombres, mais aussi déterminer leurs rapports généraux & particuliers.

2. Un nombre en général, exprime de combien d'unités & de parties d'unité, une quantité est composée; & ce mot quantité est le nom qui est donné à toute chose sensible, qui est susceptible d'augmentation & de diminution. Si on imagine qu'un objet matériel, soit partagé, dans toute son étendue, en parties égales & connues, le nombre de ces parties, donne une idée précise de cet objet; & lorsque les parties égales, dont cette quantité est composée, ont une grandeur particuliere & généralement convenue, elles reçoivent le nom d'unités. Cette grandeur est d'ailleurs fixée assez arbitrairement; car chaque Nation a adopté des mesures qui sont différentes entr'elles,

quoique chacune les employe pour comparer les quantités de même espece.

3. Le pied & la livre d'Angleterre n'ont pas la grandeur, que les François donnent au pied & à la livre dont ils font usage. Des différences distinguent aussi les mesures analogues de Hollande, de Suede, de Russie, de Turquie, &c. la toise de France qui a une longueur connue & convenue, est une unité qui est employée pour mesurer les distances. Si une distance est considérable ; si, par exemple, c'est celle qui sépare deux points éloignés & pris sur la surface de la mer ; alors elle est exprimée en lieues ; & la lieue, qui d'ailleurs est composée d'un certain nombre de toises & de pieds, devient l'unité conventionnelle qui sert à mesurer ces longueurs. C'est ainsi que les masses de plusieurs quantités, sont exprimées par des livres, qui sont autant de petits poids égaux, qu'on est convenu d'employer comme unités, pour mesurer les poids de toute sorte d'objets. L'unité en général est donc une quantité déterminée conventionnellement & employée comme mesure commune, pour servir à comparer toutes les quantités d'une même espece. C'est pourquoi des objets étant mis en parallele relativement à leur longueur, largeur ou épaisseur ; ces dimensions sont exprimées en toises, ou en pieds, ou en pouces, ou en lignes. S'ils le sont relativement à leur poids ; la livre, l'once ou le gros doivent servir à les comparer sous ce rapport. Dans la marine, la lieue est, comme nous l'avons dit, l'unité employée pour mesurer de grandes distances. La brasse dont la longueur est de cinq pieds, sert de mesure à des objets plus petits, tels qu'un cordage & les profondeurs de la mer. Le tonneau qui pèse 2000 liv. sert à mesurer le port des bâtimens de mer, leur poids, & celui des matieres qu'ils peuvent transporter. La palme dont la longueur est de 13 lig. est l'unité destinée à la mesure de la grosseur des arbres propres à la mâture des vaisseaux. Une longueur de 120 brasses, qui est celle d'un cable ordinaire, & qui est nommée encablure, est aussi une unité employée à l'estimation de certaines distances ;

enfin, un nœud qui est une longueur de  $47 \frac{1}{2}$  pieds est une unité qui sert à mesurer sur la surface de la mer, le chemin que fait un vaisseau, dans un intervalle de tems déterminé.

4. Le nombre des unités, dont une quantité est composée, étant plus ou moins considérable; il a fallu imaginer & des noms pour indiquer divers nombres, & des signes convenables pour les écrire. C'est pourquoi on est convenu de former diverses classes d'unités, ou des nombres composés chacun, de plus ou moins d'unités. On a donc décidé que l'assemblage de dix unités, formeroit une unité d'une classe supérieure, & qu'on lui donneroit le nom de dixaine; que celui de dix dixaines, & par conséquent de 100 unités simples, seroit nommé centaine. L'ensemble de dix centaines a reçu le nom de mille; celui de dix milles, le nom de dixaines de mille; & successivement on a formé dans le même ordre, des classes de centaines de milles, de millions, de dixaines de millions, de centaines de millions, de milliards, &c. de cet arrangement ou de ces conventions, il résulte que dix signes ou dix caractères doivent suffire pour écrire intelligiblement, le plus grand nombre possible. En effet, on ne peut compter, dans chaque classe indiquée, que depuis zéro d'unité, jusqu'à neuf unités; & les signes indicatifs du nombre de ces unités, ou les chiffres choisis & employés sont, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. chacun de ces chiffres, pris séparément, peut exprimer un nombre d'unités d'une classe quelconque, & sa position locale ou relative aux autres chiffres qui l'accompagnent, suffit pour annoncer l'espece des unités dont il indique le nombre; c'est-à-dire, que la valeur de chaque chiffre, est dépendante de la place qu'il occupe dans une suite de chiffres, qu'un nombre peut exiger, pour être écrit dans sa totalité. C'est ainsi que le dernier chiffre placé à la droite d'un nombre composé, d'unités, de dixaines, de centaines, &c. n'exprime qu'un nombre d'unités: celui qui précède ce dernier immédiatement & sur sa gauche, indique un nombre de dixaines;

celui qui est placé immédiatement sur la gauche du chiffre des dizaines, est un nombre de centaines, &c. Conséquemment aux conventions précédentes, on peut dire d'un nombre quelconque & entier, qu'il est composé d'unités, de dizaines, de centaines, de milles, &c. & que pour écrire ou lire un nombre, il faut écrire ou lire toutes les parties qu'il renferme, & indiquer qu'elles appartiennent à telle ou telle classe d'unités. Ainsi, soit proposé d'écrire le nombre entier, cinq cents vingt mille trois cents quarante-six unités ? on doit écrire, 1°. le nombre des unités de la plus haute classe, qui est ici de cinq cents mille, & l'indiquer par le chiffre 5 ; 2°. le nombre des dizaines de mille ou des unités de la classe immédiatement inférieure à la précédente, & ce nombre est ici deux, qui est indiqué par le chiffre 2, placé à la droite du chiffre 5 ; 3°. Le nombre des unités de milles qui est zéro, & qui est indiqué par 0, placé à la droite & à côté du chiffre 2 ; enfin le même raisonnement sert à prouver quelle doit être la place que doivent occuper à la suite & à la droite des 1.<sup>ers</sup> chiffres 520, ceux qui sont propres à exprimer le nombre, ou des centaines ou des dizaines, ou des unités, qui sont parties du nombre proposé. Ce dernier est donc parfaitement représenté par 520346 ; & l'ordre qui regne entre les chiffres qui le composent, rend très-sensibles toutes les classes d'unités qui concourent à sa formation. Il devient superflu, après tous les détails précédens, de remarquer que les diverses classes d'unités qui se trouvent réunies dans un nombre, étant prises trois à trois (à commencer par la droite) forment des ordres numéraires qui portent les noms, d'unités, de milles, de millions, de milliards, &c. ; c'est-à-dire qu'on distingue, dans le premier ordre, des unités, des dizaines & des centaines ; dans le second ordre, des milles, des dizaines de mille des centaines de mille, &c. cette nouvelle division rend très-facile, l'énoncé d'un nombre quelconque, lorsque tous ces ordres sont séparés dans l'étendue d'un nombre donné.

5 Après avoir développé les regles conventionnelles de la numération, nous allons exposer les regles générales qu'enseigne l'arithmetique, pour faire les combinaisons principales des nombres. Comme on peut se proposer, ou d'ajouter ensemble plusieurs nombres, ou de connoître leur différence, ou de les répéter plus ou moins de fois, ou de les partager en parties égales, ou de chercher combien de fois ils se contiennent mutuellement; il est donc différentes combinaisons de nombres; & elles sont connues sous le noms d'addition, de soustraction, de multiplication & de division. Les opérations qui doivent être exécutées pour conduire aux résultats cherchés, sont soumises chacune à des regles particulieres; & nous allons les faire connoître avec tous les détails nécessaires, ainsi que les principes raisonnés qui leur servent de base fondamentale.

6. *Addition des nombres entiers.* Chercher la somme de plusieurs nombres c'est faire une addition: & comme on ne peut composer un tout homogene, que de quantités d'une même espece, on ne peut aussi réunir dans une somme, que des unités d'une même classe. C'est pourquoi, plusieurs nombres séparés, étant proposés pour être ajoutés ensemble; on doit, s'ils expriment des quantités de même dénomination, les écrire les uns au-dessous des autres, & dans un ordre tel qu'on fasse correspondre, sur une premiere colonne, les chiffres qui, dans les divers nombres, expriment les nombres de leurs unités; sur une seconde colonne à gauche de la premiere, les chiffres qui indiquent les nombres des dizaines; sur une troisieme, les chiffres des centaines, &c. après cette disposition préalable & nécessaire, on procede à la réunion de tous les chiffres qui, dans chaque colonne, indiquent des unités de même classe. Cette opération doit commencer par la colonne des unités, parce que, suivant les regles de la numération (4), ce sont les unités des classes inférieures qui, étant ajoutées ensemble, servent à former

celles des classes supérieures; ainsi, les chiffres des unités ou de la première colonne, doivent être réunis ensemble avant ceux des dizaines, ceux-ci avant les chiffres des centaines, ou de la troisième colonne, &c. Lorsque les unités simples ont été ajoutées ensemble, leur somme peut être assez forte pour former une ou plusieurs dizaines. Ce nombre de dizaines ne pouvant être réuni qu'aux dizaines des nombres proposés, on le réserve pour les ajouter ensemble, & le reste des unités est alors écrit seul sous la colonne des unités. Ensuite on ajoute ensemble les chiffres des dizaines, ou de la seconde colonne, & leur somme, si elle est assez grande pour former une ou plusieurs centaines, n'est pas écrite entièrement sous la colonne des dizaines; ces centaines sont réservées pour être jointes aux centaines de nombres proposés, & l'excédent en dizaines, est seul écrit sous la colonne des dizaines, ou à la gauche des unités. Les mêmes considérations dirigent, & doivent diriger l'addition des centaines, ainsi que celle des milles, &c., de tous les nombres proposés. Par un tel procédé, on parvient à réunir ensemble les unités de chaque classe, qui composent ces mêmes nombres; c'est-à-dire, à obtenir un nombre unique, qui est la somme de tous, & qui est toujours un nombre d'unités, d'une espèce déterminée ou d'une dénomination commune.

7. Soit par exemple proposé, de déterminer la longueur totale d'un cable qui est formé par plusieurs cables, ajoutés bout à bout les uns aux autres? alors cette longueur n'étant que la somme des longueurs particulières des cables réunis, il faut ajouter ensemble toutes ces longueurs partielles, après avoir eu l'attention préalable de les exprimer toutes en unités de même espèce, telles que des brasses ou des pieds, ou des pouces, &c. Supposons que les cables composans soient au nombre de trois; l'un de 940 pieds, le second de 409 p. & le troisième de 692 p. on voit qu'on a satisfait au premier principe qui exige que ces diverses longueurs aient une même déno-



mination, puisqu'elles sont exprimées en pieds. On voit aussi que la longueur du premier cable contient neuf centaines de pied, quatre dizaines de pied & zero d'unités de pieds. Les autres longueurs sont composées pareillement d'unités, de dizaines & de centaines de pieds; ainsi pour ajouter ces nombres les uns aux autres, & en composer une somme suivant la règle générale qui a été indiquée précédemment, on écrit ces mêmes nombres les uns au-dessous des autres, c'est-à-dire; les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, & dans l'ordre suivant. Les chiffres qui, dans chacun de ces nom- 940 p.  
 bres, expriment des unités, étant ajoutés 409  
 ensemble, leur somme est de onze pieds, 692  
 ou d'une dizaine de pieds, & d'une unité —————  
 de pied. La dizaine doit être réservée pour 2041  
 être ajoutée aux autres dizaines des nombres proposés; & l'unité qui reste, doit être écrite sous la colonne des unités, pour former le chiffre des unités de la somme cherchée. Les chiffres des dizaines étant réunis à la dizaine réservée, donnent quatorze dizaines, ou une centaine & quatre dizaines de pieds. En se conformant au raisonnement précédent, les quatre dizaines doivent être écrites sous la colonne des dizaines, pour former les dizaines de la somme cherchée; & cette centaine, résultante du nombre de dizaines, doit être ajoutée au nombre de centaines des quantités proposées; la somme de toutes ces centaines est vingt; ou elle est exprimée par deux mille pieds, sans aucune centaine de reste. C'est pourquoi le chiffre 0 doit être écrit sous la colonne des centaines à la gauche des dizaines, pour être le chiffre des centaines de la somme; & le chiffre 2 doit précéder ce dernier, pour indiquer le nombre de mille pieds qui sont contenus dans les nombres ajoutés. C'est ainsi qu'on forme un nombre 2041 pieds, & ce nombre est la somme cherchée des nombres proposés, parce qu'il renferme toutes les parties de ces nombres; c'est-à-dire, leurs unités, leurs dizaines & leurs centaines. C'est pourquoi le nombre 2041 pieds indique exactement

la somme des longueurs des trois cables supposés ; & par conséquent la longueur totale d'un cable composé de ces mêmes trois cables.

8. *Soustraction des nombres entiers.* Chercher la différence de deux nombres, c'est faire une soustraction ; & l'opération consiste à retrancher l'un de ces nombres de celui qui lui est comparé. Le premier principe de cette opération, est comme dans l'addition, que les deux nombres qui doivent être soustraits l'un de l'autre, expriment des unités d'une même espece. Car on ne peut, par exemple, assigner une différence entre des poids & des longueurs ; mais il est aisé d'établir, celle de deux poids, ou celle de deux longueurs, ou celle de deux distances. Si les nombres comparés sont composés d'unités de diverses classes, telles que des unités, des dizaines, des centaines, des milles, &c. leur différence est celle des nombres de leurs unités, de leurs dizaines, de leurs centaines, &c. ; & pour déterminer ces différences particulières, il faut que ces nombres soient écrits l'un au-dessous de l'autre, dans le même ordre déjà indiqué dans l'addition. Ensuite, comme les unités d'une classe sont formées des unités des classes inférieures, il devient nécessaire de commencer la soustraction, en cherchant la différence, 1°. des chiffres correspondans qui expriment de simple unités ; 2°. celles des chiffres des dizaines ; 3°. celle des chiffres des centaines & successivement. Dans l'exécution de cette regle, il arrive quelque fois qu'un chiffre supérieur est plus petit que le chiffre inférieur correspondant ; alors celui-ci ne peut être retranché du premier. Dans ce cas, on ajoute à la valeur de ce dernier chiffre, celle d'une unité d'une classe immédiatement supérieure, & cette unité qui est empruntée sur un des chiffres placés sur la gauche du chiffre trop petit, n'est réunie à celui-ci, qu'après avoir été réduite en unités de même espece que celle qu'il exprime ; par ce moyen, le chiffre supérieur est augmenté de dix unités, & le chiffre inférieur peut alors en être soustrait sans difficulté. Par ce procédé,

le chiffre qui précède celui sur lequel on a opéré, est diminué d'une unité. On tient compte de cette réduction, & on continue les soustractions partielles, en retranchant & successivement chaque chiffre inférieur de son correspondant supérieur. On parvient ainsi, en réunissant les différences partielles, des nombres d'unités, de dixaines, de centaines, &c., qui composent les quantités proposées, à déterminer la différence totale de ces mêmes quantités. Cette opération étant terminée, le résultat peut être mêlé de quelqu'erreur, mais il est toujours facile de reconnoître s'il est aussi juste qu'il doit l'être. En effet, le but de cette opération, est de trouver la différence d'une quantité à une autre plus grande; & cette différence étant nécessairement ce qui manque à la première, pour être égale à la seconde, la somme de cette différence & de la plus petite des deux quantités comparées, doit être égale à la plus grande des quantités proposées; c'est pourquoi l'égalité ou le défaut d'égalité entre cette somme & le plus grand des nombres comparés dans l'opération, devient une preuve de l'exactitude ou de l'inexactitude du résultat obtenu. Soit proposé, par exemple, de connoître la différence des distances qui separent un port de deux points éloignés, il faut soustraire ces deux distances l'une de l'autre. Soit la première de 60056 toises, & l'autre de 39069 toises. Après avoir placé les deux nombres l'un au-dessous de l'autre, & le plus petit sous le plus grand, il faut soustraire chaque chiffre inférieur de son correspondant supérieur, en commençant par la droite. Le nombre de 39069 neuf unités ne peut être retranché du ~~nombre six~~ nombre six, c'est pourquoi on emprunte 20987 t. une dixaine sur le chiffre à gauche. Cet emprunt réduit à 4 le chiffre 5, & cette dixaine convertie en unités, & réunie à 6, forme un nombre 16, dont on retranche 9: la différence est 7 unités, & le chiffre 7 doit être écrit au résultat, comme le chiffre des unités de la différence des deux nombres. Une même difficulté se présente pour la soustraction

des deux chiffres qui expriment des dizaines. Ainsi on doit avoir recours à un emprunt ; mais le chiffre 0 qui précède 5 dans le nombre supérieur , ne contient aucune centaine , c'est pourquoi on emprunte une unité sur le premier chiffre positif , qui est placé à gauche de celui pour lequel l'emprunt est nécessaire. Ce chiffre est ici 6 , qui exprime six dizaines de mille. la dizaine de mille empruntée sur 6 , n'est pas dans tout son entier , nécessaire au chiffre 4 , pour rendre possible la soustraction qu'on se propose de faire ; c'est pourquoi cette dizaine de mille est réduite en dix unités de mille , dont neuf sont supposées rester à la colonne des milles , au lieu du zero qui s'y trouve. La dixième est convertie en dix centaines , dont neuf restent à la colonne des centaines , tandis que la dixième centaine est réduite en dix dizaines , qui , portées à la colonne des dizaines , sont réunies aux quatre dizaines qui s'y trouvent. Alors , de la somme de 14 dizaines du nombre supérieur , retranchant les six dizaines du nombre inférieur , la différence 8 est celle des nombres de dizaines des deux quantités proposées. L'opération étant continuée , on retranche 0 de centaines d'un nombre de neuf centaines ; on soustrait 9 milles de 9 milles , & enfin trois dizaines de mille , de cinq dizaine de milles. Réunissant ensuite toutes ces différences partielles , leur somme 20987 toises est la différence des deux distances proposées. L'exactitude de ce résultat doit ensuite être reconnue ; & on s'en assure en se conformant à la règle indiquée précédemment ; c'est-à-dire , en ajoutant cette différence 20987 toises avec la petite distance 39069 toises ; & en examinant , si la somme de ces deux nombres est , comme elle doit l'être , égale à la plus grande distance. Une telle égalité a lieu dans l'exemple présent , & elle garantit ainsi la justesse de l'opération ou la bonté du résultat.

9. *Multiplication des nombres entiers.* Répéter un nombre plusieurs fois , c'est faire une multiplication. Certes , cette opération pourroit se réduire à une simple addition , puisqu'en ajoutant un nombre plusieurs fois à lui même , la somme est réellement une répétition de ce nom-

bre ; mais alors l'opération seroit longue ; & comme le même résultat peut être obtenu plus promptement , par d'autres regles qui constituent l'opération nommée multiplication , il est nécessaire de détailler ces regles & leurs principes. Dans cette opération , il y a un nombre qui doit être répété , & on le nomme multiplicande ; ensuite un autre nombre sert à indiquer combien de fois le premier doit être répété , & ce second nombre reçoit le nom de multiplicateur. On peut donc dire que la multiplication est une opération par laquelle un nombre nommé multiplicande , est répété autant de fois qu'il est marqué par un autre nombre nommé multiplicateur ; & le résultat de cette opération , ou la répétition du multiplicande , est désigné sous le nom de produit. Si le multiplicateur n'est composé que d'un seul chiffre , il indique qu'il faut répéter un nombre d'unités de fois , le multiplicande quelqu'il puisse être. S'il est composé non seulement d'unités , mais aussi de dizaines , il marque , par le chiffre de ses dizaines , combien de dizaines de fois le multiplicande entier doit être répété , &c.

10. La premiere regle de cette opération est donc de multiplier tout le multiplicande , successivement par chaque chiffre du multiplicateur , ( en commençant par les unités de l'un & de l'autre nombre ) ; & la seconde est d'ajouter ensemble tous les produits partiels ou qui ont été obtenus séparément , pour composer une somme qui est alors le produit total , ou le résultat de la multiplication proposée. Mais ces produits partiels , de quelle classe d'unités doivent-ils être ? il faut le savoir pour les réunir ensemble dans une seule & même somme ; & la nature de l'opération sert à leur assigner aisément la dénomination qui leur convient. Considérons le multiplicande comme exprimant dans sa totalité , un nombre d'unités de la classe la plus basse , ou un nombre de simples unités. Lorsqu'il est répété un nombre d'unités de fois , le produit ne peut être qu'un nombre plus grand d'unités ; mais répété un nombre de dizaines de fois , il doit résulter , de cette opération , un produit dix

fois plus grand que s'il étoit répété un même nombre d'unités de fois; c'est-à-dire, que le multiplicande multiplié dans son entier par le chiffre des dizaines du multiplicateur, doit donner un produit de la classe des dizaines. De même le résultat, de la multiplication du multiplicande, par le chiffre des centaines du multiplicateur, doit être un nombre de centaines & ainsi des autres produits. De-là il suit que ces produits partiels, destinés à être ajoutés ensemble, après que le multiplicande a été multiplié par chaque chiffre du multiplicateur, doivent être placés les uns au-dessous des autres, dans un ordre convenable. Il faut donc que le dernier chiffre, à droite de chacun de ces produits, soit écrit sous le deuxième chiffre à droite du produit précédent. On suppose toujours ici, comme on doit le faire, que le multiplicande est multiplié par le chiffre des unités du multiplicateur, avant de l'être par le chiffre des dizaines; que ce dernier produit est cherché, avant la multiplication du multiplicande, par le chiffre des centaines du multiplicateur; & ainsi de suite. On suppose aussi que, dans la multiplication du multiplicande par un des chiffres du multiplicateur, on commence par répéter les unités du multiplicande, avant de répéter ses dizaines, &c. cette succession régulière d'opérations, est fondée sur ce que la répétition des unités d'une classe, peut servir à former des unités d'une classe supérieure. Après avoir ainsi répété tout le multiplicande autant de fois qu'il est marqué, par le chiffre des unités du multiplicateur, par celui de ses dizaines, par celui de ses centaines, &c. après avoir ordonné les produits partiels les uns à l'égard des autres, on les ajoute ensemble; & leur somme est le produit cherché, ou le nombre qui exprime la répétition du multiplicande, faite autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur.

11. Veut-on savoir, par exemple, combien on doit payer pour l'achat de six barriques de marchandises, à raison de 564 livres par barrique; on voit aisément qu'il faut répéter six fois la somme de 564

livres; & dans cette opération, qui est une multiplication, on reconnoît nécessairement pour multiplicande la valeur de chaque barrique, tandis que leur nombre doit servir de multiplicateur. Remarquons ici que le nombre 6 doit être considéré comme un nombre abstrait; qu'il ne sert qu'à indiquer, par le nombre de ses unités, sans égard pour leur espece, combien de fois la quantité 564 livres, doit être répétée; & que par conséquent le produit ne peut être que des liv., puisqu'il doit être la répétition d'un nombre de livres. Voici maintenant le procédé qu'il faut suivre pour exécuter cette multiplication indiquée: Le 564 liv. multiplicande & le multiplicateur étant 6 écrits, on multiplie par 6 les quatre unités du multiplicande & on a pour 3384 liv. produit, 24 unités ou deux dizaines, de livres, & quatre unités. Ces dizaines sont réservées pour être ajoutées au produit de dizaines, qu'on doit obtenir, en multipliant par 6, les six dizaines du multiplicande; & les 4 unités de liv., doivent être seules écrites au produit. Le produit de dizaines dont nous venons de parler, est de 36 dizaines de livres, qui, ajoutées aux deux dizaines déjà réservées, forment une somme de 38, ou de trois centaines de livres, & de 8 dizaines. Le nombre 8 de ces dernières, est écrit à gauche du chiffre trouvé des unités du produit, & les trois centaines sont réservées pour être réunies aux centaines, dont le produit suivant doit être composé; & continuant la multiplication dans cet ordre, les cinq centaines du multiplicande, répétées, six fois, donnent un produit de 30 centaines qui, ajoutées aux centaines réservées, forment une somme de 33 centaines, ou de trois mille, & trois centaines de livres. On écrit alors au produit & à la gauche du chiffre des dizaines, le chiffre 3, nombre des centaines, & à la gauche de celui-ci, le chiffre 3 nombre des milles; de sorte que le nombre 3384 livres, est le produit exact de 564 livres multipliées par 6, ou un nombre qui contient six fois 564 livres.

12. Comme il peut se glisser quelque erreur dans



le résultat d'une multiplication, il devient nécessaire de savoir en faire la vérification; & elle est déjà annoncée par la nature même de l'opération. En effet, le multiplicande étant répété autant de fois que le multiplicateur l'indique; ce multiplicande doit être renfermé, ce même nombre de fois, dans le produit. Il suffit donc, pour s'assurer de l'exactitude d'une multiplication, de chercher si le produit contient le multiplicande, autant de fois qu'on compte d'unités dans le multiplicateur. Cette recherche nommée division, est une opération d'arithmétique dont nous n'avons pas encore exposé les règles; c'est pourquoi nous placerons la vérification du résultat d'une multiplication quelconque, après les règles de la division.

13. Lorsque le multiplicateur est composé de plus d'un chiffre, le procédé de l'opération consiste à multiplier tout le multiplicande, par chaque chiffre du multiplicateur, & nous venons de voir comment s'exécute cette répétition. Si le multiplicande doit être répété, ou dix, ou cent, ou mille fois, c'est-à-dire, s'il doit être multiplié par 10, 100 ou 1000, alors il suffit d'ajouter un, ou deux, ou trois zeros à la suite de ce multiplicande, pour le transformer en produit cherché. En effet la multiplication proposée consiste à le rendre ou dix, ou cent, ou mille fois plus grand, & les zeros, qu'on place à la suite, opèrent ce changement; puisqu'alors ses unités deviennent ou des dizaines ou des centaines ou des milles. Il en seroit de même, s'il devoit être multiplié par 10000 ou 100000, &c. & le produit seroit toujours le multiplicande, suivi d'autant de zeros qu'on en compte dans de tels multiplicateurs.

14. Demande-t-on, par exemple, le prix d'un cordage qui a une longueur de 638 brasses, & qui doit être payé à raison de 38 liv. par brasse. On voit, que le prix 38 livres d'une seule brasse, doit être répété 638 fois; que l'opération à faire est une multiplication; que le multiplicande est 38 livres; le multiplicateur 638, qui doit être considéré comme un nombre abstrait, qui exprime le nombre de fois que 38 livres



doivent être répétées; & enfin que le produit ne peut être qu'un nombre de livres. Après ces considérations, passons à l'exécution de l'opération. Le multiplicande & le multiplicateur étant 38 liv. écrits, on multiplie le premier par le chiffre 638. fre des unités du multiplicateur, & 38 liv. ~~répétés 8 fois~~ font 304 livres. Ces 38 liv. 304 liv. étant multipliées par le chiffre 3 des 114 dixaines du multiplicateur, le produit est 228 114 dixaines de liv. C'est pourquoi le chiffre ~~4~~ qui exprime des dixaines, doit être placé 24244 liv. sous le chiffre des dixaines du produit précédent; ensuite les autres chiffres qui précèdent 4, doivent être placés à la gauche du 4, comme ils le font dans 114; car ce nombre de 114 exprime réellement 1140 unités de livres. Le produit de tout le multiplicande, par le chiffre 6 des centaines du multiplicateur, doit enfin être écrit sous les précédens produits comme exprimant des centaines, c'est-à-dire, que ce produit étant 228 centaines de livres, le chiffre 8 doit être placé sous les centaines des autres produits. ( Remarquons que, quel que pût être le nombre des chiffres du multiplicateur, l'opération devoit être continuée, en observant constamment les mêmes regles.) Les multiplications partielles étant achevées, on ajoute tous les produits qui déjà ont été arrangés pour faciliter leur addition, & leur somme est le produit cherché; c'est pourquoi, dans l'exemple présent, le cordage total seroit du prix de 24244 liv.

15. Ces exemples suffisent pour indiquer la marche qu'on doit suivre dans toute multiplication de nombres entiers; & c'est ainsi qu'on calculeroit, soit le frêt d'un vaisseau de tant de tonneaux, à raison de tant de livres par tonneau; soit le poids d'un cordage de N brasses, à M livres, la brasse; soit le nombre des rations nécessaires à la nourriture d'un équipage de tant d'hommes, pendant un certain nombre de mois; soit le nombre des hommes qui doivent composer l'équipage d'un vaisseau de guerre, à raison de tant d'hommes par canon; soit, &c.

16. *Division des nombres entiers.* Chercher combien de fois un nombre en contient un autre de même espece, ou chercher quel est le nombre qui est contenu, un nombre de fois déterminé, dans un autre nombre proposé ; c'est faire une opération nommée division, par exemple, veut-on savoir combien, pour une somme de 2400 livres, on acheteroit de quintaux de goudron, à raison de 12 liv. le quintal. On voit qu'autant de fois la somme de 12 livres est contenue dans 2400 liv., autant on peut acheter de quintaux, & ce nombre est de 200. Supposons actuellement que 200 quintaux de goudron aient coûté 2400 liv. & qu'il soit question de savoir le prix de chaque quintal ; il est clair qu'il s'agit de chercher qu'elle est la somme qui est contenue 200 fois dans 2400 livres, ou bien de savoir qu'elle est la 200<sup>e</sup>. partie de 2400 ; liv. & cette partie est 12 liv. C'est sous ces deux points de vue, que se présente l'opération de la division, & qu'elle est commandée par les questions incidentes.

17. Nous allons successivement donner une idée des regles qu'il faut suivre, pour faire dans les deux cas, l'opération de la division. Considérons d'abord la division dans le cas où il faut chercher combien de fois un nombre contient un autre nombre. Le premier de ces nombres est nommé dividende ; on donne le nom de diviseur à celui qui est cherché dans le dividende, & enfin le résultat de l'opération est nommé quotient. Sur cet exposé on juge sans doute que le dividende & le diviseur, dans le premier cas que nous examinons, doivent être nécessairement d'une même espece ; & que si l'un est un nombre de livres, l'autre ne peut être aussi qu'un nombre de livres ; alors le quotient n'est qu'un nombre abstrait, car il ne sert qu'à exprimer combien de fois le dividende contient le diviseur proposé.

18 Si le diviseur est composé d'un seul chiffre, & le dividende, d'un nombre quelconque de chiffres, la division s'exécute en cherchant successivement combien de fois ce diviseur, qui n'est qu'un nombre d'unités, est

est contenu dans chaque chiffre du dividende ; cette recherche doit commencer par la classe la plus élevée des unités du dividende ; & cet ordre est fondé sur ce que , si le diviseur n'étoit pas contenu dans le premier chiffre à gauche du dividende , les unités que ce premier chiffre exprime , pourroient être réduites en unités d'une classe immédiatement inférieure , & former avec le nombre des unités de cette dernière classe , qui sont dans le dividende , une somme assez grande pour contenir ce diviseur. C'est par un tel procédé que l'opération peut être commencée & continuée régulièrement ; ce qui n'auroit pas lieu , si on commençoit par opérer sur le nombre des unités de la classe la plus basse. Si , par exemple , le chiffre le plus à gauche du dividende , dans lequel on cherche combien de fois est contenu le chiffre unique qui compose le diviseur , est un nombre de dizaines de mille ; & qu'il ne contienne pas le diviseur ; ces dizaines de mille sont alors converties en unités de mille , & leur nombre est réuni à celui des unités de mille du dividende. Cette somme est alors suffisante pour contenir le diviseur : dans ce cas , le quotient est nécessairement un nombre de milles. En effet , on cherche combien de fois un nombre d'unités , est contenu dans un nombre de milles ; & il doit y être renfermé mille fois fois davantage qu'il le feroit dans un pareil nombre de simples unités : ainsi le quotient déterminé par l'opération indiquée , ne peut être qu'un nombre de milles. Après cette première opération , on cherche , combien de fois le diviseur est contenu dans cette partie du dividende , qui exprime des unités d'une classe immédiatement inférieure aux milles , c'est-à-dire , dans le nombre de ses centaines. Le quotient , qui est alors de l'espèce des centaines , étant déterminé , on continue la division en , cherchant combien de fois le même diviseur est contenu d'abord dans le nombre des dizaines du dividende , & ensuite dans celui de ses unités. Ces dernières opérations partielles , donnent aussi deux quotients , dont l'un est de la

classe des dixaines, & l'autre de celle des unités. Enfin la réunion de tous ces quotiens partiels forme le quotient total, ou une somme qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans tout le dividende. Tel est l'ensemble général de l'opération de la division; mais il est des détails d'exécution qu'il est à propos de faire connoître, & que nous allons amplement développer.

19 La première règle de l'opération est de séparer sur la gauche du dividende, un nombre de chiffres assez grand pour que leur totalité puisse contenir le diviseur; ensuite on divise cette partie du dividende par le diviseur entier, & on écrit au quotient le chiffre qui indique combien de fois le dernier est contenu dans le dividende partiel. Il peut arriver, ou que celui-ci ne contienne le diviseur, ni le nombre de fois indiqué par le quotient trouvé, ni un nombre exact de fois, & sans reste; c'est pourquoi il faut, pour éclaircir ce doute, comme pour trouver le reste; 1.<sup>o</sup> considérer si du dividende partiel, on peut retrancher le diviseur autant de fois qu'il est présumé y être contenu; & 2.<sup>o</sup> examiner si le reste de la soustraction est plus petit que le diviseur total. Dans ce cas, le chiffre écrit au quotient est exact, & on procède à une nouvelle division partielle. C'est à cet effet, & par cette raison, qu'on établit pour 2.<sup>e</sup> règle générale; de multiplier le diviseur entier par le quotient trouvé & de retrancher ce produit du dividende, sur lequel on a opéré. Le reste de la soustraction dont on vient de parler, & qui est un nombre d'unités d'une certaine classe, doit ensuite être réduit en unités d'une classe immédiatement inférieure & réuni au chiffre du dividende qui est placé à la droite du premier dividende partiel; cette somme forme un deuxième dividende qu'on divise de nouveau par le diviseur entier: alors le quotient qui résulte de cette opération, est un nombre d'unités de la classe des unités du dividende partiel. Des raisons, semblables à celles qui ont été présentées précédemment, obligent ensuite de multiplier le diviseur entier par le

deuxieme chiffre du quotient, & de rétrancher le produit du deuxieme dividende partiel, afin qu'on puisse juger & de l'exactitude du quotient trouvé, & du reste de l'opération. C'est ainsi que successivement on parvient à diviser toutes les parties du dividende par le diviseur, & à déterminer tous les chiffres du quotient, ou du nombre qui exprime exactement combien de fois le diviseur est contenu dans tout le dividende.

20. Les mêmes principes qui ont guidé dans l'exécution de la division, servent aussi à établir la vérification du résultat ou du quotient trouvé. En effet, le diviseur entier étant multiplié par le quotient, doit devenir égal au dividende, parceque dans celui-ci, le diviseur est répété autant de fois qu'il est indiqué par le vrai quotient; ainsi, pour juger de l'exactitude du quotient d'une division, il faut multiplier le diviseur par le quotient; & l'égalité entre ce produit, & le dividende démontre seule que la division a été bien faite.

21 Si le diviseur, dans cette opération, est composé de plusieurs chiffres; les regles sont les mêmes pour déterminer le quotient. On prend d'abord sur la gauche du dividende, un nombre de chiffres, assez grand pour contenir le diviseur entier; ensuite le quotient étant déterminé, on multiplie le diviseur entier par ce quotient, & on retranche le produit du dividende partiel. Le reste de cette soustraction est réuni au chiffre suivant du dividende, pour exprimer avec lui un nombre d'unités d'une classe immédiatement inférieure à celle du premier dividende partiel. On obtient ainsi un nouveau dividende, & la division est continuée comme on l'a prescrit précédemment. Des exemples particuliers vont servir au développement de l'application des principes exposés, & des regles qui en sont la conséquence.

22. Se propose-t-on de trouver quel est le nombre des tonneaux portés par un bâtiment qui a été frété pour la somme de 31752 liv. & à raison de 125 l. le tonneau? il faut pour cette détermination, chercher combien de fois le prix 125 l., est contenu dans la somme 31752 l.

la question indique, pour dividende, le nombre 31752 l. ; pour diviseur 125 livres, & pour quotient, un nombre abstrait qui doit être celui des tonneaux de port de ce bâtiment. Voici comment cette division doit être exécutée, ainsi que toutes les opérations semblables. Comme il faut chercher combien de fois 125 livres sont contenues dans 31752 livres ; on examine si le diviseur est contenu dans les trois dizaines de mille du divi-

dende ; comme cela n'a pas lieu ;  
comme il n'est pas même renfermé  
dans les 31 milles de ce même divi-  
dende ; & qu'il seroit superflu de  
mettre au quotient deux zéros pour

$$\begin{array}{r} 31752 \text{ l.} \overline{) 125} \\ 675 \overline{) 254} \frac{2}{125} \\ 502 \end{array}$$

exprimer que le diviseur n'est contenu, ni dans les dizaines de mille, ni dans les milles du dividende ; on prend les trois premiers chiffres qui sont sur la gauche du dividende, & on cherche combien de fois 317 centaines du dividende contiennent le diviseur entier. On écrit 2 au quotient ; & on remarque comme précédemment que ce chiffre 2 exprime un nombre de centaines, parce que 125 unités de livres sont contenues dans 317 centaines de livres ; cent fois davantage qu'elles le seroient dans 317 unités de livres. Ce quotient étant trouvé, il faudroit procéder à la recherche du nombre des fois que les dizaines du dividende contiennent le diviseur. Mais ce premier quotient peut être trop grand ou trop petit, & le diviseur peut n'être pas contenu un nombre exact de fois dans le dividende ; c'est pourquoi il faut vérifier le quotient présumé, & trouver l'excédent du dividende partiel, sur le diviseur répété autant de fois qu'il est indiqué par le vrai quotient. A cet effet on multiplie le diviseur par le quotient trouvé, & le produit qui en résulte doit être, ou égal au dividende partiel dont on le rétranche, ou plus grand, ou plus petit que ce dividende. Dans le premier cas, il ne reste rien, & la division est bien faite. Dans le deuxième, le quotient n'est pas exact ; & doit être diminué. Enfin dans le troisième, le quotient ne doit pas être changé, si toute

fois le reste ne contient pas le diviseur. Dans l'exemple présent, 317 contiennent deux fois le diviseur 125, & de plus, il reste un nombre de 67 centaines qui ne peut renfermer 125. Le quotient, exprimé en nombre entier, est donc réellement 2, & il reste des 317 centaines, une somme de 67 centaines à diviser par 125. Ce reste étant réduit en dixaines, & ajouté aux dixaines du dividende qui sont au nombre de 5, la somme est de 675 dixaines. (& cette somme est formée simplement en plaçant, ou en écrivant le chiffre 5 à côté du reste 67 du premier dividende partiel). Si ces dixaines réunies ne contenoient pas le diviseur, on écrirait au quotient 0, à la place des dixaines, & on convertirait le deuxième dividende partiel, supposé trop petit, en unités qu'on joindrait aux unités du dividende total. Ici 675 renferment cinq fois le diviseur 125, & en retranchant du premier, celui-ci répète cinq fois, il reste 50 dixaines du dividende partiel sur lequel on a opéré. A côté du reste 50, on abaisse le chiffre 2 qui appartient au dividende total, & on forme ainsi un dernier dividende partiel, composé de 502 unités, dans lequel le diviseur est contenu quatre fois. Après avoir multiplié le diviseur par 4, & avoir retranché le produit du dividende 502, il y a un reste de 2 unités, & l'opération est achevée. En rassemblant les résultats de ces opérations successives, & les raisonnemens qui ont guidé dans l'exécution, on voit que le diviseur 125 est contenu, deux cents fois dans les centaines du dividende, 50 fois dans ses dixaines, & 4 fois dans ses unités. Ayant donc trouvé combien de fois le diviseur est contenu dans toutes les parties séparées du dividende; on peut conclure qu'il est contenu dans le dividende total deux cents cinquante quatre fois, & qu'il reste 2 unités du dividende, qui ne peuvent contenir le diviseur. Ce reste cependant n'est pas négligé, & on est convenu de placer ces deux unités à la droite du quotient, avec l'attention de les écrire au-dessus d'une petite ligne horizontale, sous laquelle le diviseur est placé. Par ce moyen, on indique, que la division de ce reste 2, n'a pu être exécutée, & que non

seulement le diviseur est contenu dans le dividende 254 fois; mais aussi deux cent vingt-cinquièmes de fois. Enfin, pour vérifier le quotient total, on multiplie le diviseur par ce quotient, & on examine si, comme le raisonnement l'indique, le produit résultant est égal au dividende.

23. Si une question, pour être résolue, exige qu'on cherche une quantité qui soit contenue un nombre de fois déterminé, dans un nombre donné; la division qui est indiquée dans ce deuxième cas, doit être faite, suivant les mêmes procédés qui ont été enseignés précédemment. En effet, si, par exemple, 8 quintaux de sucre ont été vendus 1752 livres, & qu'on demande quel est le prix de chaque quintal; tout consiste alors à chercher qu'elle est la somme de livres qui est contenue huit fois dans le dividende. Cette question indique, comme toutes les questions semblables, l'espèce des unités du quotient. Elle annonce qu'elles doivent être des livres; ainsi il n'y a que le nombre de ces mêmes livres, qui soit à chercher. Remarquons, que dans une division, le produit du diviseur par le quotient, est toujours égal au dividende. Dans la question présente la somme cherchée, & répétée huit fois, feroit donc un produit égal au dividende 1752 livres; mais on auroit le même produit en répétant 8 livres autant de fois qu'il peut y avoir d'unités dans la somme cherchée; donc on auroit aussi le nombre des unités de cette dernière somme, en divisant 1752 livres par le nombre 8, considéré comme exprimant des livres. La division dans ce deuxième cas, ou dans la recherche de la solution des questions pareilles à celle qui est proposée, peut donc encore se faire comme elle a été enseignée précédemment. D'ailleurs on peut s'assurer aisément par le fait de l'identité des quotiens (considérés comme numéraires), qui résultent de la division d'un dividende, soit par un diviseur abstrait tel que 8, soit par un diviseur concret, tel que 8 liv. Car le huitième de 1752 liv., est 219 livres, & en cherchant combien de fois 8 livres sont contenues dans 1752 livres, on trouve que ce nombre de fois est



219. Le nombre des unités de ces deux quotiens est donc parfaitement le même, & l'état de la question acheve d'établir la plus grande égalité entre ces deux quotiens, en annonçant que ce nombre abstrait 219, ou le dernier de ces quotiens doit exprimer un nombre de livres. Il résulte de ces réflexions, que dans ce deuxième cas, la division doit être exécutée comme dans le premier. Ainsi, les règles de cette opération, ayant été suffisamment développées & appliquées, il devient superflu d'en parler plus longuement.

24. Si le diviseur abstrait étoit composé de plusieurs chiffres, l'opération de la division devroit encore être faite de la même manière, parce que les principes ne peuvent varier avec la grandeur du diviseur. Par exemple, supposons que dans un bâtiment qui est en mer, il ne reste à 754 hommes que 1248 livres de biscuit pour leur nourriture journalière; & qu'il faille déterminer combien chaque jour il revient de biscuit à chaque matelot. La question est résolue en prenant la 754.<sup>e</sup> partie de 1248 livres, ou en cherchant qu'elle est la quantité de livres qui est contenue 754 fois dans 1248 livres: or, le quotient devant être des livres, & le nombre de ces livres étant le même que celui qu'on trouveroit (23) en cherchant combien de fois 754 livres sont contenues dans 1248 livres; il faut diviser 1248 livres par 754 & le quotient 1 liv.  $\frac{494}{754}$  expriment le nombre de livres, & de parties de liv. de biscuit que chaque matelot doit recevoir chaque jour pour sa nourriture.

25. Il nous reste à faire une remarque importante; elle est une conséquence des principes de l'opération de la division, & elle embrasse les rapports du dividende, du diviseur & du quotient. Soient donnés le dividende, le diviseur & le quotient d'une division. Si on rend le dividende 4 fois plus grand, par exemple; il doit contenir quatre fois davantage le diviseur qui est supposé rester le même; & le quotient, dans cette supposition, doit aussi devenir quatre fois plus grand qu'auparavant. Si le dividende restant le même, le diviseur est rendu 4 fois plus grand, celui-ci est

contenu quatre fois moins dans le premier , & le quotient est par conséquent quatre fois plus petit ; de même , si le dividende ou le diviseur sont rendus un nombre de fois plus petits , le quotient devient le même nombre de fois ou plus petit ou plus grand ; & ces idées n'ont besoin que d'être présentées pour être senties & adoptées. Après ce qui a été exposé précédemment , on peut en conclure aussi que si le diviseur & le dividende sont l'un & l'autre rendus , le même nombre de fois ou plus grands , ou plus petits , le quotient doit rester le même qu'il eut été , si le dividende & le diviseur n'eussent pas changé de grandeur. Car l'accroissement que le quotient peut éprouver par celui du dividende , est alors égal au décroissement que produit , sur ce même quotient , l'accroissement du diviseur. On peut donc établir pour règle générale qu'en multipliant ou en divisant par un même nombre , un dividende & son diviseur ; leur quotient n'éprouve aucun changement , & reste constamment de la même grandeur. C'est ainsi que le quotient de 6 , divisé par 3 , est le même que celui , de 12 par 6 , de 18 par 9 , de 24 par 12 ; & réciproquement le quotient de 24 divisé par 12 , est le même que celui de 18 par 9 , de 12 par 6 , de 6 par 3 ; une telle remarque devient utile pour le développement de quelques autres opérations.

26. C'est après avoir présenté les principes , & l'opération détaillée de la division , qu'il est permis d'exposer , & de faire concevoir aisément la méthode qu'il faut suivre pour vérifier le produit résultant ; de la multiplication de deux nombres quelconques. Cette méthode consiste à diviser le produit par le multiplicande , & à examiner si le quotient d'une telle division est égal au multiplicateur. Si cette égalité n'a pas lieu ; la multiplication , qu'on vérifie doit être nécessairement mêlée de quelque erreur : mais si elle a lieu , elle devient une indice sûr de l'exactitude de l'opération. En effet , d'après la nature de la multiplication , le produit doit contenir le multiplicande autant de fois qu'il est répété ; & ce nombre de fois , est le nombre des unités du multiplicateur ; par conséquent , le quotient d'un produit divisé

par le multiplicande , doit toujours être égal au multiplicateur. Comme le produit résultant d'une multiplication ne cesse d'être le même nombre , soit lorsqu'on prend le multiplicande pour être multiplicateur , soit lorsqu'on fait faire à celui-ci la fonction de multiplicande dans cette opération ; & comme deux nombres multipliés l'un par l'autre , portent le nom de facteurs de leur produit , la regle précédente peut être énoncée généralement , en disant ; que le quotient de la division d'un produit quelconque , par un de ses deux facteurs , est toujours égal à l'autre facteur.

27. *Des fractions.* Lorsque , dans une division , le dividende est plus grand que le diviseur , le quotient est toujours composé d'un nombre plus ou moins grand d'unités. S'il sont égaux , le quotient est exprimé par une seule unité ; parce que le dividende ne contient alors le diviseur qu'une seule fois : mais si le dividende est moindre que le diviseur , alors celui-ci n'est pas contenu dans le premier , une unité de fois toute entière ; mais une partie d'unité de fois ; & la division qui , dans ce cas , ne peut plus être exécutée , est seulement indiquée , comme on l'a déjà dit , en écrivant le dividende au-dessus du diviseur , & en les séparant par une petite ligne horizontale. C'est ainsi qu'étant proposé de diviser 2 par 3 ; comme le nombre 2 ne contient pas 3 , on indique une telle division sous cette forme  $\frac{2}{3}$  , en donnant au nombre supérieur , qui est le dividende , le nom de numérateur , & à celui qui est inférieur , le nom de dénominateur.

28. Remarquons que la quantité  $\frac{2}{3}$  , en annonçant que 2 est à diviser par 3 , représente aussi le quotient de la division de ces deux nombres. Ce quotient doit être exactement le tiers de deux unités. Et ce tiers est égal aux deux tiers d'une seule unité , comme dans la quantité  $\frac{5}{12}$  , le quotient qui est le 12.<sup>e</sup> de cinq unités , représente aussi les cinq douzièmes d'une seule unité. C'est cette identité de valeur qui a fait donner aux quantités de cette forme  $\frac{2}{3}$  ,  $\frac{5}{12}$  , le nom de fractions , parce que réellement on peut les regarder comme exprimant une certaine portion d'une

unité déterminée. Telle est l'origine du mot fraction. Une quantité fractionnaire, peut donc, dans les calculs, être considérée sous deux points de vue très-distincts; ou comme une division indiquée, ou comme une portion d'unité. Sous le premier rapport, une fraction représente le quotient d'une division; sous le second rapport, on dit d'une fraction, que sa valeur est celle d'un certain nombre de parties égales de l'unité. Le nombre de ces dernières parties qui forment toute sa valeur, dans ce dernier cas, est désigné par le numérateur de la fraction; & la grandeur de ces parties est indiquée par le dénominateur, qui marque le nombre des parties égales dont l'unité entière est composée. Par exemple, dans la fraction  $\frac{5}{12}$ , qui est égale aux cinq douzièmes d'une unité; le dénominateur 12 annonce que l'unité entière doit être supposée partagée en 12 parties égales; & le numérateur 5, indique que cinq de ces parties sont la valeur totale de la fraction  $\frac{5}{12}$ . Après ces développemens, il ne peut plus y avoir d'incertitude sur la nature des fractions: & si les deux manières également justes de les envisager, ont été remarquées & analysées; c'est pour faire connoître qu'il est deux moyens, entre lesquels on peut indifféremment faire un choix, pour résoudre avec facilité les questions qui se présentent. On doit remarquer, sans doute, qu'il peut y avoir entre toutes les fractions possibles, une immense variété, puisque tous les nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, peuvent leur servir de numérateur & de dénominateur; mais parmi ces fractions, il en est, qui se réduisent à une forme plus simple, que celle dont on a parlé précédemment; qui sont plus faciles à employer dans les calculs; & qu'on distingue sous le nom de *décimales*.

29. Ces fractions particulières sont celles, qui ont pour dénominateur ou 10, ou 100, ou 1000, ou enfin le chiffre 1 suivi d'un nombre indéfini de zéros. De tels dénominateurs indiquent que l'unité est divisée en 10, ou 100, ou 1000 parties; par conséquent les parties qui forment la valeur de ces fractions, sont nécessairement, ou des dixièmes, ou des centièmes,

ou des millièmes d'une unité; & ce rapport avec l'unité leur a fait donner le nom générique de *décimales*. Ces parties ont aussi chacune un nom distinctif, qui indique leur rapport précis avec l'unité. Lorsque celle-ci est divisée en dix parties égales, chacune de ces parties est nommée *dixième*; si elle l'est en cent parties, chacune est un *centième*; elles portent le nom de *millième* lorsqu'on en conçoit mille dans l'unité entière; & en continuant, on voit qu'il y a des *dix millièmes*, des *cent millièmes*, &c. delà il suit que, l'unité vaut dix dixièmes; chaque dixième dix centièmes; chaque centième dix millièmes, &c. Ensuite si on rapproche de ces résultats, ce qui a été dit en parlant de la numération; savoir, qu'une unité de mille vaut dix centaines, une centaine dix dizaines, & chaque dizaine dix unités; on doit reconnoître que l'ordre entre les décimales de différente dénomination, est absolument le même que celui qui regne entre les unités de différentes classes. C'est d'après cette considération qu'on est convenu d'écrire les décimales sous une forme qui est différente de celles des fractions ordinaires. Si un nombre entier est joint à des fractions décimales, on écrit ce nombre entier; & à la suite de ses unités, on place le nombre des parties d'unités qui composent ces fractions, en supprimant leur dénominateur, & en plaçant une virgule qui separe le chiffre des unités, des chiffres décimaux. C'est ainsi que la somme de 23 &  $\frac{24}{100}$ , suivant les conventions annoncées, doit être écrite sous cette forme 23,24; la virgule placée après les unités annonce que les chiffres qui la suivent sur la droite, expriment des décimales, c'est-à-dire, que le chiffre 2 indique deux dixièmes, & le suivant quatre centièmes. Un tel arrangement a été adopté, avec d'autant plus de raison, qu'il établit une régularité raisonnée; dans la succession des chiffres qui expriment, qu'un nombre est composé d'unités; & de parties d'unités; & qu'il facilite toutes les opérations qu'on peut se proposer de faire sur les fractions:

30. Il est à remarquer que, cette manière simple

d'exprimer les fractions décimales ; & la célérité avec laquelle elle permet de les calculer ; ont dû faire désirer de réduire en décimales, toute autre fraction , dont le dénominateur n'est pas un nombre multiple de 10. Plusieurs de ces dernières fractions peuvent, il est vrai, être transformées en un nombre de décimales qui représentent parfaitement leur valeur ; mais il en est d'autres qui ne peuvent l'être exactement. D'abord il est aisé de voir que toute fraction peut avoir, pour valeur plus ou moins approchée, un certain nombre de décimales. Car une fraction n'est qu'une division indiquée, dont le quotient est plus petit que l'unité. Car, pour exécuter une telle division ; on multiplie par 10 le numérateur, ou on transforme le dividende en dixièmes d'unité, & on divise le produit, par le dénominateur primitif de la fraction : le quotient est alors un nombre de dixièmes. Si, après cette première division, il y a un reste de dixièmes, on le réduit en centièmes, en le multipliant par 10, parce que chaque dixième vaut dix centièmes ; on continue la division par le même dénominateur ; on trouve un second quotient, qui est un nombre de centièmes ; & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'opération, soit faite sans aucun reste, ou ne présente qu'un reste, qui puisse être négligé sans inconvénient. Par conséquent, toute fraction peut être transformée, plus ou moins exactement, en décimales ; mais ce n'est pas toujours sans reste, & la division ne s'achève exactement, que dans les cas où le diviseur, c'est-à-dire, le dénominateur de la fraction, a pour facteur, ou 2, ou 5. Par exemple : si la fraction  $\frac{3}{8}$  doit être transformée en décimales ; comme elle indique qu'il faut diviser trois unités par 8, ou prendre le huitième de 3 unités ; on multiplie celles-ci par 10, pour les changer en 30 dixièmes, qui ont la même valeur ; & on divise 30 dixièmes par 8. Le quotient est 3 dixièmes, il reste 6 dixièmes ou 60 centièmes, qui, divisés par 8, fournissent 7 centièmes au quotient, & un reste de 4 centièmes, ou de 40 millièmes. Enfin, ce dernier reste, étant divisé par 8, donne 5 millièmes, sans aucun reste. De cette ma-

niere, le quotient total, qui est la somme des quotients partiles qui ont été trouvés, est, d'après les principes, écrit sous cette forme 0,375. Les  $\frac{3}{8}$  d'une unité, qui composent la fraction proposée, ont donc la même valeur que trois cent soixante-quinze milliemes de la même unité. Le zéro qui est écrit avant la virgule, ne sert ici qu'à annoncer, que le quotient, de 3 divisé par 8, ne contient aucune unité entiere, & qu'il n'est qu'une quantité décimale. Si la fraction, à réduire en décimales, étoit, par exemple,  $\frac{5}{11}$  (où le dénominateur n'a pour facteur, ni 2, ni 5); on parviendroit en faisant, comme précédemment, trois divisions successives, au quotient 0,454; mais, après ces trois opérations, il resteroit encore six milliemes. Si on continuoit la division, en changeant ces six milliemes en 60 dix milliemes; le quotient deviendroit 0,4545, avec un reste de cinq dix milliemes: & quelque prolongée que put être cette opération, il y auroit toujours un reste 6 ou 5. De telle fractions ne peuvent donc être réduites complètement en décimales; & on ne les introduit sous cette forme dans les calculs, que dans le cas où les questions proposées permettent de négliger un certain nombre des parties décimales restantes, ou d'employer la valeur de ces fractions; lorsqu'elle est approchée, ou à un millieme, ou à un dix millieme près, &c. Si les questions à résoudre demandent la plus grande exactitude, alors de telles fractions n'entrent dans les calculs que sous leur forme ordinaire.

31. Nous devons remarquer aussi, conséquemment aux principes établis, que des zéros en nombre quelconque peuvent être placés à la suite & sur la droite d'un nombre de décimales, sans opérer aucun changement dans la valeur de ces nombres de décimales. Car ces zeros ne servent alors qu'à transformer les premieres décimales, en d'autres décimales, qui sont, ou dix, ou cent, ou mille fois plus petites; & quoiqu'en plus grand nombre, ces dernieres ne composent qu'une grandeur égale à celle des premieres. C'est ainsi que 3,6, par exemple, sont la même chose que 3,60, ou



ou, 3,600, ou 3,6000, &c. Car fix dixiemes valent autant que 60 centiemes, 600 milliemes, 6000 dix milliemes, &c. C'est sous un tel point de vue que les nombres décimaux diffèrent essentiellement des nombres entiers. Car si à la suite, & sur la droite de ceux-ci, on place un ou deux zeros; alors ces nombres deviennent dix ou cent fois plus grands qu'ils ne l'étoient avant l'adjonction des zeros.

32. Les quantités décimales sont, comme les nombres entiers, susceptibles d'être combinées ensemble par addition, soustraction, multiplication & division. S'il faut les ajouter entre elles, soit qu'elles accompagnent un nombre entier, soit qu'elles se présentent isolées; les regles qui ont été démontrées pour diriger l'addition des nombres entiers, dirigent aussi celle des décimales; & peut-on douter de l'identité des deux opérations? puisque l'ordre de succession, dans les dispositions des chiffres décimaux, est le même que celui des chiffres des nombres entiers; & que les décimales d'une certaine classe, servent à former des décimales d'une classe supérieure, comme des unités réunies peuvent composer des dizaines, ou comme des dizaines répétées donnent des centaines, soit, par exemple, proposé, d'ajouter ensemble les nombres suivans,  $36^1, 182$ ,  $124^1, 6$ ; &  $2^1, 36$ . Tout consiste à réunir & les décimales & les unités; c'est-à-dire, qu'il faut ajouter les milliemes de livre ensemble, ensuite les centiemes, les dixiemes, les unités, les dizaines & les centaines qui sont contenus dans les nombres proposés. Il est donc nécessaire, qu'en écrivant ces nombres, les chiffres qui expriment des décimales ou des unités d'une même classe, soient placés les uns au-dessous des autres, ou que les unités correspondent aux unités, sur une même colonne, les dizaines aux dizaines, &c. Après avoir écrit ces trois nombres, comme on vient de le prescrire; on commence l'opération en som-

 $36^1, 182$ 
 $124, 6$ 
 $2, 36$ 


---

 $163^1, 142$



de 14, & forment une somme d'un dixieme & 4 centiemes. Ces derniers doivent être écrits au bas de la colonne des centiemes, & sur la gauche des milliemes, déjà placés. Ajoutant les dixiemes de ces nombres avec le dixieme réservé, la somme est de 13 dixiemes, qui valent une unité & 3 dixiemes. On écrit ceux-ci à la somme & sur la gauche des centiemes, en réservant l'unité qui a résulté de la dernière somme partielle, pour l'ajouter aux unités des nombres proposés. Ces unités réunies sont au nombre de 13, dont 3 seules sont écrites à la somme, à gauche des dixiemes; & pour distinguer les chiffres décimaux, déjà écrits, des unités qui doivent résulter de la suite de l'opération, on place une virgule entre le chiffre des dixiemes & celui des unités. Enfin on termine l'addition des unités, des dixaines & des centaines de ces nombres, comme il a été enseigné précédemment. La somme totale & cherchée des 3 nombres proposés, est donc de 163<sup>1</sup>,142; ou de 163 livres & 142 milliemes de livres.

33. La soustraction des nombres décimaux, est aussi entièrement semblable à celle des nombres entiers; & un seul exemple, après les réflexions précédentes, suffira pour prouver leur ressemblance. Soit proposé de connoître ce qui reste de 348<sup>1</sup>,65 de biscuit, après en avoir retranché 129<sup>1</sup>,903. On place ces deux nombres l'un au-dessus de l'autre, & comme l'un d'eux contient des milliemes de livres, tandis que l'autre n'a aucun chiffre qui en exprime, on écrit sur la droite de ce dernier un zéro, qui annonce que dans ce nombre il n'y a pas de milliemes; qui, d'ailleurs, n'y produit aucun changement (31); & qui prévient tout embarras dans l'exécution de la soustraction. ce nombre est donc transformé de 348<sup>1</sup>, 65 en 348<sup>1</sup>,65 parce que 65 centes valent 650 348<sup>1</sup>, 650 mill.<sup>es</sup> L'opération consiste actuellement 129, 903 à déterminer la différence de ces deux ~~nombre~~ nombres; ou les différences partielles, 1°. 218<sup>1</sup>, 747 de leurs milliemes, 2°. de leurs centiemes, 3°. de leurs dixiemes &c. On ne peut retrancher 3 milliemes de 0; c'est pourquoi on emprunte sur les 5 centiemes qui

précédent 0, un centieme qu'on convertit en dix milliemes, & dont on retranche les 3 milliemes du nombre inférieur. Le reste est 7 milliemes qu'on écrit sous la colonne sur laquelle on a opéré. La différence des centiemes des deux nombres, est évidemment 4 centiemes. Celle des dixiemes est 7; parce que, d'après les raisons déjà exposées, on doit emprunter, sur le chiffre 8, qui précède les dixiemes du nombre supérieur, une unité qui vaut dix dixiemes; & ces dixiemes, étant réunis aux 6 dixiemes du nombre supérieur, donnent une somme, dont la différence avec le chiffre des dixiemes du nombre inférieur, est 7 dixiemes. Ensuite, en se conformant aux regles connues, on retranche successivement l'un de l'autre, les chiffres des unités, ceux des dizaines, ceux des centaines; & la différence totale des deux nombres proposés est alors trouvée de 218<sup>1</sup>,747. La soustraction des nombres décimaux est donc soumise aux mêmes regles que celle des nombres entiers. Elle peut donc être faite sans égard à la virgule, sous la condition que, dans la différence trouvée, on doit séparer par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans celui, des deux nombres proposés, qui en a le plus.

34. Multiplier, l'un par l'autre, deux nombres qui renferment des décimales, c'est toujours répéter le multiplicande, quel qu'il soit, autant de fois que le multiplicateur l'indique. Ainsi doit-on répéter dix fois, par exemple, un nombre de 3,24, ou de 324 centiemes (ce qui est la même chose), on doit avoir 3240 centes. pour produit (10), ou 32,40. Si ce même nombre étoit répété 100 fois, le produit seroit 32400 centiemes, parce que, la répétition d'un nombre de centiemes ne peut être que des centiemes, ou 324,00. Considérons présentement que, multiplier le nombre 3,24 par 10, ou par 100, c'est le rendre dix ou cent fois plus grand; & que les résultats de ces multiplications sont toujours composés des mêmes chiffres qui se trouvent dans 3,24, avec cette différence, que la virgule est reculée sur la droite, ou d'une ou de deux places, selon le multiplicateur 10 ou 100: par conséquent, la regle générale

à observer pour rendre dix, ou cent, ou mille fois plus grand, un nombre composé de décimales, il suffit de reculer sa virgule sur la droite, ou d'un chiffre, ou de deux, ou de trois. Par conséquent, la règle générale qu'on doit suivre pour rendre dix, ou cent, ou mille fois plus petit, un nombre décimal, il faut avancer la virgule sur la gauche, ou d'une place, ou de deux, ou de trois. Remarquons aussi que dans ces produits, cités précédemment, il y a autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve dans les facteurs.

35. En général, quels que puissent être les nombres décimaux, à multiplier les uns par les autres; l'opération est fondée sur les mêmes principes que celle des nombres entiers. C'est pourquoi la règle constante à suivre dans ces multiplications; est que les produits doivent être d'abord déterminés, comme si les nombres proposés exprimoient, autant d'unités qu'ils présentent de décimales; & qu'ensuite, il faut séparer, dans ces produits & sur la droite, autant de chiffres décimaux qu'on en compte dans tous les facteurs. En effet, nous avons dit ailleurs, que si dans une multiplication, le multiplicande, composé d'unités, est multiplié par le chiffre des dizaines du multiplicateur, le produit doit être un nombre de dizaines; ou qu'il doit être dix fois plus grand, que si le multiplicande étoit multiplié par un égal nombre d'unités. De même, si un multiplicande est un nombre de dixièmes, ou de centièmes, ou de millièmes, & que le multiplicateur soit un nombre d'unités; le produit qui est toujours de même espèce que le multiplicande (puisque'il n'en est qu'une répétition) doit être un nombre de dixièmes, ou de centièmes ou de millièmes; c'est-à-dire, qu'il doit être ou dix, ou cent, ou mille fois plus petit, que si les deux facteurs étoient des unités. Dans le cas supposé, ce produit doit donc avoir ou un, ou deux, ou trois chiffres décimaux, ou enfin autant qu'il y en a dans les deux facteurs. Si le multiplicateur, dans la même opération, au lieu d'être composé d'unités, est un nombre de dixièmes; le produit qui résulte de la multiplication, est nécessairement dix fois plus petit,

qu'il ne l'est, lorsque le multiplicateur est un nombre d'unités; par conséquent, le produit, dans cette nouvelle supposition, doit avoir un chiffre décimal de plus qu'il n'y en a dans le multiplicande; ou plutôt, il doit avoir autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble; & il doit être composé ou de centiemes, ou de milliemes, ou de dix milliemes. si le multiplicateur est un nombre de milliemes, le produit devient mille fois plus petit que lorsque ce même facteur est des unités (le multiplicande restant toujours le même); c'est pourquoi, ce même produit doit avoir trois chiffres décimaux de plus qu'on n'en compte au multiplicande; il doit donc être composé de dix milliemes, ou de cent milliemes, ou de millioniemes; c'est-à-dire, qu'il doit avoir autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur. C'est ainsi qu'en étendant le même raisonnement à des nombres qui contiendroient un nombre indéfini de chiffres décimaux, on en concluroit toujours la regle générale, déjà énoncée, savoir: que si des nombres décimaux doivent être multipliés les uns par les autres, il faut exécuter l'opération, comme s'ils étoient des nombres entiers (c'est-à-dire, sans avoir égard à la virgule); & ensuite, séparer par une virgule, sur la droite du produit trouvé, autant de chiffres décimaux qu'on en compte dans tous les facteurs proposés.

36 Si, par exemple, on doit payer le fret de 42,3 tonneaux, à raison de 12<sup>1</sup>,038 par tonneau; on trouve la somme à acquitter, en répétant 12<sup>1</sup>,038, autant de fois qu'il y a de tonneaux, ou autant de fois que l'indique le nombre 42,3, considéré comme abstrait. Cette opération étant exécutée, comme le prescrit la regle générale déjà démontrée, on regarde le multiplicande, comme exprimant 12038 unités de livres, au lieu de 12038 milliemes de livres, & par conséquent, comme étant mille fois plus grand qu'il ne l'étoit auparavant, puisque la virgule se trouve reculée de trois places. Le multiplicateur n'est plus considéré comme 423 dixiemes d'unités, mais comme 423 unités; &

par conséquent, comme étant devenu dix fois plus grand qu'il n'a été proposé. Le produit de ces deux nombres est 5092074 unités de livres. Si on lui applique la règle démontrée, il est réduit à  $509^1,2074^1$ , en séparant, sur la droite, quatre chiffres décimaux, parce qu'il s'en trouve 4 dans les deux facteurs. On arrive encore au même résultat, en considérant que, dans cette multiplication, le multiplicande rendu mille fois plus grand, par la suppression de la virgule, est multiplié par un nombre dix fois plus grand; ce qui rend le produit dix mille fois trop grand. Le produit réel ne peut donc être obtenu, qu'en rendant le produit trouvé, dix mille fois plus petit; c'est-à-dire, en réduisant, ses unités à n'être que des dix millièmes, ses dizaines à être des millièmes &c.; ou en séparant, comme on l'a déjà dit, sur la droite de ce produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

37. La division des nombres décimaux est soumise aux mêmes règles qui sont suivies dans la division des nombres entiers. En effet, si on considère, que six unités contiennent deux unités, comme six centièmes contiennent deux centièmes, comme six millièmes contiennent deux millièmes &c.; & que le quotient, dans tous ces cas, est toujours 3; on doit en conclure que, toutes les fois que le dividende & son diviseur, sont réduits, l'un & l'autre, à exprimer des décimales d'une même classe, le quotient de la division de ces nombres décimaux, est égal à celui qui résulteroit, en divisant l'un par l'autre, ces mêmes nombres, considérés comme exprimant des unités. Il résulte, de ces réflexions, la règle générale qui suit: deux nombres décimaux, étant à diviser l'un par l'autre, il faut, avant cette opération, rendre le nombre des décimales, le même dans le dividende & le diviseur, par le moyen de zéros mis à la suite & sur la droite de celui des deux nombres, qui a le moins de chiffres décimaux. Ensuite on les divise l'un par l'autre, comme s'ils exprimoient des

unités entières, c'est-à-dire, sans avoir égard à la virgule, puisqu'alors, ils sont tous deux de même dénomination; & le quotient qui résulte de l'opération, exprime exactement combien de fois le nombre décimal proposé pour dividende, contient le nombre décimal qui est diviseur.

38. Soit, par exemple, proposé de connoître, combien on pourroit acheter de brasses de cordage pour la somme de  $1200^1, 2$  à raison de  $3^1, 389$  la brasse; la solution consiste à trouver, combien de fois le premier nombre de livres contient le second, parce que le quotient est nécessairement le nombre cherché des brasses de cordage. Les deux nombres proposés expriment, l'un, 12002 dixièmes de livres, & l'autre, 3389 millièmes de livres; & dans cet état, ils ne peuvent être comparés de manière, à pouvoir juger du nombre de fois que le deuxième est contenu dans le premier, puisqu'ils expriment des parties d'unité qui ne sont pas de même grandeur. Il faut donc, pour exécuter cette division, réduire l'un de ces nombres en parties de même espèce que celles de l'autre nombre; c'est-à-dire, qu'il faut transformer 12002 dixièmes en millièmes. Le dividende, sans changer de valeur, devient alors 1200200 millièmes; & il doit être divisé par 3389 millièmes; Comme ces millièmes (3) doivent se contenir autant de fois que 1200200 unités renferment 3389 unités, le quotient cherché, doit être le même que celui qui résulte de la division de ces deux derniers nombres; & ce quotient, déterminé suivant les règles ordinaires (18), est  $354 \frac{494}{3389}$ ; ou, -en réduisant la fraction en décimales (30), il est 354,146 (à un millième près). Ainsi le nombre des brasses de cordage, qui peuvent être achetées pour la somme de  $1200^1, 2$  à raison de 3,389 la brasse, est 354,146.

39. Jusqu'ici, en considérant des décimales, nous n'avons traité que des fractions particulières; & comme toutes les fractions ne sont pas susceptibles d'être réduites complètement en décimales, il devient nécessaire d'exposer aussi, comment on doit opérer, sur les fractions qui sont présentées sous leur forme générale;

ou qui ont un numérateur & un dénominateur; lorsqu'il est question de chercher, ou leur somme, ou leur différence, ou leur produit, ou leur quotient. Soit proposé d'ajouter ensemble deux fractions, telles que  $\frac{2}{9}$  &  $\frac{5}{9}$  de toise. Puisque l'une exprime le 9.<sup>e</sup> de deux toises ou les deux neuvièmes d'une toise, & l'autre les cinq neuvièmes de cette toise; ce sont alors des neuvièmes d'une même unité à réunir, & ces parties qui composent les deux fractions, sont au nombre de 7; par conséquent la somme qui, nécessairement doit être des 9.<sup>es</sup>, est évidemment  $\frac{7}{9}$  de toise. Dans cette nouvelle fraction le numérateur est la somme des numérateurs des deux fractions proposées, & elle a leur dénominateur commun; ainsi cette considération conduit à la règle générale qui suit. La somme de deux fractions qui ont un même dénominateur, est celle de leurs numérateurs, divisée par le dénominateur commun.

40. Si deux fractions dont on cherche la somme n'ont pas un même dénominateur, & si les fractions sont telles que  $\frac{21}{8}$  &  $\frac{31}{5}$ ; l'un exprime des 8.<sup>es</sup> d'une livre & l'autre des 5.<sup>es</sup> de cette livre. Or ces dernières parties étant plus grandes que les 1.<sup>res</sup>, ne peuvent pas plus être réunies en une seule & même somme, qu'on ne peut ajouter ensemble des toises & des pieds; par conséquent il faut, avant de procéder à l'addition de ces fractions, les transformer en deux autres qui leur soient égales en valeur, chacune à chacune; & qui soient l'une & l'autre composées de parties égales de la livre. Cette transformation devient facile, après ce qui a été démontré précédemment (25); & elle se fait en multipliant les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre. Cette opération donne, pour résultat, deux nouvelles fractions égales aux proposées, & ayant pour dénominateur commun, le produit des dénominateurs des deux premières fractions. C'est ainsi que la première des proposées qui étoit  $\frac{21}{8}$ , devient  $\frac{35}{40}$ , & l'autre se change en  $\frac{24}{40}$ . Dans cet état, & raisonnant, comme on a fait plus haut, (39) la somme des fractions pro-

posées est  $\frac{52}{40}$  de livres. De là on conclut la règle suivante : deux ou plusieurs fractions doivent-elles être ajoutées ensemble ; il faut préalablement les réduire au même dénominateur, si elles ne le sont pas (en multipliant les deux termes de chacune par le produit de tous les dénominateurs des autres fractions) ; ensuite on trouve leur somme totale, en formant celle de tous les numérateurs des nouvelles fractions, & en divisant cette dernière par le dénominateur commun.

41. Remarquons que la quantité résultante de l'addition des deux fractions proposées, est  $\frac{52}{40}$  de liv. & que cette quantité n'est pas une fraction ordinaire, puis que le numérateur est plus grand que le dénominateur. C'est pourquoi la division qui est indiquée, doit être exécutée, & le quotient est 1 livre  $\frac{12}{40}$ . On pourroit dire aussi que  $\frac{40}{40}$  de livre suffisant pour former une livre ; la quantité  $\frac{52}{40}$ , renferme une liv. &  $\frac{12}{40}$  de livre. Ces réflexions conduisent ainsi à cette règle générale, savoir : que pour extraire d'une quantité fractionnaire, les unités entières qui peuvent y être contenues, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, suivant les règles ordinaires de la division des nombres entiers. Ajoutons encore à cette règle celle qui a pour objet de simplifier une fraction, ou de rendre aussi petits, qu'il est possible les deux termes dont elle est composée. Cette nouvelle règle est fondée sur ce qu'on peut, sans changer la valeur d'une fraction, diviser ses deux termes par un même nombre quelconque. C'est pourquoi, si ces deux termes ont un facteur commun (comme 3 dans la fraction  $\frac{3}{3}$ ) ce facteur peut servir à les diviser exactement l'un & l'autre, & les réduire par conséquent à une expression plus simple. De tels facteurs ne se présentent pas toujours à la première inspection, & il est un moyen de déterminer entre tous ces facteurs celui qui est le plus grand, & qui par conséquent peut simplifier, autant qu'il est possible, une fraction, donnée. Il consiste à diviser le dénominateur de cette dernière par son numérateur ; ensuite s'il y a un reste, on



divise le numérateur par ce premier reste ; s'il y a un deuxième reste, on le prend pour diviseur du premier reste ; & ainsi successivement, on continue l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne, si la chose est possible, à obtenir, sans reste, le quotient de la division. Le dernier diviseur est alors le facteur cherché. Car la réflexion fait voir qu'il doit être diviseur exact, & de tous les restes précédens, & des deux termes de la fraction donnée. Par exemple, si on veut simplifier la fraction  $\frac{102}{438}$  ; on divise 438 par 102 & le premier reste est 30 ; on divise ensuite 102 par 30, & le reste est 12. On divise le premier reste 30, par le 2<sup>e</sup> reste 12 ; & on a un troisième reste qui est 6 ; enfin le deuxième reste 12 étant exactement divisible par 6, ce diviseur doit être commun à tous les restes, ainsi qu'aux deux termes de la fraction ; en effet, il divise exactement les nombres 12, 30, 102, & 438.

42. Si on devoit ajouter une fraction d'unité avec un nombre de pareilles unités entières, comme, par exemple,  $5^1$  avec  $\frac{3}{8}^1$ . La règle qu'il faut suivre dans ce cas particulier, est une conséquence de la règle générale démontrée précédemment. Car  $5^1$  sont la même chose que  $\frac{5}{1}$  ; ainsi, considérant ce nombre entier sous une forme fractionnaire ; la somme, de cette quantité ajoutée avec  $\frac{3}{8}^1$  doit être cherchée comme celle de deux fractions ordinaires ; c'est-à-dire, qu'on doit les réduire au même dénominateur, former une somme de leurs numérateurs, & diviser cette somme par le dénominateur commun. Le résultat de cette opération est alors la somme des deux quantités proposées, c'est-à-dire, que  $5^1$  étant transformées en  $\frac{40}{8}$ , & ajoutées à  $\frac{3}{8}$  donnent  $\frac{43}{8}^1$  ; & cette somme équivaut toujours à  $5^1 \frac{3}{8}$ . Ainsi, l'opération ne produit de changement que dans la forme du nombre proposé.

43. On sent aisément que les réflexions précédentes s'appliquent également à la soustraction des fractions ; car pour chercher leur somme ou leur différence, il faut toujours que les parties, dont elles sont composées, soient toutes d'une même espèce. Voici donc la règle

générale qu'il faut suivre pour faire cette opération sur deux fractions. on doit les réduire au même dénominateur, si elles ne le sont pas; ensuite retrancher les numérateurs l'un de l'autre; diviser le reste par le dénominateur commun; & le résultat de cette opération est la différence des deux fractions proposées. C'est ainsi que la différence de  $\frac{3}{8}$  à  $\frac{5}{9}$ , ne peut être déterminée qu'en transformant ces fractions, la première en  $\frac{27}{72}$ , & la deuxième en  $\frac{40}{72}$ ; & on la trouve alors de  $\frac{13}{72}$  si de  $2\frac{3}{8}$ , on se propose de retrancher  $\frac{5}{9}$  de toise, alors les fractions, qu'il faut commencer par soustraire l'une de l'autre, n'ayant pas un même dénominateur, doivent y être réduites. Elles deviennent des 72<sup>es</sup> de la toise, & pour exécuter la soustraction, comme  $\frac{40}{72}$  ne peuvent être retranchés de  $\frac{27}{72}$ , on emprunte une toise sur le nombre 2, on la convertit en  $\frac{72}{72}$ , on l'ajoute à  $\frac{27}{72}$ , & de la somme  $\frac{99}{72}$  retranchant  $\frac{40}{72}$ , la différence des quantités proposées est  $1\frac{59}{72}$ .

44. Cherche-t-on le produit de deux fractions quelconques; le raisonnement conduit aisément à la règle générale qui sert à diriger cette opération. Soit la fraction  $\frac{3}{8}$  à multiplier par  $\frac{5}{7}$ . Si le multiplicateur qui est ici composé de cinq unités à diviser par 7, s'exprimoit que cinq unités, il indiqueroit qu'il faut répéter 5 fois le multiplicande; mais le 7.<sup>e</sup> de cinq unités est sept fois plus petit que ces mêmes cinq unités; par conséquent le produit de  $\frac{3}{8}$  par  $\frac{5}{7}$ , doit être sept fois plus petit que celui de  $\frac{3}{8}$  multipliés par par 5. Ce dernier produit est  $\frac{15}{8}$ , & le 7.<sup>e</sup> de celui-ci est  $\frac{15}{56}$  (puisque'on (25) rend une fraction, cinq fois plus grande, en multipliant son numérateur, seul par 5; & sept fois plus petite en multipliant son dénominateur seul par 7); par conséquent le produit de  $\frac{3}{8}$  multiplié par  $\frac{5}{7}$  est  $\frac{15}{56}$ . remarquons dans cette fraction résultante, que le numérateur est le produit des numérateurs des deux fractions proposées; & que le dénominateur est le produit des dénominateurs des mêmes fractions. C'est pourquoi on peut établir pour règle générale que le produit de deux fractions; est une fraction, dont

on trouve le numérateur, en multipliant l'un par l'autre les numérateurs des fractions proposées, & dont le dénominateur est le produit des dénominateurs de ces mêmes fractions.

45. Si un nombre entier doit être multiplié par une fraction, ou réciproquement; la règle qui vient d'être démontrée, est encore applicable à la recherche de ce produit. Car le nombre entier peut être présenté sous une forme fractionnaire, en lui donnant 1 pour dénominateur; & alors la multiplication doit être faite comme celle de deux fractions. Soit par exemple,  $30^e$  à multiplier par  $\frac{4}{9}$ . On doit se proposer de trouver le produit de  $\frac{30^e}{1}$  par  $\frac{4}{9}$ . Il est  $\frac{120^e}{9}$  suivant la règle de la multiplication des fractions, & le produit simplifié devient  $13^e \frac{1}{3}$ . Si plusieurs fractions doivent concourir à former un seul produit; alors on multiplie tous leurs numérateurs ensemble, pour trouver le numérateur de la fraction qui est le produit cherché; & le dénominateur de cette dernière fraction, est le résultat de la multiplication des dénominateurs de toutes les fractions proposées. Si on avoit à multiplier un nombre entier joint à une fraction, par un autre nombre, composé aussi d'unités entières & de fractions; les règles démontrées précédemment, suffisent pour une telle opération: parce que, dans le cours d'une pareille multiplication, il faut multiplier, ou un nombre entier par une fraction, ou une fraction par une fraction; & on a déjà dit comment on doit opérer dans tous ces cas.

46. Diviser une fraction par une autre, c'est chercher combien de fois la première contient la seconde; & par cette seule considération, on doit juger que toutes deux doivent exprimer des quantités de même espèce, ou des parties égales d'une même unité. On peut chercher aussi par la division, une quantité, qui soit contenue dans la fraction dividende, autant de fois que l'indique la fraction diviseur, comme on l'a déjà dit en parlant de la division des nombres entiers; (16) mais comme la division proposée sous ce der-

nier rapport, se réduit toujours à la division ordinaire des quantités qu sont d'une même espece ; il doit suffire ici de dire comment on trouve, combien de fois une fraction en contient une autre. Si, dans ce sens, on doit diviser  $\frac{5}{8}$  par  $\frac{3}{8}$  de livre, la premiere fraction doit contenir la seconde autant de fois que 5 unités contiennent 3 unités, ( comme on l'a déjà dit (37) ) ; ainsi le quotient cherché est nécessairement  $\frac{5}{3}$  ou  $1\frac{2}{3}$  ; c'est-à-dire, que la premiere contient la seconde une fois &  $\frac{2}{3}$  de fois. Si  $\frac{5}{6}$  de toise sont à diviser par  $\frac{7}{8}$  ; comme les parties de l'unité exprimées par la premiere fraction, ne sont pas de même grandeur que les parties d'unité qui composent la seconde fraction ; on ne peut juger combien de fois l'une de ces fractions doit contenir l'autre. Il faut, pour trouver le quotient cherché, les reduire toutes deux au même dénominateur, & ces fractions transformées, deviennent  $\frac{40}{48}$  &  $\frac{42}{48}$  ; alors dans cet état, le quotient doit être comme on l'a démontré plus haut  $\frac{40}{42}$  ; parce que ces 48.<sup>es</sup> de l'unité, se contiennent autant de fois que 40 unités contiennent 42 unités. Remarquons actuellement que ce résultat  $\frac{40}{42}$ , a pour numérateur, le produit du numérateur de la fraction dividende, par le dénominateur de la fraction diviseur ; & pour dénominateur, le produit du dénominateur de la premiere fraction, par le numérateur de la seconde ; c'est-à-dire, qu'il est le produit de la fraction dividende par la fraction diviseur renversée, ou de  $\frac{5}{6}$  multipliés par  $\frac{8}{7}$ . Le même raisonnement peut être appliqué à la recherche du quotient de la division de toutes sortes de fractions : ainsi on peut établir pour regle générale, qu'on trouve le quotient de la division de deux fractions, en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée. On seroit parvenu au même résultat, en raisonnant de cette autre maniere ; la fraction dividende doit contenir la fraction diviseur, huit fois autant qu'elle contient 7 unités : il faut donc d'abord la diviser par 7, ce qui se fait en multipliant par 7, le dénominateur 8 de la fraction dividende ; & ensuite il faut répéter huit fois ce quotient trouvé, ou multiplier par 8 le numérateur de la fraction divi-

dende. Le quotient de la division ainsi motivé auroit encore été, comme précédemment,  $\frac{40}{40}$ ; fraction qui se réduit  $\frac{20}{20}$ .

47. Cette règle s'étend à la division d'un nombre entier par une fraction; & à celle d'une fraction, par un nombre entier. Il suffit, pour démontrer qu'elle est applicable dans ces cas, de rappeler qu'un nombre entier peut toujours être présenté sous une forme fractionnaire, en lui donnant 1 pour dénominateur. Soient, par exemple 3<sup>e</sup> à diviser par  $\frac{5}{6}$ ; le dividende peut recevoir cette forme  $\frac{3}{1}$ ; ensuite, le diviseur étant renversé, & multiplié par le dividende, le produit  $\frac{18}{5}$  ou  $3\frac{3}{5}$  est le quotient cherché. Remarquons ici que, si le dividende eut été  $\frac{5}{6}$ , & le diviseur 3, le quotient auroit été le produit de  $\frac{5}{6}$  par  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{5}{18}$ ; résultat bien différent de celui qu'on a obtenu précédemment. Une telle différence doit faire sentir combien il est important de juger, par l'état d'une question, dont la solution dépend d'une division, quelle est la quantité qui doit être employée comme dividende.

48. Si deux nombres, qui expriment chacun, & des unités entières, & des fractions d'unité, doivent être divisés l'un par l'autre; cette division est encore dirigée par les règles de la division des fractions. Mais la facilité de leur application, dans ce cas particulier, exige une opération préalable. Soit, par exemple  $25\frac{3}{8}$  à diviser par  $12\frac{2}{5}$ , on a vu que, pour diviser 2 fractions l'une par l'autre, il faut multiplier la fraction dividende, par la fraction diviseur renversée. C'est pourquoi, on ne peut appliquer cette règle à la solution de la question présente, ainsi qu'à celle de toutes les questions semblables, qu'en donnant au diviseur proposé, une forme fractionnaire. Les douze unités doivent donc être ajoutées aux  $\frac{2}{5}$ , ou réduites en cinquièmes, & cette somme est de  $\frac{62}{5}$ . Après une telle préparation du diviseur, & pour exécuter la division demandée, il faut multiplier le dividende par  $\frac{5}{62}$ ; c'est-à-dire, qu'on doit multiplier 25<sup>e</sup>  $\frac{3}{8}$  par 5, & diviser le produit par 62. On pourroit, sans doute, pour rendre l'opération parfaitement semblable à la division des fractions, réduire aussi le dividende proposé en huitièmes, & le mettre ainsi sous

une forme fractionnaire; mais cette transformation devient superflue ou peu nécessaire, parce qu'on fait multiplier & diviser, par un nombre entier, un nombre tel que  $25\frac{3}{8}$ . Enfin la division exécutée fait connoître pour quotient  $2\frac{23}{496}$ ; c'est-à-dire, que le dividende proposé contient le diviseur donné, 2 fois &  $\frac{23}{496}$ <sup>e</sup> de fois, ou en réduisant la fraction en décimales, le quotient est 2,0464.

49. *Des nombres complexes.* En réunissant tout ce qui a été dit précédemment, & sur les nombres entiers, & sur ceux-ci joints à des fractions quelconques, & sur des fractions isolées; il sembleroit qu'il n'est plus aucune règle à ajouter, pour diriger les opérations principales de l'addition, de la soustraction, de la multiplication & de la division, des nombres quels qu'ils puissent être. Cependant, pour embrasser tous les cas qui peuvent se présenter, il reste encore à appliquer les mêmes principes, aux calculs des nombres complexes, c'est-à-dire, de ceux qui expriment des unités, jointes à des subdivisions de ces unités, lorsque ces parties, désignées par des dénominations particulières, n'ont pas une forme fractionnaire. Au rang de ces nombres sont ceux qui sont composés, ou de toises, de pieds & de pouces; ou de livres, de sols & de deniers; ou de jours, d'heures & de minutes &c.

50. L'addition des nombres complexes est fondée & doit être exécutée comme l'addition des nombres simples. Ces derniers renferment des unités, des dizaines, des centaines &c., qui peuvent être regardées comme autant d'unités de diverse espece; & comme n'étant susceptibles d'être ajoutées ensemble; que parce qu'elles ont des rapports entre elles, ou parce qu'elles se composent les unes des autres; de même, les nombres nommés complexes, expriment des unités de diverse grandeur, qui se composent aussi les unes des autres. C'est pourquoi, ces derniers nombres peuvent être ajoutés ensemble, en se conformant aux procédés indiqués précédemment. Le même principe qui prescrit de commencer l'addition des nombres simples, par celle des unités de la classe inférieure; démontre aussi,

que l'addition des nombres complexes doit être exécutée dans le même ordre. Ainsi il faut, après avoir ajouté des parties d'unités comprises dans un nombre complexe, écrire leur somme sous la même colonne, si leur nombre ne suffit pas pour former une ou plusieurs unités d'une grandeur supérieure. Ensuite, en se conformant aux autres règles de l'addition, qui conduisent directement à la somme de plusieurs nombres simples, on parvient aussi à la somme totale de plusieurs nombres complexes. Un exemple va servir à développer ces idées. Veut-on savoir combien, dans un vaisseau, on a embarqué de tonneaux, de quintaux & de livres; après y avoir chargé 1.<sup>o</sup> 528<sup>t</sup> 129 56<sup>l</sup>; 2.<sup>o</sup> 336<sup>t</sup> 189 34<sup>l</sup>; & 3.<sup>o</sup> 108<sup>t</sup> 09 91<sup>l</sup> [ le tonneau vaut 2000 l. ou 209, & le quintal vaut 100<sup>l</sup>. On voit qu'il faut ajouter ensemble les trois poids donnés; & ils peuvent être réunis, puisqu'ils n'expriment que des quantités de même espèce, ou qui ont entre elles des rapports connus & fixes. Après avoir placé ces nombres les uns au-dessous des autres, de manière que les tonneaux se correspondent, ainsi que les quintaux & les livres, on ajoute les unités de l. Celles-ci forment une somme de 11<sup>l</sup>, ou une dizaine de l. & 1<sup>l</sup>. Cette livre indiquée par 528<sup>t</sup> 129 56<sup>l</sup> 1, doit être placée sous la colonne 336 18 34 des unités de l., & la dizaine doit 108 0 91 être réservée pour être ajoutée aux dixaines de l, qui sont dans la colonne 973<sup>t</sup> 119 81<sup>l</sup> suivante. La somme de ces dixaines est 18, elle vaut un quintal, plus 8 dixaines. On écrit 8 sous la colonne des dixaines de livres; & le quintal réservé, étant ajouté aux autres quintaux, il en résulte une somme de 31 quintaux, ou d'un tonneau & de 119; ceux-ci étant écrits sous la colonne des quintaux, on ajoute ensemble les tonneaux qui se trouvent être au nombre de 973. La somme totale de ces 3 nombres complexes est donc de 973<sup>t</sup> 119 81<sup>l</sup>; & c'est celle des poids qui ont été embarqués dans le vaisseau. Cette opération, comme on voit, n'a exigé, pour être exécutée, aucun principe nouveau, ou différent de ceux

qui servent de base à l'addition des autres nombres ; ainsi il y a la plus grande uniformité dans l'addition des nombres simples & dans celle des nombres complexes.

51. La soustraction des nombres complexes doit aussi être assimilée à celle des nombres entiers ; & la ressemblance est , sans doute , assez sentie , pour dispenser de répétitions qui deviennent superflues. Un exemple particulier suffira d'ailleurs pour la confirmer.

On veut savoir quelle est la différence des profondeurs de l'eau , dans deux points de la mer , où ces mesures ont été prises. L'une de ces profondeurs est de 92 br. 3 pieds 7 pouces ; & la seconde de 58 br. 4 pieds 11 pouces ( l'unité principale est ici la brasse qui vaut cinq pieds. ). Il faut pour les soustraire l'une de l'autre , écrire la plus grande au-dessus de la

92 <sup>br</sup>	3 <sup>p</sup>	7 <sup>b</sup>
58	4	11

plus petite , & commencer l'opération par les plus petites parties de l'unité , qui sont ici des pouces. On ne peut de 7 pouces en retrancher 11 , c'est pourquoi on emprunte un pied ou 12 pouces à la colonne des pieds ; on les ajoute avec 7 ; & alors , leur différence avec 11 , est 8 pouces ; de même , 4 pieds ne pouvant être soustraits de 3 , on emprunte une brasse qui vaut 5 pieds ; & de ce nombre de pieds réuni à 2 , si on en retranche 4 , le reste est 3 pieds. Enfin , la différence des nombres de brasses est 33 ; par conséquent , la différence 33 brasses 3 pieds 8 pouces est celle des brassiages , ou celle des profondeurs de l'eau ; qui ont été mesurées dans deux divers points de la mer.

52. Les nombres complexes n'étant , comme on l'a dit , composés que d'unités & de parties d'unités , leur multiplication se réduit aisément à celle des fractions. Il faut alors convertir les unités , & leurs parties plus ou moins grandes , en parties de la dernière classe ; on donne ensuite aux sommes qui représentent ces nombres , un dénominateur propre à exprimer le nombre des parties de cette dernière classe , qui composent l'unité principale. Par ce moyen , les nombres com-



plexes font changés en fractions de leur unité principale. Par exemple : veut-on savoir combien valent 24 milliers & 8 quintaux de sucre, à raison de 1352<sup>l</sup> 12<sup>s</sup> 5<sup>d</sup> le millier ; il faut répéter cette dernière somme autant de fois que le premier nombre l'indique. Si, pour trouver le résultat, on emploie les regles déjà enseignées pour la multiplication des fractions, il faut réduire les deux facteurs, l'un en quintaux, & l'autre en deniers. Le premier vaut 248 quintaux ou  $\frac{248}{10}$  de millier ; & le deuxième est de 324629 deniers, ou de  $\frac{324629}{240}$  de livre ; (parce que chaque quintal est le 10<sup>e</sup> d'un millier, & un denier la 240<sup>e</sup> partie de la l.). Le produit de ces deux fractions est celui qui est cherché ; & en divisant le numérateur de ce produit par son dénominateur, on connoit le nombre de l. de f. & de d. que peut valoir la quantité donnée de sucre. Cette méthode est simple dans ses principes, mais laborieuse dans l'exécution. Ainsi, il est à propos d'en indiquer une seconde qui est fondée sur des principes déjà présentés, & qui est très-facile à employer. On la nomme méthode de multiplication par parties aliquotes. Elle consiste à déduire certains produits, ou de ceux déjà obtenus, ou de produits supposés ; & son application à l'exemple proposé suffira pour la développer complètement.

53. La question exige que 132<sup>l</sup> 1352<sup>l</sup> 12<sup>s</sup> 5<sup>d</sup>  
12<sup>s</sup> 5<sup>d</sup> soient répétés autant de  
fois & de parties de fois, qu'il  
y a de milliers & de parties de  
milliers, dans 24<sup>m</sup> 89, c'est-à-  
dire, 24 fois & 8 dixiemes de fois.

On écrit les deux facteurs, en  
conservant aux parties d'unités ;  
du multiplicateur (quoique confi-  
déré comme nombre abstrait) leur  
dénominations distinctives, parce  
qu'elles indiquent des rapports  
avec l'unité principale ; & on  
multiplie ensuite (comme on l'a  
dit souvent ailleurs) tout le mul-

132 <sup>l</sup>	1352 <sup>l</sup>	12 <sup>s</sup>	5 <sup>d</sup>	
	24 <sup>m</sup>	89		
<hr/>				
5408 <sup>l</sup>	0 <sup>s</sup>	0 <sup>d</sup>		
2704				
12				
2	8			
0	8			
0	2			
676	6	2	$\frac{8}{2}$	
270	10	5	$\frac{4}{5}$	
135	5	2	$\frac{9}{10}$	
<hr/>				
33544 <sup>l</sup>	19 <sup>s</sup>	11 <sup>d</sup>	$\frac{1}{8}$	

tiplicande par chaque partie du multiplicateur. La seule différence qui subsiste entre la multiplication des nombres entiers, & celle des nombres complexes, c'est que celle-ci doit commencer par les unités principales des deux facteurs; Et cette règle est fondée sur ce que les résultats de la multiplication des parties de l'unité par un multiplicateur donné, sont conclus des produits de la multiplication de l'unité principale, par le même multiplicateur. Après cette explication, procédons à déterminer le produit demandé. Il faut multiplier 1352<sup>l</sup> par 24 ou les répéter 24 fois; ce qui donne, par les règles ordinaires, un nombre de livres. Ensuite on doit répéter 24 fois 12<sup>s</sup>; & on trouve le produit par le raisonnement suivant, qui est la base de cette méthode de multiplication. On partage 12<sup>s</sup> en parties aliquotes de la liv. ou en parties qui soient contenues un nombre exact de fois dans la livre. (en général les parties aliquotes de 20<sup>s</sup> sont 2<sup>s</sup>, 4<sup>s</sup>, 5<sup>s</sup>, & 10<sup>s</sup>; car 36<sup>s</sup> & 7<sup>s</sup>, &c. ne sont pas renfermés exactement dans 20<sup>s</sup>). Les parties de 12<sup>s</sup> qui sont aliquotes de la livre, sont 10<sup>s</sup> & 2<sup>s</sup>; c'est pourquoi au lieu de répéter 24 fois 12<sup>s</sup>, on répète successivement, & 10<sup>s</sup>, & 2<sup>s</sup>, ce même nombre de fois. Si on suit ce procédé, c'est parce que ces produits partiels peuvent être conclus, du produit d'une livre multipliée par 24. En effet, ce dernier produit, seroit 24<sup>l</sup> & par conséquent celui de 10<sup>s</sup> multipliés par 24, doit en être la moitié, ou de 12<sup>l</sup>, puisque 10<sup>s</sup> sont la moitié de la livre. Par une raison semblable, le produit de 2 par 24<sup>s</sup>, doit être 5 fois plus petit que 12<sup>l</sup>: il est donc 2<sup>l</sup> 8<sup>s</sup>; enfin on décompose 5 deniers en 4<sup>d</sup> & 1<sup>d</sup>, parce que 5<sup>d</sup> ne sont pas exactement contenus dans 2<sup>s</sup> & parce que le produit de 2<sup>s</sup> par 24 doit servir à déterminer celui de 5<sup>d</sup> par le même nombre. Le produit de 2<sup>s</sup> par 24, étant de 2<sup>l</sup> 8<sup>s</sup>, celui de 4<sup>d</sup> par 24 doit en être le 6<sup>e</sup>; ainsi, il est 8<sup>s</sup>. Enfin celui de 1<sup>d</sup> par 24, doit être le quart du dernier produit, c'est-à-dire, qu'il est 2<sup>s</sup>. par le moyen de ces opérations successives, le multiplicande entier est répété 24. fois; & maintenant il faut le multiplier par 8 quinaux, ou le répéter 8 dixiemes de fois. Le procédé qu'il faut

suivre

suivre dans cette nouvelle opération, est encore fondé sur le même raisonnement. Le multiplicande entier étant multiplié par un millier, ou étant répété une fois, resteroit de la même grandeur ; mais d'un tel produit  $1352^1 12^s 5^d$ , on ne peut conclure celui du même multiplicande multiplié par 8 quintaux, parce que le nombre 8 n'est pas une partie aliquote de 10. On doit donc, comme précédemment, décomposer ces 8 quintaux en parties aliquotes du millier, c'est-à-dire, en 5, 2 & 1 ; & multiplier successivement le multiplicande, par 5 quintaux, par 2 & par 1. Le produit du multiplicande multiplié par 5 quintaux, doit être la moitié de celui du même facteur par un millier ; il est donc la moitié de  $1352^1 12^s 5^d$  ou  $676^1 6^s 2^d \frac{1}{2}$ . Comme 2 quintaux sont le  $5^e$  d'un millier, le produit du multiplicande multiplié par ces 2 quintaux, doit être le  $5^e$  de ce même multiplicande, ou  $207^1 10^s 5^d \frac{4}{5}$  ; & enfin ce dernier produit doit être le double de celui du multiplicande multiplié par un quintal : par conséquent, celui-ci est  $415^1 5^s 2^d \frac{2}{5}$ . C'est ainsi que le multiplicande entier se trouve, après ces opérations, être multiplié successivement par toutes les parties du multiplicateur ; & en ajoutant les produits partiels qui ont été placés avec ordre les uns au-dessous des autres, à mesure qu'ils ont été déterminés ; leur somme totale devient le produit cherché : c'est-à-dire, que le sucre proposé doit coûter  $33544^1 19^s 11^d \frac{1}{2}$ . Un tel exemple aussi détaillé suffit pour faire connoître comment il faut faire la multiplication ; soit lorsque le multiplicande est incomplexe, & le multiplicateur complexe ; soit lorsque celui-ci est incomplexe, & le premier complexe ; soit enfin lorsque les deux facteurs sont complexes. Dans tous ces cas, la méthode est uniforme, & semblable à celle qui a été suivie dans l'opération précédente.

54. S'il est question de diviser deux nombres complexes l'un par l'autre ; on se propose, comme on l'a dit ailleurs, de chercher, ou combien de fois un nombre en contient un autre de même espèce ; ou quel est le nombre qui est contenu un nombre de

fois déterminé dans un dividende donné. Ces deux cas doivent être soigneusement distingués, & la question proposée sert toujours à indiquer l'un ou l'autre avec évidence. S'il faut chercher combien de fois un nombre complexe contient un autre nombre complexe; le dividende & le diviseur doivent nécessairement être d'une même espèce, & alors on réduit les deux nombres proposés en parties d'unité d'une même classe. Par exemple, si le dividende & le diviseur expriment, l'un des toises, des pieds & des pouces; & l'autre des toises & des pieds, ils doivent tous deux être réduits en pouces. La division consiste, après cette opération préalable, à chercher combien de fois un nombre de pouces, est contenu dans un autre nombre de pouces; & le quotient doit être déterminé, comme si ces nombres de pouces étoient des nombres d'unités principales (37). Par exemple, une somme de  $4783^1 3^f 9^d$  a été partagée également entre tous les matelots d'un vaisseau; chacun a reçu  $54^1 19^s 7^d$ , & on demande quel devoit être le nombre des copartageans. Cette question doit être résolue, en divisant la somme partagée, par la part de chaque matelot. Le dividende & le diviseur sont de même espèce, & tous deux ils renferment, soit des unités principales, soit des parties d'unité de diverse dénomination. Si on les réduit l'un & l'autre en deniers, tout consiste à chercher combien de fois  $54^1 19^s 7^d$  ou  $13195^d$ , sont contenus dans  $1147965$  deniers qui équivalent à  $4783^1 3^f 9^d$ . mais deux nombres de deniers, se contiennent autant de fois que deux nombres pareils de livres, ou d'unités quelconques; on doit donc faire la division indiquée, comme si les 2 nombres de deniers, étoient autant de livres; & le quotient est 87: c'est-à-dire, que les gens de l'équipage devoient être au nombre de 87.

55. Si le dividende & le diviseur ne sont pas de de même espèce, ou si on cherche, dans un dividende complexe, quel est le nombre qu'il contient autant de fois que le diviseur l'indique; il faut que ce diviseur exprime nettement, ce nombre de fois qui est toujours marqué nécessairement par le nombre de ses uni-

tés. Si le diviseur proposé est un nombre entier ; l'opération est sans difficulté. Il suffit alors de diviser chaque partie du dividende, par le nombre entier qui sert de diviseur (23) ; & le quotient est de même espèce que le dividende. Si le diviseur est un nombre complexe, & d'une espèce différente de celle des unités du dividende ; ses unités principales, ainsi que les fractions différentes d'unité qu'il renferme doivent être réunies ensemble, pour ne composer qu'une seule & même fraction, ou quantité fractionnaire ; parce qu'alors, sous cette nouvelle forme, le diviseur indique, que le quotient cherché doit être contenu dans le dividende, autant de fois qu'il y a d'unités, dans cette quantité fractionnaire. Par cette préparation préalable, le diviseur cesse d'avoir la forme d'un nombre complexe, & l'opération est réduite à diviser le dividende par une fraction diviseur. C'est pourquoi, conformément aux règles déjà données pour la division des fractions, il faut renverser la fraction diviseur ; ensuite multiplier le dividende par le numérateur de cette fraction ; & diviser enfin le dernier produit par son dénominateur, pour parvenir au quotient cherché. L'exemple suivant va rendre palpables, & ces réflexions, & les règles qui en sont les conséquences.

Supposons qu'on ait apporté, au départ d'un bâtiment, un retard de 12 jours 5 heures ; l'indemnité demandée est de 564<sup>l</sup> 15<sup>s</sup> 8<sup>d</sup>, & on voudroit savoir combien il en coûte par chaque jour de retardement. La somme cherchée doit être contenue dans 564<sup>l</sup> 15 sous 8 deniers, autant de fois qu'il y a de jours dans 12 jours 5 heures. C'est pourquoi il faut diviser la somme donnée par le nombre de jours, puisque le diviseur est composé de jours, & de parties de jour si on fait disparaître la séparation des unités principales, & de leur parties, en les ajoutant ensemble ; le nombre de jours, exprimé par le diviseur ( qui contient 293 heures ), est indiqué par la quantité fractionnaire  $\frac{293}{24}$ , parce que, pour trouver le nombre de jours, que peuvent former 293 heures, il faut diviser ce dernier nombre par 24. Le diviseur étant ainsi transformé, il faut procéder, à

diviser le dividende par cette fraction ; c'est-à-dire , à la multiplier par la même fraction renversée. Il faut donc le multiplier par 24, & diviser ce produit par 293. Ce produit, dont les parties sont détaillées ci-contre , est de  $13554^1 16^s$  ; & ce nombre étant partagé en 293 parties, on divise par 293, chaque partie est de  $46^1 5^s 2^d \frac{266}{293}$ , c'est-à-dire, que cette dernière somme est l'indemnité payée pour chaque jour supposé du retard apporté au départ du bâtiment. La dernière partie de cette opération est

$$\begin{array}{r}
 564^1 15^s 8^d \mid \frac{293}{24} \\
 \hline
 2256^1 0^s 0^d \mid 46^1 5^s 2^d \frac{266}{293} \\
 1128 \\
 12 \\
 6 \\
 0 \quad 16 \\
 \hline
 13554^1 16^s 0^d \\
 1834 \\
 76 \\
 \hline
 1536 \\
 71 \\
 \hline
 852 \\
 266
 \end{array}$$

un modèle de la division d'un nombre complexe par un diviseur qui ne l'est pas ; puisqu'on a divisé le dividende par le nombre entier 293. C'est pourquoi, l'exemple qui vient d'être présenté, embrasse ce dernier cas de la division des nombres complexes ; & le procédé motivé qui a été suivi pour arriver au dernier résultat, indique quelle est la véritable marche qu'il faut tenir pour trouver la solution de questions semblables.

56. Si on réfléchit sur l'usage de toutes les règles précédentes d'addition, de soustraction, de multiplication & de division ; on ne peut douter qu'elles ne soient très-nécessaires & très-utiles à l'homme de mer. Elles lui offrent tous les moyens propres à le conduire à de nombreux résultats qu'il est souvent contraint de chercher, en exerçant l'art de la marine. Elles servent, comme on le verra, aux calculs, de la capacité d'un vaisseau, de son déplacement, de sa stabilité, de la surface de ses lignes d'eau, de la résistance que l'eau oppose à sa marche, de l'étendue de ses voiles, &c. Elles sont employées dans le calcul, du lest, des approvisionnements, des munitions de guerre, des rations, des soldes des gens de mer, des parts de

prises, &c. On en fait le plus grand usage dans la navigation, pour trouver les résultats, ou des relevemens, ou de l'estime, ou de toutes les observations astronomiques qui servent à déterminer, soit le temps, soit la variation de l'aiguille aimantée, soit la latitude & la longitude d'un vaisseau, &c. Entre toutes les questions de marine qui peuvent se présenter, il en est, sans doute, dont la solution est facilement conclue des regles du calcul des nombres; mais il en est d'autres qu'on ne pourroit résoudre qu'avec des difficultés, qui disparoissent, en employant une méthode plus générale, & en appliquant sous une forme plus vaste, les principes de l'arithmétique. Car on ne peut se dissimuler que dans les combinaisons des nombres, il n'y ait beaucoup de regles, qui dépendent absolument des chiffres adoptés pour exprimer ces mêmes nombres; & qui varieroient, si ces signes indicatifs, étoient plus ou moins multipliés, & différoient dans leurs rapports réciproques; tandis que les principes fondamentaux des calculs, sont constans, & conviennent à toutes les numérations qu'on pourroit imaginer. De telles regles, qui ne peuvent produire que de l'obscurité & de l'embarras dans de grandes combinaisons, & qui sont particulieres aux nombres qu'on est convenu d'employer dans l'arithmétique ordinaire; imposent donc la nécessité de recourir, dans certaines questions, à une méthode plus simple, qui soit moins dépendante de l'expression des quantités qu'il faut combiner, ou qui apprenne à les représenter par des signes plus universels que les nombres. Cette méthode est l'algebre. Newton lui a donné le nom d'arithmétique universelle, parce qu'elle enseigne à faire tous les calculs des quantités, sans égard à la forme sous laquelle leur valeur peut être présentée. L'utilité de cette science, la commodité de son usage, la simplicité de ses regles, & la vaste étendue des applications qu'on peut en faire; doivent, sans doute, engager tous les hommes de mer, à en faire l'objet de leurs réflexions, pour jouir au besoin des avantages qu'elle assure; & ils doivent d'autant moins redouter les difficultés de cette

étude particulière, qu'elle repose sur les mêmes principes qui servent de base à l'arithmétique ordinaire. Ce sont de tels motifs, qui m'ont porté à exposer ici les premières règles de l'algèbre, c'est-à-dire, celles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division; & qui m'engageront à ajouter successivement dans le cours de cet ouvrage, quelques autres règles utiles, ne me retenant toujours à celles-là seules qui peuvent être nécessaires aux opérations de l'art de la marine.

57. *Arithmétique universelle, ou Algèbre.* Jusqu'ici nous n'avons considéré que des quantités exprimées en nombres; & c'est dans cet état que nous avons appris à les ajouter, soustraire, multiplier & diviser. Nous avons été obligés, pour faire connoître, dans tous les cas, l'art de ces opérations, de parcourir successivement les combinaisons, d'abord des nombres entiers, ensuite de ceux qui sont fractionnaires, & enfin de ceux qui sont complexes; & les mêmes principes appliqués à ces quantités présentées sous ces diverses formes, ont fait établir des règles qui sont particulières à chaque espèce de ces nombres. Il faut maintenant nous élever de toutes ces vues isolées, à d'autres plus générales, & chercher comment, des quantités quelconques, & les règles de leurs combinaisons peuvent être présentées dans l'état le plus simple. Imaginons, à cet effet, que ces quantités soient représentées dans tous les calculs, chacune par un signe indéterminé, tel qu'une lettre quelconque de l'alphabet, *a*, *b*, *c*, *d*, &c. imaginons aussi que toutes les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication & de division, qu'on peut exécuter sur ces quantités, lorsqu'elles sont sous cette nouvelle forme, ne soient qu'indiquées seulement, & jamais exécutées. Alors les sommes, les différences, les produits & les quotients, ne seront plus, comme auparavant, des nombres particuliers dans lesquels les quantités combinées, sont mêlées entr'elles & confondues ensemble, sans pouvoir être distinguées; mais des combinaisons, telles; que les signes indicatifs de ces



quantités y paroissent toujours distincts. Par exemple : s'agit-il de multiplier 8 par 3 ? le produit, suivant les regles de l'arithmétique, est 24 ; & ce dernier nombre est tel qu'on n'y peut plus reconnoître, ni s'il résulte de la multiplication de 8 par 3, ou de 4 par 6, ou de 2 par 12, ni même celle des 4 opérations, qui a servi à le produire. Mais en algebre, où les opérations sont & restent toujours indiquées, on peut découvrir dans les résultats, non seulement les quantités qui ont été combinées, mais aussi le genre des combinaisons qu'on leur a fait faire. Cette dernière propriété qui distingue la méthode algébrique, est infiniment précieuse, pour faciliter la recherche de certains résultats. Mais ses avantages ne peuvent être bien sentis, avant d'avoir exposé, comment les opérations principales de l'arithmétique, sont exécutées en algebre, & comment on les emploie pour la solution des questions proposées ; c'est pourquoi, ces opérations vont être traitées avec toute l'étendue nécessaire.

§ 8. Si les principes déjà présentés pour fondemens des opérations de l'arithmétique, sont aussi ceux de pareilles opérations d'algebre, telles que l'addition, la soustraction, la multiplication & la division ; certaines regles ne sont pas communes à l'une & à l'autre méthode. Il en est, en arithmétique, qui dépendent du choix & des propriétés des nombres ; & en algebre, il en est de conventionnelles. Comme c'est sur ces dernières que repose la forme des opérations algébriques, je vais les faire connoître avant d'entrer dans le développement détaillé de ces mêmes opérations.

On est convenu, 1.<sup>o</sup> de représenter une quantité quelconque, par un signe général, tel qu'une lettre de toute sorte d'alphabet, ou tout autre caractère. 2.<sup>o</sup> Le signe de l'addition doit être une croix + ; c'est-à-dire, que la quantité représentée par  $b$ , devant être ajoutée à la quantité  $c$  ; il faut écrire  $c+b$  pour exprimer cette somme, en faisant précéder la quantité  $b$  du signe + qui la sépare de  $c$ , & qui indique qu'elle lui est ajoutée. 3.<sup>o</sup> Le signe de la soustraction est une petite ligne horizontale - ; &  $b$  devant être retranché de  $c$ , on doit écrire  $c-b$ , en faisant précéder la quantité  $b$  du signe moins, qui marque qu'elle doit

être retranchée de  $c$  ; ainsi la différence de ces deux quantités , est indiquée ou exprimée simplement par  $c-b$ . 4.<sup>o</sup> le signe , auquel on reconnoît que deux quantités sont multipliées l'une par l'autre , est qu'elles soient écrites l'une à côté de l'autre , sans interposition d'aucun des signes plus ou moins. Ainsi  $b$  devant être multiplié par  $c$  , leur produit est désigné ou représenté par  $bc$ . 5.<sup>o</sup> le signe qui indique que deux quantités sont divisées l'une par l'autre , consiste en ce qu'elles soient placées l'une au-dessus de l'autre , & séparées par un trait horizontal ; de manière que le dividende soit au-dessus de cette petite ligne , & le diviseur au-dessous , comme on l'a déjà vu ailleurs. Ainsi on est convenu que  $\frac{b}{c}$  exprime que  $b$  est divisé par  $c$  , ou qu'une telle fraction représente le quotient de la division de ces deux quantités. 6.<sup>o</sup> si , dans une somme donnée , une quantité se trouve être ajoutée plusieurs fois à elle-même , il faut l'écrire une seule fois , & la faire précéder d'un nombre qui marque combien de fois elle est ajoutée à elle-même. C'est ainsi qu'au lieu d'écrire  $b+b+b+b$  , comme l'indique (2.<sup>o</sup>) le procédé de l'addition algébrique ; on est convenu d'écrire  $4b$  , pour annoncer que  $b$  est répété 4 fois ; & ce nombre 4 , comme tout autre nombre qui précède une quantité algébrique , reçoit le nom de coefficient. 7.<sup>o</sup> si , dans un produit , une même quantité est deux , trois , ou quatre fois facteur ; il faut ne l'écrire qu'une seule fois dans ce produit , pour en simplifier l'expression , & mettre à côté de cette quantité , sur sa gauche , & au haut de cette même quantité (dans le lieu où une apostrophe est ordinairement placée ) , un nombre qui exprime combien de fois elle est facteur. C'est ainsi qu'au lieu d'écrire , sous cette forme , le produit  $bbbc$  , dans lequel  $b$  est trois fois facteur ; il faut écrire simplement  $b^3c$ . Ce nombre 3 placé de cette manière , à côté d'une lettre ou d'une quantité quelconque , est nommé exposant ; parce qu'il expose effectivement , combien de fois la quantité qui le précède immédiatement , est facteur , dans le produit dont elle fait partie. 8.<sup>o</sup> Enfin , une quantité algébrique doit être nommée telle , lorsqu'elle est composée ou d'une , ou de plusieurs quantités composantes

qui sont séparées entre elles par des signes + ou -, & ces quantités partielles sont distinguées par le nom général de *termes*. C'est ainsi que l'assemblage  $2b+c-4d$  est une quantité algébrique; & que les quantités  $2b, c, 4d$  considérées isolément, sont chacune un des termes qui concourent à sa composition. Telles sont, dans toute leur simplicité, les conventions relatives aux opérations algébriques. Les règles de ces mêmes opérations sont nombreuses & particulières; mais elles sont faciles à saisir & à retenir; parce qu'elles ne sont que des résultats, soit des conventions précédentes, soit des principes ordinaires de l'arithmétique.

59. Après ces notions préliminaires, voici la règle de l'addition algébrique. Si plusieurs quantités algébriques sont proposées pour être ajoutées ensemble, il faut les placer les unes à la suite des autres, avec les mêmes signes qui les accompagnent, & réunir ensuite les termes semblables, pour simplifier l'expression de la somme. Soit  $e+b$  à ajouter avec  $c-d$ ; leur somme suivant la règle indiquée est  $e+b+c-d$ ; & elle doit être telle effectivement. Car si on n'ajoutoit que la seule quantité  $c$ , toute entière, avec  $e+b$ ; la somme seroit alors, sans doute,  $e+b+c$ ; mais, par cette opération, on ajouteroit une quantité trop grande à la quantité  $e+b$ , puisqu'on ne doit lui ajouter que la quantité  $c$  diminuée de la quantité  $d$ . Une telle somme  $e+b+c$  est donc trop grande de toute la quantité  $d$ , c'est pourquoi il faut en retrancher  $d$ , pour la réduire à l'exacte valeur qu'elle doit avoir. La somme cherchée est donc réellement  $e+b+c-d$ , comme la règle l'indique; & par conséquent, cette règle étant démontrée, doit être suivie généralement, dans les opérations de l'addition des quantités algébriques. Si on étoit parvenu, par l'addition, à une somme telle que celle-ci,  $e+b+e-c-2b$ ; son expression seroit rendue plus simple, en réunissant les termes semblables qu'elle présente. Dans cette somme il y a les termes  $e+e$  qui, suivant les conventions, équivalent à  $2e$ ; on y voit ensuite  $b-2b$ , & ces deux termes semblables annoncent que, non seulement la quantité  $b$  doit être ajoutée une fois aux autres termes  $2e-c$ , mais aussi qu'elle doit en être retranchée deux fois; ce qui se réduit en dernière analyse,

à retrancher une fois la quantité  $b$  de ces mêmes termes. C'est pourquoi la somme supposée  $e+b+c-c-2b$  doit être exprimée par  $2c-c-b$ , c'est-à-dire, par une quantité algébrique, qui n'est composée que de trois termes au lieu de cinq.

60. La soustraction algébrique n'est soumise qu'à une règle unique. Si on veut soustraire des quantités algébriques les unes des autres; il faut changer les signes (de plus en moins & de moins en plus) qui précèdent les quantités à soustraire; & ensuite ajouter celles-ci aux quantités desquelles les premières doivent être soustraites. On a soin aussi, après cette opération, de réunir les termes semblables, pour réduire l'expression de la différence, aux termes les plus simples & les moins nombreux.

Si de  $e+b$  on doit soustraire  $c-d$ , il faut, conformément à la règle, écrire  $-c+d$  à la suite de  $e+b$ ; pour former la différence cherchée qui est alors indiquée par  $e+b-c+d$ . La raison qui sert de base à cette règle, est semblable à celle qui a servi à démontrer la règle de l'addition. En effet, si on n'avoit soustrait de  $e+b$ , que la seule quantité  $c$ , la différence, suivant les conventions, eût été représentée par  $e+b-c$ ; mais on ne doit pas retrancher la quantité  $c$  toute entière, de  $e+b$ ; & c'est cette quantité  $c$ , diminuée de la quantité  $d$  qui doit en être soustraite; par conséquent, la différence  $e+b-c$  est trop grande de la quantité  $d$ ; & la différence cherchée n'est réellement égale qu'à la quantité  $e+b-c+d$ . Remarquons que cette différence est la même qui résulte de la règle annoncée; c'est pourquoi, cette règle est généralement applicable, dans tous les cas où il faut retrancher les unes des autres, des quantités algébriques proposées.

61. Les multiplications, soit algébriques, soit numériques, sont fondées sur les mêmes principes. La définition en est la même; & si, dans le calcul des nombres, il faut multiplier tout le multiplicande par chaque partie du multiplicateur, pour parvenir à leur produit; de même, dans le calcul des quantités algébriques, on multiplie aussi, dans les mêmes vues, tous les termes du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur. Ainsi, pour exécuter une multiplication algébrique, il suffit de savoir trouver le

produit d'un terme quelconque , multiplié par un terme. Cette opération est nécessairement assujettie à un certain nombre de regles particulieres ; parce qu'en multipliant deux quantités algébriques l'une par l'autre , il faut , pour obtenir complètement leur produit , déterminer , & le signe que doit avoir ce produit , & la grandeur de son coefficient , & enfin celle des exposans des lettres dont il doit être composé.

Si les deux termes qui doivent être multipliés l'un par l'autre , sont précédés chacun du signe + , alors le multiplicateur indiquant de prendre positivement le multiplicande , le produit ne peut être que positif , par conséquent , dans ce cas particulier , le produit de ces deux termes doit être affecté du signe + . Mais si le multiplicande , restant le même , ou positif , le multiplicateur étoit précédé du signe - , le produit seroit nécessairement affecté du signe - . En effet , soit  $b$  à multiplier par  $d-c$  , il faut d'abord multiplier  $b$  par  $d$  ; & comme chacun de ces termes a le signe positif , ( parce que tout terme qui n'a pas de signe est regardé comme ayant le signe + ) , le produit est  $bd$  , suivant la convention ( 58 ). Ce produit est celui de  $b$  par la quantité  $d$  toute entiere ; tandis que  $b$  ne doit être multiplié que par la quantité  $d$  , diminuée de  $c$  : il y a donc dans ce produit , une quantité  $c$  qui multiplie  $b$  , ou un produit  $bc$  qui ne devoit pas s'y trouver , & qui , par conséquent , doit en être retranché. Ce produit , réduit à ce qu'il doit être , est donc  $bd-bc$  ; & on doit y remarquer le produit partiel  $bc$  , qui a le signe - , & qui indique évidemment que le produit de deux termes , dont l'un est précédé du signe + , & l'autre du signe moins , doit toujours être affecté du signe - ; ou que le produit de deux termes qui ont des signes contraires , est toujours négatif. Si les deux termes qu'on multiplie , étoient tous deux précédés du signe - ; leur produit seroit positif , ou affecté du signe + . En effet , soit  $e-c$  à multiplier par  $b-d$  ; on fait , suivant ce qui vient d'être démontré , que le produit de  $e-c$  , par  $b$  , est  $eb-cb$  ; or , dans un tel produit , la quantité  $e-c$  est multipliée par la quantité  $b$  toute entiere ; & il n'étoit proposé que de la multiplier par la quantité  $b$  diminuée de  $d$  ; donc , dans le produit  $eb-cb$  , il y a le produit de la quantité  $e-c$  , mul-

multipliée par  $d$  ou  $ed-cd$  qui s'y trouve de trop, & qui, par cette raison, doit en être retranché. Cette soustraction se fait en changeant les signes des termes à soustraire, & en les ajoutant, dans ce nouvel état, à la quantité de laquelle ils doivent être soustraits. le produit cherché est donc réellement  $eb-cb-ed+cd$ ; & on y doit remarquer le produit partiel  $cd$  qui, par le signe + dont il est précédé, annonce que ses deux facteurs  $c$  &  $d$ , ayant le signe -, composent un produit dont le signe doit être +. On peut donc établir, comme règle générale, que le signe du produit de deux facteurs algébriques quelconques, est toujours +, lorsque ces facteurs ont un même signe + ou -; & qu'il est toujours -, lorsque ces mêmes facteurs sont affectés de signes qui sont contraires.

Quant au produit même, de deux termes qui sont multipliés l'un par l'autre; la règle générale est conventionnelle, ou telle qu'elle a été annoncée précédemment (58). Cette règle prescrit de placer l'un à côté de l'autre, sans interposition de signe, tous les facteurs des termes proposés; c'est pourquoi, si  $2ebc$  doit être multiplié par  $3qdm$ , le produit, suivant cette règle est  $2.3ebcqdm$ , ou  $6ebcqdm$ . Dans un tel produit, on voit que les coefficients des deux termes sont multipliés l'un par l'autre; & d'après cette opération, on juge qu'il faut établir pour règle générale, que le coefficient du produit de deux termes algébriques, est toujours le produit des coefficients particuliers de ces mêmes termes. Il est d'ailleurs aisé de démontrer directement la vérité de cette règle; car  $2ebc$  n'est autre chose que  $ebc+ebc$ : &  $3qdm$  étant développé, est composé de  $qdm+qdm+qdm$ ; & les termes proposés étant multipliés l'un par l'autre dans ce nouvel état, on auroit, suivant les règles ordinaires, six produits partiels, dont chacun seroit égal à  $qdm.ebc$ , ou une somme dans laquelle cette dernière quantité seroit répétée six fois; ainsi, suivant la convention (58), cette somme ou le produit cherché doit être représenté par  $6qdm.ebc$ . Le résultat de l'application de la règle générale est parfaitement le même; ainsi, il est encore démontré que le coefficient du produit de deux termes algébriques, est le produit des coefficients particuliers de ces deux facteurs. Les conventions, déjà

rappellées, annoncent aussi que, pour former le produit de deux termes algébriques, il faut placer l'une à côté de l'autre, sans interposition de signe, les lettres qui sont facteurs dans chacun de ces termes; mais, dans l'application de cette règle conventionnelle, il arrive souvent que, dans les deux termes multipliés, il y a des lettres qui sont les mêmes: alors, dans le produit, chacune de ces lettres communes, doit être plusieurs fois facteur. De telles lettres ne doivent donc pas être écrites plusieurs fois dans le produit (58) & chacune doit être accompagnée d'un exposant, qui indique, combien de fois elle est facteur dans le produit cherché. Si  $a^2bd$  doit être multiplié par  $a^3b^2c$ ; alors, conformément à la règle générale, le produit seroit,  $a^2bda^3b^2c$ . Mais dans ce produit,  $a$  est cinq fois facteur &  $b$  est trois fois facteur; & comme on est convenu, ainsi que nous l'avons rappelé, d'indiquer toujours pour la simplicité des expressions, par un exposant, combien de fois une quantité est facteur dans un terme donné; il en résulte que le produit précédent doit être exprimé par la quantité  $a^5b^3dc$ . On doit observer dans le produit trouvé, que l'exposant de  $a$  est la somme des exposants de  $a$  dans les deux termes proposés; & que l'exposant de  $b$  est formé de la même manière: par conséquent, on peut établir, comme règle générale, que, pour déterminer le produit de deux termes algébriques donnés, il faut placer l'une à côté de l'autre, les lettres diverses qui les composent; & donner pour exposant, aux lettres qui sont semblables ou communes aux deux termes proposés, la somme des exposants qui affectent ces lettres dans chacun des deux mêmes termes. Remarquons ici, que toute lettre qui ne paroît pas avoir explicitement un exposant, doit être regardée comme ayant 1 pour exposant; parce que dès que cette lettre se trouve dans le produit, elle y est une fois facteur, ce qui est exprimé par l'exposant 1.

62. Ces règles, sont celles qu'il faut observer pour déterminer le produit d'un terme, par un autre terme: par conséquent, si, dans une multiplication, le



multiplicande & le multiplicateur sont chacun composés de plusieurs termes ; on doit, suivant ces mêmes règles, multiplier terme par terme ; & réunir ensuite tous les produits partiels, pour avoir le produit total. Voici un exemple qui fera connoître tous les détails nécessaires de cette opération. Soit la quantité  $2a^2 - 4b^2$ , à multiplier par  $a^2 + 6b^2$ . Ces quantités étant écrites,

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 4b^2 \\ \times a^2 + 6b^2 \\ \hline \end{array}$$

comme on le voit ici, il faut multiplier tout le multiplicande par le 1.<sup>er</sup>

terme  $a^2$  du multiplicateur, & le produit, (en ayant égard aux règles qui sont relatives, soit aux signes, soit aux coefficients, soit aux lettres, soit enfin aux exposans des lettres semblables), est  $2a^4 - 4a^2b^2$  ; ensuite multipliant le multiplicande par  $+6b^2$ , le produit est  $12a^2b^2 - 24b^4$  qu'on écrit en plaçant sous chaque terme du 1.<sup>er</sup> produit, les termes qui leur ressemblent. Enfin ajoutant ensemble ces produits partiels ; leur somme est  $2a^4 - 4a^2b^2 + 12a^2b^2 - 24b^4$  : & comme les termes  $4a^2b^2$  &  $12a^2b^2$  sont des termes semblables, puisque c'est la quantité  $a^2b^2$  répétée, douze fois dans l'un & quatre fois dans l'autre : comme d'ailleurs l'un est ajouté & l'autre retranché ; la différence seule (58) de ces deux termes, doit être ajoutée aux autres termes du produit. Donc le produit total, réduit à l'expression la plus simple, doit être  $2a^4 + 8a^2b^2 - 24b^4$ .

63. La division des quantités algébriques a des règles qui sont uniquement fondées sur celles de la multiplication. Elles dérivent toutes de ce principe général déjà exposé ailleurs, qui est que le produit du diviseur par le quotient d'une division, est toujours égal au dividende. Avant de commencer une division algébrique, on observe d'ordonner les termes du dividende, ainsi que du diviseur, par rapport à une même lettre ; ou bien, qu'on les arrange de manière, que dans le premier terme du dividende ou du diviseur, soit celui où la lettre choisie, a le plus haut exposant ; & que les termes suivans soient ceux où cette même lettre a un exposant d'autant plus petit, qu'ils s'éloignent d'avantage du premier terme ; par ce moyen, on rend



la comparaifon à faire entre les premiers termes des deux quantités à divifer, d'autant plus facile que dans un tel ordre, ces termes ont alors une quantité commune.

Après cette difpofition préalable, on exécute la divifion demandée; & comme, dans la divifion numérique, on cherche combien le premier chiffre du dividende contient le premier chiffre du divifeur; de même auffi en algebre, au lieu de divifer réellement tout le dividende par le divifeur, pour préfumer le quotient, on fe contente de divifer le premier terme de l'un, par le premier terme de l'autre. Le quotient étant trouvé, on le multiplie par le divifeur entier, afin de fouftraire le produit du dividende, & afin de juger, foit de la convenance du quotient, foit du refte du dividende, qui eft encore à divifer par le divifeur propofé. Toutes les regles de la divifion algébrique, fe reduifent donc à celle d'un terme feul par un autre terme; & ces regles dans leur application, doivent indiquer, & le figne, & la compofition du quotient. Par la premiere de ces regles, le figne du quotient eft +, toutes les fois que celui du divifeur & celui du dividende font les mêmes; mais s'ils font contraires, le figne - devient celui du quotient, parce que le produit du divifeur multiplié par le quotient, doit avoir le figne du dividende. Par la feconde regle, & d'après le même principe, le coefficient du quotient doit être le réfultat de la divifion du coefficient du dividende, par celui du divifeur. Enfin, par la troifieme regle, & les mêmes raifons, les lettres compofantes du dividende doivent être écrites au-deffus des lettres du divifeur, & en être féparées par un trait horizontal. Lorsque les termes divifés ont des lettres femblables, l'exposant de ces lettres communes dans le quotient, doit être la différence, de l'exposant de pareilles lettres du dividende, à l'exposant des mêmes lettres du divifeur. Les autres regles qu'on obferve, pour continuer la divifion, & vérifier le quotient déjà trouvé, font celles de la multiplication & de la fouftraction; c'eft-à-dire, qu'on multiplie le

quotient par le diviseur, & qu'on le retranche du dividende. Le reste de tout le dividende, devient ensuite un nouveau dividende partiel qui ne cesse d'être ordonné par rapport à la même lettre, comme l'étoit le dividende entier avant le commencement de la division : & on cherche un nouveau quotient, en suivant le procédé indiqué pour trouver le premier. Un exemple détaillé va faire connoître l'application de toutes les regles dont on vient de  $6a^2 - 5ab + 7ac - 6b^2 + 22bc - 20c^2$  par  $3a + 2b - 4c$  parler. Soit proposé de diviser  $-6a^2 - 4ab + 8ac$  par  $2a - 3b + 5c$

la quantité,  $7ac$

$-5ab + 22bc + 6a^2$

$-20c^2 - 6b^2$  par

$2b + 3a - 4c$ .

$-9ab + 15ac - 6b^2 + 22bc - 20c^2$

$+9ab \quad +6b^2 - 12bc$

$15ac + 10bc - 20c^2$

0

Comme les termes de ces deux

quantités, ne sont

pas dans un ordre relatif à une lettre commune, on les ordonne, ou on les arrange pour la lettre  $a$ , & on les écrit comme on le voit ici. Le dividende & le diviseur, étant dans cet état; on divise le terme  $6a^2$  du dividende, par le premier terme  $3a$  du diviseur; le quotient présumé est  $2a$ . Ensuite, on multiplie  $2a$  par le diviseur entier, ce qui donne pour produit,  $6a^2 + 4ab - 8ac$ ; & pour le soustraire on l'écrit sous le dividende, avec lequel on l'ajoute, après avoir changé les signes de chaque terme de ce produit. On écrit donc  $-6a^2 - 4ab + 8ac$ , & ces termes réunis au dividende, forment, après la réduction des termes semblables & de ceux qui se détruisent, la somme suivante  $-9ab + 15ac - 6b^2 + 22bc - 20c^2$ . (Car  $-6a^2$  &  $+6a^2$  se réduisent à zero, &  $-5ab$  réunis avec  $-4ab$ , ne font autre chose que le produit  $-ab$  répété neuf fois, ainsi de suite). La somme trouvée, ou le reste de la soustraction, est une partie du dividende, qui est encore à diviser par le diviseur; ainsi l'opération doit continuer comme elle a déjà été faite. On divise donc  $-9ab$  par  $3a$ , & le quotient présumé est  $-3b$ . Ce quotient étant multiplié par le diviseur, & le produit étant retranché

retranché du nouveau dividende ou du premier reste, on trouve un second reste  $15ac + 10bc - 20c^2$  qu'on divise aussi par le diviseur. Le quotient de  $15ac$  divisé par  $3a$ , est  $5c$ ; & le produit de  $5c$ , par le diviseur qui est  $15ac + 10bc - 20c^2$ , étant retranché du dernier dividende, il ne reste rien. Ce qui démontre évidemment que le quotient exact de la division du dividende par le diviseur proposé, est  $2a - 3b + 5c$ . On s'en assure, particulièrement, en multipliant ce quotient par le diviseur donné; puisque le produit est égal au dividende proposé.

64. Les quatre opérations algébriques que nous venons d'exposer, sont simples, intelligibles & de l'exécution la plus facile. Elles peuvent être employées comme celles de l'arithmétique, à la solution des mêmes questions; mais elles peuvent l'être, aussi heureusement, à des questions plus compliquées. L'étendue de leur application est même moins bornée & moins difficile; & cet avantage est attaché, soit à la forme générale des signes qui sont adoptés, soit à la méthode d'exprimer algébriquement toute question proposée. Cette méthode est fondée sur une remarque générale, savoir, que dans une question quelconque, il est toujours une quantité qui doit être égale à d'autres quantités combinées, suivant des règles déterminées. Cette méthode est telle, que l'expression algébrique de l'énoncé d'une question, est toujours simple & précise, qu'elle ne renferme que des conditions essentielles, & qu'elle les présente dans l'ordre le plus propre à faciliter la recherche de la solution demandée. C'est par cette méthode qu'on établit entre des quantités, soit connues, soit inconnues, une égalité qui est appuyée sur l'état d'une question proposée, & ces quantités ainsi égalées l'une à l'autre, forment ce qu'on nomme une équation. Par exemple, si  $b$  &  $c$  représentent deux quantités; & si  $d$  est la différence de la première à la seconde; on peut dire que la quantité  $b$  étant diminuée de  $c$ , devient égale à  $d$ , & cette idée peut être rendue algébriquement par  $b - c = d$ . Cette expression simple, est une image de toute équation, puisque ses termes sont des signes généraux qui pourroient repré-

senter toute sorte de quantité. Comme elle, toute équation est composée de deux parties qui sont séparées par le signe  $=$ , destiné à annoncer leur égalité parfaite ; & la totalité des termes qui sont placés à la gauche du signe d'égalité, reçoit le nom de premier membre de l'équation, tandis que la totalité des termes qui sont à la droite de ce même signe, est nommée le second membre.

65. Cette égalité entre deux quantités quelconques, conduit à plusieurs conséquences, & à plusieurs règles générales, dont l'application est surtout utile à la solution des problèmes. Ces conséquences sont, que les deux membres d'une équation, peuvent être chacun augmenté ou diminué, multiplié ou divisé, par une même quantité, sans que leur égalité cesse jamais d'avoir lieu. Ainsi, quant on ajouteroit la quantité  $m$ , à l'un & à l'autre membre de l'équation précédente  $b-c=d$ , on pourroit toujours dire  $b-c+m=d+m$ . Mais si les deux membres étoient augmentés non de  $m$  mais de  $c$ , on auroit encore  $b-c+c=d+c$  ou  $b=d+c$  (parceque, dans le 1.<sup>er</sup> membre, les quantités réunies  $-c$  est  $+c$  se détruisent réciproquement), & cette dernière équation  $b=d+c$  étant comparée à la primitive  $b-c=d$ , qui est composée comme elle, des mêmes quantités; on voit que la quantité  $-c$ , est effacée du 1.<sup>er</sup> membre de celle-ci, & ajoutée dans le 2.<sup>e</sup> membre avec le signe  $+$ . De là on peut conclure cette règle générale, qu'un terme d'une équation étant effacé d'un de ses membres, doit être ajouté à l'autre membre avec un signe contraire. Remarquons que, par cette transformation, l'équation  $b=d+c$  exprime un principe connu de l'arithmétique, qui est que, la différence de deux quantités, & la plus petite de ces quantités, étant ajoutées ensemble, leur somme est égale à la plus grande. La même règle fondée sur les mêmes raisons, fait voir que l'équation  $b-c=d$  peut être transformée en celle-ci  $b-d=c$ ; équation qui annonce, comme on le fait d'ailleurs, que si la différence de deux quantités, est retranchée de la plus grande, celle-ci devient égale à la plus petite de ces mêmes quantités. Ces remarques sont placées ici, pour

donner une idée première de la fécondité des conséquences, que l'algèbre sert à dévoiler dans la solution d'une proposition donnée.

Si le produit des deux quantités  $b$  &  $c$ , multipliées l'une par l'autre, est représenté par  $p$ ; on peut dire que  $bc=p$ . Ensuite, comme les deux membres de cette équation, peuvent être divisés par une même quantité, sans que leur égalité soit troublée, on peut supposer que cette quantité qui doit servir de diviseur commun, soit  $c$ , alors on doit avoir l'équation  $\frac{bc}{c}=\frac{p}{c}$  ou  $b=\frac{p}{c}$ ; parce que  $\frac{c}{c}=1$ . On doit remarquer ici que la quantité  $c$ , qui étoit facteur du 1.<sup>er</sup> membre, en a été effacé pour être transportée comme diviseur de tout le 2.<sup>e</sup> membre, sans changer son signe primitif. C'est pourquoi il résulte de cette considération, une 2.<sup>e</sup> règle générale, savoir que, dans une équation, on peut effacer le facteur d'un membre, pour le placer comme diviseur de l'autre, sans faire de changement au signe qu'il pourroit avoir, & sans cesser de conserver, malgré cette opération, l'égalité des deux membres. Cette opération  $b=\frac{p}{c}$  exprime une vérité connue, c'est-à-dire, qu'en divisant un produit par un de ses deux facteurs, le quotient est égal à l'autre facteur.

Si le quotient de la division de  $b$  par  $c$  est représenté par  $q$ , on doit avoir l'équation  $\frac{b}{c}=q$ ; & l'égalité de ces deux membres, ne changeroit pas, si on les multiplioit l'un & l'autre par  $c$ . C'est pourquoi on a encore l'équation  $\frac{bc}{c}=qc$ , ou  $b=qc$ , & on doit remarquer que  $c$  qui étoit diviseur du 1.<sup>er</sup> membre dans la première équation, est devenu facteur du deuxième membre dans la même équation transformée sans avoir reçu un signe différent. Par conséquent on peut établir comme règle générale, que pour faire disparaître le diviseur d'un membre d'équation, il faut l'écrire comme facteur de tout le second membre,

& avec le signe qu'il avoit dans le premier membre.

Cette transformation de l'équation  $\frac{b}{c} = q$ , en celle  $b = qc$  rappelle un autre principe général d'arithmétique : savoir : que le quotient de la division de deux quantités, étant multiplié par le diviseur, le produit est égal au dividende.

Remarquons enfin que, dans l'application de la seconde & de la troisième règle générale, la quantité qu'on fait passer d'un membre dans un autre, pour faire fonction de diviseur ou de facteur, doit être facteur ou diviseur commun, à tous les termes du membre dans lequel cette quantité est effacée, parce que, sans cette condition, les deux membres de l'équation ne seroient pas complètement divisés, ou multipliés par une même quantité.

66 Deux exemples détaillés, vont servir à faire connoître l'usage de l'analyse ou de la méthode des équations, & l'application des règles qu'il faut suivre, pour produire leurs transformations. 1.<sup>o</sup> Si un vaisseau flottant est d'un poids égal à celui de 3000 tonneaux, on demande combien il doit déplacer de pieds cubes d'eau de mer. (un tonneau pèse 2000<sup>l</sup>, & un pied cube d'eau de mer 72<sup>l</sup>.) Quelque soit le nombre des pieds cubes du déplacement, on peut le représenter par le signe général  $x$ , alors la quantité  $72x$  doit être le poids total du vaisseau, estimé en livres. Mais ce poids total, est aussi exprimé par 2000<sup>l</sup>, répétées autant de fois qu'il y a de tonneaux, ou par 6000000; par conséquent, en rapprochant ces deux expressions, il est permis de faire l'équation suivante  $72x = 6000000$ . Dans cette équation il y a une quantité cherchée qui est  $x$ , & qui resteroit connue & déterminée, si elle étoit seule dans un membre de l'équation, tandis que l'autre membre ne seroit composé que de quantités connues. L'équation trouvée, peut aisément être ramenée à cet état, en suivant la seconde règle démontrée précédemment ; c'est-à-dire, en effaçant le facteur 72 du premier membre, & en l'écrivant comme diviseur de tout le second membre. Par cette opération, l'équation première se

change en celle-ci,  $x = \frac{600000}{72} = 83333 \frac{1}{3}$  pieds cubes. Un vaisseau qui pèse 3000 tonneaux, déplace donc  $83333 \frac{1}{3}$  pieds cubes d'eau de mer.

2.<sup>o</sup> Un capitaine a commandé un navire pendant trois campagnes; à chaque voyage, quoique sa dépense montât à 300 livres, l'argent qu'il pouvoit avoir, augmentoit d'un tiers, & sa fortune s'est trouvée doublée, après les trois campagnes; on demande quel devoit être son bien avant le premier armement. Représentons ce bien par  $x$ , & 300 livres par  $b$ ; alors  $x-b$  exprime ce qui restoit à ce capitaine, après une dépense de 300 livres pendant sa première campagne; mais comme il gagnoit le tiers de cette somme  $x-b$ , son bien à la fin de la première campagne étoit représenté par  $x-b + \frac{x-b}{3}$  ou par  $\frac{4x-4b}{3}$ . A la fin de la seconde campagne, son bien, en ayant égard seulement à sa dépense, étoit  $\frac{4x-4b}{3} - b$ , ou  $\frac{4x-7b}{3}$ ; mais en y ajoutant le gain de cette campagne, & qui étoit le tiers de ce même bien qui lui restoit, on doit exprimer tout l'argent qu'il possédoit après la deuxième campagne, par  $\frac{4x-7b}{3} + \frac{4x-7b}{9}$  ou par  $\frac{16x-28b}{9}$ . A la fin de la 3.<sup>e</sup> campagne, s'il n'avoit rien gagné, sa dépense  $b$  auroit réduit son bien à  $\frac{16x-28b}{9} - b$  ou à  $\frac{16x-37b}{9}$ , mais son gain a été  $\frac{16x-37b}{27}$  par conséquent, à cette époque, sa fortune totale devoit être représentée par  $\frac{16x-37b}{9} + \frac{16x-37b}{27}$ . Elle devoit d'ailleurs, suivant la question proposée, être égale au double de ce qu'il avoit avant le premier armement; ainsi on peut faire cette équation  $2x = \frac{16x-37b}{9} + \frac{16x-37b}{27}$ ; parce que ces deux mem-

que c'est la quantité demandée par la question. C'est pourquoi il faut, en appliquant les regles des équations, transformer cette équation en une autre, dont l'un des membres, ne contienne que  $x$ , tandis que l'autre membre ne fera composé que de quantités connues. Dans cette vue, il faut faire disparoître le dénominateur 27, qui ne divisant pas le premier terme du second membre, doit en devenir un facteur, ainsi que du premier membre. On doit donc avoir  $54x = 48x - 111b + 16x - 37b = 64x - 148b$ . Les dénominateurs de la premiere équation étant ainsi disparus, réunissons dans un même membre, les termes ou se trouve  $x$ ; on a l'équation,  $148b = 10x$ : & dégageant  $x$ , du facteur 10 qui le multiplie, on arrive à cette équation finale  $x = \frac{148b}{10}$ . Elle donne une expression simple de la va-

leur de  $x$ , dans laquelle il suffit de substituer  $300^1$  à la place de  $b$ , pour connoître qu'elle est égale à  $4440^1$ , c'est-à-dire que la fortune du capitaine supposé étoit de  $4440^1$  avant ses trois campagnes.

67. Après avoir démontré, & les principes & les regles & les usages de l'arithmétique; après avoir fait une digression utile, sur l'algebre ou sur un moyen général de former toutes les combinaisons des quantités, il faut nous appuyer sur ces connoissances premieres & fondamentales, pour nous élever à de plus hautes considérations, dont l'application n'est pas moins nécessaire à la marine. Les nouveaux sujets que nous devons traiter, sont les puissances des nombres, leurs rapports, ainsi que les propriétés des proportions & des progressions. Les puissances des nombres qui sont des produits de ces nombres par eux mêmes, sont fréquemment employées dans la comparaison des quantités semblables; car nous verrons ailleurs, que, si les voiles de deux vaisseaux sont semblables, leurs surfaces sont entre elles comme les secondes puissances de leurs dimensions, ou comme les produits de ces dimensions multipliées par elles-mêmes; que les solidités des boulets, des ancres, des mâts, des cordages, des vaisseaux &c, comparées sé-



parément, soit dans le cas de similitude, comme les troisiemes puissances de leurs dimensions. On verra aussi que les troisiemes puissances des largeurs de la flotaïson d'un bâtiment, entrent dans le calcul de la stabilité; que la résistance opposée par l'eau au mouvement d'un vaisseau, dépend du quarré ou de la deuxieme puissance de la vitesse &c. ainsi, après ces indications nombreuses, & qu'il seroit possible de multiplier encore davantage, il ne doit pas paroître douteux que la connoissance des puissances des nombres, ainsi que des moyens qu'il faut employer ou pour les former, ou pour les décomposer, ne soient très-nécessaires à l'homme de mer. Celles des rapports, des proportions, & des progressions des nombres, sont encore d'une utilité plus générale, puisque dans la marine, comme dans la société, nous ne jugeons de tous les objets, que par comparaison.

Conséquemment à toutes ces considérations, & à ces vues d'utilité, les sujets annoncés précédemment, doivent donc faire partie de la science de l'homme de mer: & on en fera sur-tout convaincu, lorsque nous serons parvenus aux parties de cette ouvrage, où il sera permis d'indiquer les différens cas auxquels l'application de ces connoissances, devient essentielle & intéressante.

68. *Puissances des nombres.* Le produit d'un nombre multiplié par lui-même, est nommé la deuxieme puissance de ce nombre, ou son quarré; & ce quarré étant multiplié par le premier nombre, le produit qui en résulte, reçoit le nom de troisieme puissance de ce nombre, ou de son cube. On voit donc qu'un nombre quelconque est deux fois facteur dans la seconde puissance, trois fois facteur dans la troisieme puissance & ainsi de suite; de sorte que dans la centieme puissance, il seroit cent fois facteur. On voit aussi que la premiere puissance d'un nombre n'est autre chose que ce nombre lui-même.

Les regles qu'il faut suivre, pour élever un nombre à une puissance quelconque, sont donc absolument les mêmes que celles, déjà détaillées, de la multipli-

cation : ainſi veut-on connoître, par exemple, les di-  
verses puiffances du nombre 3. La premiere eſt 3; la  
deuxieme eſt le produit de 3 par 3, ou 9; la troiſie-  
me eſt 3.3.3, ou 27; la quatrieme eſt 3.3.3.3, ou 81,  
&c. On pourroit auſſi, comme en algebre, employer  
des expoſans (58) pour indiquer ces mêmes puif-  
ſances, & les repréſenter par  $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ , &c. ſi  
la quantité qu'il faut élever à de telles puiffances, étoit  
désignée par un ſigne général, tel que  $b$ , ſes puiffances ſe-  
roient exprimées par  $b, b^2, b^3, b^4, b^5$ , &c. comme, entre les  
différentes puiffances des nombres, il n'y a que la deu-  
xieme & la troiſieme dont la connoiſſance ſoit d'un inté-  
rêt preſſant pour un homme de mer; nous nous bornerons  
à en développer, ſoit la compoſition, ſoit la décompoſition.  
Nous allons donc commencer par traiter des quarrés  
des nombres, enſuite de leurs cubes, & enfin des  
racines de ces puiffances, ou des moyens de recon-  
noître, ſoit dans un quarré, ſoit dans un cube, le  
nombre qui a dû ſervir à former. l'un ou l'autre

69. La deuxieme puiffance d'un nombre, ou ſon  
quarré eſt, en général, le produit de ce nombre mul-  
tiplié par lui-même; & un tel produit préſente des  
caractères diſtinctifs, qui méritent d'être remarqués.  
Un nombre peut être compoſé, ou d'un chiffre, ou  
de pluſieurs. Dans le premier cas, ſon quarré ne  
doit pas renfermer des centaines, puifque le quarré de  
9, qui eſt le plus grand chiffre, n'eſt que 81; mais  
dans le deuxieme cas, c'eſt-à-dire, ſi pour écrire un  
nombre, il faut employer deux ou pluſieurs chiffres,  
alors ſon quarré renferme pluſieurs produits partiels  
qu'il eſt néceſſaire de faire connoître. Conſidérons,  
qu'un nombre quelconque, quoiqu'il contienne des  
unités, des dixaines, des centaines, des milles &c.  
peut cependant être regardé comme uniquement com-  
poſé de dixaines & d'unités, en comprenant, dans le  
nombre de ſes dixaines, toutes celles qui ſont néceſ-  
ſaires pour former ſes centaines, ſes milles &c; alors  
le quarré d'un tel nombre, enviſagé ſous ce dernier  
point de vue, renferme toujours, & le quarré des  
dixaines de ce nombre, & celui de ſes unités, &

le double produit des unités multipliées par les dixaines. En effet soit le nombre 37 à élever au quarré ou à multiplier par lui-même ; si on suit,

37	900
37	49
<u>        </u>	420
259	<u>        </u>
111	1369
<u>        </u>	
	1369

ci-jointe , qui donne le quarré demandé 1369 , on doit reconnoître que les dixaines de 37 ainsi que ses unités sont chacunes multipliées par elles-mêmes , ou élevées séparément au quarré ; & que le produit des dixaines de ce nombre , multiplié par ses unités , est répété ou pris deux fois. Ainsi le quarré 1369 , renferme nécessairement les trois produits partiels , qui ont été désignés. On peut confirmer encore la présence de ces mêmes produits dans 1369 , en les formant chacun séparément , & en les réunissant ensemble ; voici ces détails essentiels. Le quarré des dixaines 3 , du nombre 37 , est 9 centaines ; parce que le produit , de dixaines répétées un nombre de dixaines de fois , est nécessairement de la classe des centaines. Le quarré des unités est 49 unités ; le produit des unités 3 multipliées par les unités 7 , est vingt-une dixaine , par une raison semblable à celle qui vient d'être présentée ; & le double de ce produit est 42 dixaines ou 420 unités. Ces produits étant arrangés comme ils doivent l'être pour être ajoutés ensembles , composent ainsi une somme 1369 , c'est-à-dire , qu'ils forment le quarré entier du nombre 37. Ces derniers détails ont été nommés essentiels & dignes de la plus grande attention , parce qu'ils doivent servir , comme on le verra bientôt , à diriger la recherche de la racine quarrée d'un nombre quelconque. On doit y remarquer que le quarré des dixaines qui est dans le nombre 1369 , ne peut être contenu que dans les centaines de ce dernier , & que le double produit des dixaines de 27 multipliées par les unités , ne peut être renfermé que dans les dixaines de 1369 , à cause de la nature de ces mêmes produits. Enfin on peut conclure de tout ce qui précède , que si les dixaines , dont un nombre est composé , sont assez nombreuses pour former des centaines & même des milles , le quarrés de ces

centaines doit être renfermé dans la classe des dizaines de milles, & celui des milles dans la classe des millions.

70. Si on descend actuellement des nombres entiers aux nombres fractionnaires, le quarré de ces derniers est aussi, par le principe général, le résultat de la multiplication de ces nombres par eux-mêmes. C'est pourquoi on forme le quarré d'une fraction donnée, en élevant séparément au quarré, son numérateur & son dénominateur. On doit remarquer en particulier, que si un nombre est composé de décimales, son quarré doit avoir deux fois autant de décimales qu'il en a lui-même; soit parceque ce nombre est considéré comme une fraction ordinaire, & qu'alors son dénominateur a deux fois moins de zeros que son quarré; soit parceque le produit qui résulte de la multiplication des nombres décimaux, a toujours autant de chiffres décimaux, qu'on en compte dans tous les facteurs (35): ainsi le quarré de  $\frac{2}{5}$  est  $\frac{4}{25}$ , & celui de 0,4 est 0,16.

Ajoutons ici qu'en algebre, si un nombre composé de dizaines & d'unités est représenté par  $a+b$  (en supposant que ses dizaines soient  $a$ , & ses unités  $b$ ); le produit d'une telle quantité multipliée par elle-même, doit être, après toute réduction faite,  $= a^2+2ab+b^2$ . dans un pareil produit, on apperçoit évidemment les trois produits partiels qui composent le quarré du nombre représenté; tandis que formés arithmériquement tous ces produits se trouvent confondus; sans distinction, dans le quarré numérique. On peut même conclure de cette formule algébrique, un moyen simple d'élever au quarré un nombre composé d'unités & de fractions. En effet soit le nombre  $3\frac{5}{7}$  à élever au quarré, on forme les trois produits partiels, déjà indiqués, & en les ajoutant ensemble, ils font la somme suivante  $9+4\frac{2}{7}+\frac{25}{49}$ , ou  $13\frac{32}{49}$ .

71. Si un nombre est multiplié par son quarré, le produit qui en résulte, & où il est trois fois facteur, est son cube, ou sa troisième puissance. Ce nombre est-il exprimé par un seul chiffre, son cube ne peut avoir plus de trois chiffres, puisque le cube

de 9, qui est le plus grand des chiffres, n'est que 729 ; mais est-il composé de dixaines & d'unités, son cube est formé de quatre produits partiels qui sont, le cube de ses dixaines, celui de ses unités, & les triples produits, soit du quarré des dixaines multipliées par les unités, soit du quarré des unités multipliées par les dixaines. On peut se convaincre aisément de la présence de ces seuls produits dans le cube d'un nombre, en suivant la multiplication, des trois produits partiels qui composent son quarré, par les dixaines & les unités de ce même nombre : L'algebre rend ces produits plus sensibles : car  $(a^2+2ab+b^2)$  qui est la formule du quarré, d'un nombre quelconque représenté par  $a+b$ , ( en supposant ses unités  $b$  & ses dixaines  $a$  ) étant multipliée par  $a+b$ , on trouve pour produit, ou pour le cube de  $(a+b)$ , la quantité  $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ . On voit ici tous les produits partiels qui ont été annoncés. Ils y sont nettement séparés, & bien caractérisés ; d'ailleurs, il est encore un autre moyen, mais indirect, qu'on peut employer pour s'assurer que de tels produits, concourent seuls à former le cube d'un nombre donné. Il consiste à prendre séparément ces produits, & à les ajouter ensemble pour comparer leur somme, au cube d'un nombre, formé suivant les regles ordinaires de la multiplication. Par exemple, nous avons vu, précédemment, que le quarré de 37 est 1369. Si on multiplie ce dernier par le premier, on trouve que le nombre 50653, est le cube de 37. Formons actuellement les produits partiels annoncés.

1 <sup>o</sup> Le cube des trois dixaines de 37, est 27 milles, parce que le quarré de ces dixaines, qui est un nombre de centaines, étant répété des dixaines de fois, doit devenir un nombre de milles.	1369	27000
2 <sup>o</sup> Le cube des unités 7, ne peut être qu'un nombre d'unités, & il est 343.	37	343
3 <sup>o</sup> Le triple produit du quarré des dixaines 3, par les unités 7, doit être de la classe des centaines, & ce nombre est 189 centaines ou 18900 unités.	<del>1369</del>	18900
4 <sup>o</sup>	9583	4410
	4107	<del>1369</del>
	<del>50653</del>	50653

enfin, le triple produit du carré des unités, multiplié par les dizaines, est de la classe des dizaines; & ce nombre est 441 dizaines, ou 4410 unités. Si on réunit ensuite ces divers produits, leur somme est 50653, ou un nombre exactement égal au cube de 37. Nous remarquons ici, comme nous l'avons fait à l'égard des parties du carré d'un nombre, que les produits partiels qui entrent dans la composition du cube d'un nombre, n'ont été détaillés que pour mieux les faire connoître par leur quantité, & par l'espece de leurs unités; & surtout afin qu'ils puissent être rappelés, comme des guides essentiels dans les opérations, qui ont pour objet l'extraction des racines cubiques des nombres.

Nous ajouterons que pour élever une fraction ordinaire au cube; il faut cuber séparément, & son numérateur, & son dénominateur. Si des fractions sont sans dénominateur apparent, ou si elles sont exprimées en décimales; on forme leur cube, en les multipliant deux fois de suite par elles-mêmes, comme si elles représentoient des unités entières, ou sans égard à leur virgule; & en séparant dans le produit, trois fois autant de chiffres décimaux, qu'on en compte dans les nombres proposés. Cette dernière règle est fondée sur ce qu'un nombre décimal, est trois fois facteur dans son cube; & que tout produit doit toujours avoir autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans tous ses facteurs. C'est par cette raison que le cube de  $\frac{2}{5}$  est  $\frac{8}{125}$ , & celui de 0,4 est 0,064.

72. *Racines des nombres.* Un nombre, qui est élevé à une puissance quelconque, est la racine quelconque de cette puissance. Ainsi la racine carrée, ou cubique d'un nombre proposé, est un autre nombre plus petit, qui, multiplié par lui-même, ou une fois, ou deux fois de suite, donne un produit égal au nombre proposé. La racine cubique de 64, par exemple, est 4, parceque le produit 4.4.4 est 64. Précédemment, nous n'avons cru devoir parler que de la deuxième & de la troisième puissances des nombres ainsi il ne s'agira ici que de leurs racines, deuxième &

troisième: & pour procéder avec ordre, nous allons démontrer & détailler les règles qu'il faut suivre pour extraire la racine quarrée d'un nombre donné.

Des réflexions déjà présentées, ne permettent jamais de douter, à l'inspection d'un nombre proposé, si sa racine quarrée doit être composée d'un chiffre ou de plusieurs. Car ce nombre, est-il écrit avec moins de trois chiffres, sa racine ne peut en avoir qu'un seul; mais est-il formé par plus de deux chiffres, sa racine doit être composée de dizaines & d'unités. Dans tous ces cas, un nombre dont on propose d'extraire la racine quarrée, doit être considéré comme étant le carré de la racine cherchée; & s'il est écrit avec plus de deux chiffres, il doit par conséquent être regardé comme renfermant le carré des dizaines de sa racine, celui de ses unités, & le double produit des dizaines par les unités. C'est en connoissant ainsi la composition d'un nombre donné, qu'il devient facile d'en exécuter la décomposition complète, & par conséquent de découvrir sa racine. Nous n'appliquerons la démonstration de l'extraction de la racine quarrée, qu'à un nombre simple pour en faciliter l'intelligence, & pour l'étendre ensuite sans obscurité à l'extraction de la racine quarrée d'un nombre plus considérable. Soit par exemple, le nombre 625 dont on demande la racine quarrée; comme il est écrit avec trois chiffres, sa racine doit avoir des dizaines, & des unités; & ces deux parties, doivent être déterminées séparément pour être réunies ensuite, & former ensemble la racine de 625. Le carré des dizaines de cette racine doit se trouver dans 625, & comme un tel produit est de la classe des centaines, on ne peut le chercher que dans le seul chiffre 6. Cette remarque conduit donc à la règle générale suivante savoir, que pour trouver les dizaines de la racine quarrée d'un nombre donné, on doit séparer les deux derniers chiffres qui sont sur la droite de ce nombre, comme ne  $6.25|25$  pouvant faire partie du carré de ses          dizaines. Après cette séparation préalable, 22

On extrait la racine quarrée, du plus grand quarré qui peut être contenu dans les chiffres placés à gauche des chiffres séparés; & on trouve ainsi les dixaines de la racine demandée. Par exemple, le plus grand quarré contenu dans 6, est 4: sa racine est 2; & ce chiffre 2 exprime les dixaines de cette racine de 625. Les dixaines de cette racine, étant ainsi trouvées, il faut chercher ses unités; en conséquence on retranche du nombre proposé le quarré des dixaines trouvées de la racine; & le reste de tout ce nombre, contient alors, le double produit des dixaines trouvées, par les unités, & le quarré des unités. Dans l'exemple présent, ce reste est 225; & le produit du double des dixaines de sa racine par les unités cherchées, doit se trouver dans les 22 dixaines restantes: ainsi ce produit ayant pour facteurs, le double des dixaines, & les unités; si on le divise par le premier, le quotient doit exprimer les unités de la racine cherchée. Delà il suit une troisieme regle générale, qui est de placer, à la droite du reste de la premiere tranche, le premier chiffre de la tranche suivante, & de diviser le nombre qu'ils expriment par le double des dixaines trouvées, pour connoître les unités de la racine. Ainsi, dans l'exemple proposé, on doit écrire deux à côté des deux dixaines restantes de la premiere tranche; & diviser 22 par le double des dixaines de la racine qui est 4. Le quotient est 5, & il est deux moyens de s'assurer qu'il exprime le nombre des unités de la racine. Le premier, est d'élever la racine entiere au quarré; de comparer ce produit au nombre proposé; & s'il lui est égal, ou peu inférieur, la racine trouvée est convenable. C'est ainsi que 625, qui est le quarré de 25 racine trouvée, annonce dans l'exemple proposé, que 25 est réellement & sans reste la racine quarrée de 625. Le second moyen, est de former le double produit des dixaines par les unités, & de l'ajouter au quarré des unités trouvées. Si cette somme est égale ou peu inférieure à la partie du nombre proposé, qui est restée après la soustraction du quarré des dixaines, la racine cherchée est bien déterminée. Ce reste dont nous venons de parler est dans l'exemple



présent 225 ; or le double produit des 2 dizaines de la racine multipliées par les unités présumées 5, est de 20 dizaines, ou de 200 unités ; & le carré des unités est 25 ; par conséquent leur somme qui est aussi 225, devient une nouvelle preuve que le nombre 25 est la racine exacte de 625.

Le procédé qui vient d'être suivi pour parvenir à la racine d'un nombre, tel que 625 qui n'a pas plus de 4 chiffres, est aussi celui qui doit diriger l'extraction de la racine carrée de tout nombre qui a plus de 4 chiffres. En effet soit un nombre tel que 208847 dont la racine carrée est demandée. En raisonnant comme précédemment, on doit le regarder comme le carré de la racine cherchée, & par conséquent comme contenant le carré des dizaines de cette racine, (en tel nombre qu'elles puissent être), celui de ses unités, & le double produit des dizaines par les unités. Le carré des dizaines est nécessairement & exclusivement renfermé dans les 2088 centaines du nombre proposé ; & comme dans 2088, il y a plus de deux chiffres, la racine de ce carré doit avoir aussi plus d'un chiffre : c'est-à-dire que la racine totale du nombre proposé doit être composée de dizaines, de centaines, & d'unités ; ou que ses dizaines, font un assemblage, de dizaines de dizaines, & d'unités de dizaines. D'après ces considérations, il faut donc regarder 2088 centaines, comme contenant, le carré des dizaines de dizaines de la racine totale, celui des dizaines, & le double produit des dizaines multipliées par les dizaines de dizaines. Il faut donc extraire la racine carrée de 2088 comme on a extrait précédemment celle de 625 : c'est-à-dire, qu'on doit commencer par partager le nombre proposé en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite, comme on le fait ici. Ensuite extrayant de 2088 la racine carrée, on trouve, en se conformant aux règles précédentes, qu'elle est 45. Cette première racine doit être regardée comme exprimant le nombre des di-

$$\begin{array}{r} 20.80.47 \overline{) 456} \\ \underline{634} \end{array}$$

xaines qui font partie de la racine entiere du nombre 208847 : il ne reste donc qu'à chercher les unités de cette racine. C'est à cet effet, qu'on soustrait de 2088, le quarré des dixaines trouvées, qui est 2025, & qui est le plus grand quarré contenu dans 2088. Le reste est 63 centaines, qui réunies à la tranche suivante, forment une somme 6347 où doivent se trouver, & le double produit des 45 dixaines multipliées par les unités & le quarré des unités de la racine. Ainsi, écrivant sur la droite de 63 le chiffre des dixaines de la tranche 47, la quantité 634 dixaines, doit contenir le double produit des dixaines trouvées par les unités cherchées. On doit donc, comme précédemment, diviser 634 par le double de 45, ou par 90, pour connoître les unités de la racine. Le quotient est 7 ; mais il n'est que présumé, & pour vérifier si réellement les unités de la racine sont au nombre de 7, il faut élever 457 au quarré, & le comparer au nombre proposé. Ce quarré est 208849 : il est plus grand que 208847 ; ainsi le nombre 456 doit être la racine totale, du plus grand quarré contenu dans 208847 & elle est exprimée en unités entieres.

Telle est la maniere d'extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque, lorsque cette racine ne doit être qu'un nombre d'unités ; & on voit par les deux exemples précédents, que l'extraction d'une telle racine, doit être faite suivant les mêmes regles, soit lorsque le nombre proposé est un quarré parfait, comme 625 ; soit lorsqu'il est imparfait comme 208847. La seule différence est dans les résultats & elle consiste en ce que le reste n'est nul, que dans le cas seul où le nombre proposé est un quarré parfait. Remarquons d'ailleurs, que dans tout autre cas, la grandeur de ce reste ne peut jamais surpasser le double de la racine, parce qu'autrement le dernier chiffre trouvé de la même racine seroit trop petit d'une unité.

S'il importoit d'exprimer la racine quarrée d'un nombre proposé qui n'est pas un quarré parfait, non seulement en unités entieres, mais aussi en parties d'unités ; c'est-à-dire, s'il falloit approcher de la racine

cinc réelle, à un dixieme, ou à un centieme, ou à un millieme près, alors on ne doit pas négliger la partie qui reste du nombre proposé, après la soustraction du quarré de cette partie de la racine qui est exprimée en unités entieres. On s'en sert pour trouver les fractions d'unité qui entrent dans la composition de la racine approchée. A cet effet, on ajoute à la suite du nombre proposé, ou deux zeros, ou 4, ou 6, suivant que la question exige que cette racine soit approchée, à un dixieme, ou à un centieme, ou à un millieme près. Cette regle est fondée sur ce qu'une racine étant composée de chiffres décimaux, son quarré doit en avoir deux fois davantage. Ainsi étant proposé un nombre, on ne peut en chercher une racine quarrée, qui soit exprimée en dixiemes; par exemple, à moins que le nombre lui-même ne soit un nombre de centiemes, & ainsi de suite; puisque la quantité proposée doit toujours être regardée comme le quarré de la racine, quelle qu'elle puisse être. Si on se propose donc de chercher la racine quarrée, du nombre précédent 208847, approchée à un centieme près, il faut écrire à sa suite quatre zeros, ou le multiplier par 10000, afin de le reduire en dix milliemes, parceque regardé comme le quarré d'un nombre de centiemes, il doit lui-même être un nombre de dix-milliemes. L'opération doit donc être préparée en écrivant 2088470000. Ensuite on extrait la racine quarrée de ce nombre, comme s'il étoit composé d'unités entieres, & par conséquent, en obser-  

20.8847.00.00

---

71399

45699

vant les regles déjà indiquées, on le partage en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite. On cherche la racine du plus grand quarré contenu dans 208847, & cette racine, déjà trouvée plus haut, est 456. On la considère comme exprimant les dixaines de la racine demandée; on continue l'opération en suivant toujours les mêmes regles; & on parvient à trouver le nombre 45699 pour la racine du plus grand quarré contenu

dans 2088479000 unités. Cette racine est approchée à une unité près, & comme elle est cent fois plus grande que la racine de 208847, celle-ci doit être 456,99. Elle est ainsi approchée à un centième près de la vraie racine, d'autant plus que le reste qui est 71399, n'est pas égal au double de la racine.

Les règles qui viennent d'être suivies pour déterminer une racine exprimée en unités, & en parties d'unité, sont aussi celles auxquelles on doit se conformer pour extraire la racine quarrée d'une quantité décimale quelconque. Les mêmes principes démontrent, qu'avant une telle opération, il est nécessaire de rendre pair, le nombre des chiffres décimaux de la quantité proposée, par le moyen de zeros ajoutés à sa suite; qu'après cette préparation essentielle, on doit extraire la racine, de cette quantité comme si elle représentoit des unités entières; & enfin qu'il faut séparer par une virgule, dans cette racine, & sur la droite, un nombre de chiffres, égal à la moitié des chiffres décimaux qu'on compte dans le nombre proposé.

Quant aux fractions ordinaires qui ont un numérateur & un dénominateur, la méthode d'en extraire la racine quarrée, est inverse de celle qui a été indiquée pour les élever au quarré. C'est pourquoi on doit extraire séparément, la racine quarrée de leur numérateur, & celle de leur dénominateur. On réduit d'ailleurs cette recherche à une seule opération, si on le juge commode, en transformant la fraction donnée en une autre, dont le dénominateur soit un quarré parfait; ou en multipliant ses deux termes par le dénominateur. Alors, comme on connoît la racine du dénominateur de cette fraction transformée, il ne s'agit plus que d'extraire la racine quarrée du numérateur, & de la diviser par celle du dénominateur, pour déterminer la racine cherchée de la fraction proposée. C'est ainsi, qu'étant demandée la racine de  $\frac{3}{5}$ , il est plus commode de chercher celle de  $\frac{15}{25}$  qui est égale à la première fraction, & dont le dénominateur à 5 pour racine.

Ensuite la racine de 15, approchée à un centieme près, est égale à 3,87; par conséquent la racine cherchée est 3,87 divisés par 5, ou 0,774. Si la fraction  $\frac{3}{5}$  eut été réduite en décimales comme elle est égale à 0,6, la racine approchée à un millieme près (en la cherchant comme celle de 600000 unités) auroit été trouvée égale à 0,774.

73. Telle est la méthode arithmétique, d'extraire la racine quarrée d'un nombre. En algebre, les regles suivies pour le même but, sont à peu près les mêmes. On fait que si  $a$  représente une quantité, son quarré est  $a^2$ , parce qu'étant multipliée par elle-même, on doit ajouter son exposant à lui-même, ou le multiplier par 2 qui est l'exposant de la puissance. D'où il suit, que pour revenir d'un quarré à sa racine, ou pour extraire la racine quarrée d'une quantité algébrique quelconque; il faut diviser par 2 l'exposant de la quantité proposée. C'est ainsi que la racine quarrée de  $a^3$  est  $a^{\frac{3}{2}}$  (on devoit écrire les deux signes plus & moins; parcequ'il est toujours incertain, si un quarré tel que  $a^2$  par ex. résulte de  $+a$  ou de  $-a$  élevé au quarré), celle de  $a^2b^4$  est  $ab^2$ , &c. Si une quantité est composée de deux parties qui soient représentées par  $a+b$ ; son quarré, suivant les regles ordinaires, est  $a^2+2ab+b^2$ ; c'est-à-dire, qu'il est formé de plusieurs termes. C'est pourquoi, propose-t-on d'extraire la racine quarrée d'une quantité algébrique représentée par plusieurs termes, cette racine doit être composée au moins de deux termes; & la quantité proposée qui doit être considérée comme le quarré de cette racine, contient nécessairement tous les produits partiels qui sont analogues à ceux de la formule générale  $a^2+2ab+b^2$ . L'opération de l'extraction de cette racine exige alors que les termes de la quantité donnée, soient arrangés dans un ordre déterminé. Il faut que le premier terme soit, comme dans la formule, un quarré parfait & positif; & que les autres termes soient ordonnés par rapport à une des lettres, qui est élevée au quarré dans le premier terme. Après ces préliminaires, on

extrait la racine par le même procédé qui a été employé pour déterminer celle des nombres. On extrait la racine quarrée du premier terme, & on efface ce terme de la quantité proposée; ensuite on divise le premier terme du reste, par le double de la racine trouvée; & le quotient est le deuxieme terme de la racine cherchée. On vérifie cette racine, en l'élevant au quarré & en la comparant à la quantité proposée. Enfin on continue l'opération, comme pour les nombres, jusqu'à ce que tous les termes de la racine aient été déterminés. Par exemple, doit-on extraire la racine de  $2ac-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2$ . On l'ordonne par rapport à une lettre telle que  $a$  & on écrit  $a^2-2ab+2ac+b^2-2bc+c^2$ . On extrait la racine de  $a^2$  qui est  $a$ , & on l'écrit à la racine. On divise le premier terme du reste qui est  $-2ab$  par  $2a$ , & le quotient  $-b$  qu'on écrit à la racine, devient un second terme de la racine cherchée. On élève  $a-b$  au quarré, & on rétranche de la quantité proposée  $a^2-2ab+b^2$ . le reste est  $2ac+c^2-2bc$ . On continue l'opération, en divisant encore le premier terme de ce dernier reste, par le double de la racine trouvée ( $a-b$ ) ou par  $2a$  qui est le premier terme de cette racine doublée. Le quotient est  $c$ . On l'écrit à la racine. On élève au quarré la racine entière ( $a-b+c$ ); & ce quarré étant parfaitement égal à la quantité proposée, la racine cherchée se trouve être réellement & sans reste  $a-b+c$ . C'est ainsi qu'on doit extraire la racine quarrée de toute quantité algébrique.

$$\begin{array}{r|l}
 a^2-2ab+2ac+b^2-2bc+c^2 & a-b+c \\
 \hline
 -2ab+2ac+b^2-2bc+c^2 & \\
 \hline
 & +2ac-2bc+c^2
 \end{array}$$

Nous venons de voir comment on extrait une racine quarrée algébriquement, & il nous reste à faire l'application de cette méthode, aux équations du deuxieme degré, c'est-à-dire à celles dans lesquelles la la plus haute puissance de l'inconnue, est son quarré. Si on propose de déterminer la valeur de l'inconnue  $q$ , étant donnée l'équation  $q^3=b^2$  & la quantité  $b$  étant connu: il faut extraire également la racine quarrée de chacun des membres de cette équation; & cette

opération faite, on a  $q = b^{\frac{3}{2}}$ ; équation qui donne la quantité cherchée. Mais si on a l'équation,  $q = n^2 + 2bn$ , dans laquelle la valeur de  $n$  est seule inconnue & demandée, alors voici comment on la détermine, ou comment on résout cette équation. On voit que le deuxième membre ( $n^2 + 2bn$ ), s'il étoit augmenté de  $b^2$ , ou s'il étoit  $n^2 + 2bn + b^2$ , exprimeroit un carré parfait dont la racine est  $n + b$ . C'est pourquoi le 2.<sup>e</sup> membre de l'équation proposée peut être rendu susceptible d'avoir une racine carrée exacte; & on y parvient, en lui ajoutant le carré de  $b$ , ou le carré de la moitié du coefficient de l'inconnue  $n$ . Mais comme l'égalité des deux membres de l'équation donnée, ne doit pas être changée, le premier membre doit être aussi augmenté du même carré de  $b$ . L'équation proposée doit donc être changée en celle-ci  $q + b^2 = n^2 + 2bn + b^2$  & comme les racines carrées des deux membres de cette dernière équation, sont nécessairement égales, on a  $(q + b^2)^{\frac{1}{2}} = n + b$ , ou  $n = (q + b^2)^{\frac{1}{2}} - b$ . Ce procédé conduit par conséquent à la connoissance de la valeur de l'inconnue  $n$ ; & c'est celui qu'il faut suivre, pour résoudre toute équation du deuxième degré; en observant toujours, 1.<sup>o</sup> que tous les termes, où se trouve l'inconnue, soient seuls placés dans un membre: 2.<sup>o</sup> que le terme qui renferme le carré de l'inconnue, soit positif ou précédé du signe +, & dégagé de tout facteur ou diviseur étranger.

Nous avons dit plus haut que la partie qui reste d'un nombre, lors qu'on en a soustrait le plus grand carré qu'on présume y être contenu, ne doit jamais surpasser le double de la racine trouvée. Cette vérité est aisément rendue sensible par le secours de l'algèbre. En effet soit  $a$  la racine présumée d'un nombre donné ou du plus grand carré qu'il contient. Si, sur cette racine, on s'étoit trompé en moins, d'une seule unité, alors le plus grand carré contenu dans le nombre donné, seroit donc celui de  $a + 1$ , ou  $a^2 + 2a + 1$ . C'est pourquoi en retranchant  $a^2$  qui est le carré de la racine trouvée du nombre proposé, le reste doit être égal à  $2a + 1$ , si l'erreur commise sur la racine, est d'une unité entière. Par conséquent, toutes les fois

reste, dont on vient de parler, ne surpasse pas 24, on le double de la racine présumée, cette racine est convenable.

74. La méthode d'extraire la racine cubique d'un nombre quelconque, est analogue à celle que nous venons de développer. Comme elle, elle est fondée sur la forme & la composition d'une puissance troisième. Ainsi le nombre dont on propose d'extraire la racine cubique, doit toujours être regardé, dans l'opération, comme le cube de cette même racine. Ce nombre proposé est donc considéré, comme composé de quatre produits partiels; c'est-à-dire, du cube des dizaines de la racine; de celui de ses unités, & du triple produit, soit du carré des dizaines multiplié par les unités, soit des dizaines par le carré des unités; & si, n'étant pas un cube parfait, on en demande la racine cubique approchée à un dixième ou à un centième; il faut ajouter à la suite de ce nombre ou 3 ou six zéros; pour rendre le nombre de ces décimales, multiple de 3. Cette dernière règle est fondée, sur un principe déjà présenté précédemment; & nous ajouterons, que si la racine cubique d'un nombre doit être exprimée en dixièmes, par exemple, ce nombre qui est regardé comme le cube de cette racine, doit avoir trois fois plus de chiffres décimaux, ou être composé de millièmes. Si ce nombre est entier, il doit donc être réduit en millièmes, pour que sa racine soit approchée à un dixième, & il le seroit en millionnièmes, si sa racine devoit être approchée à un centième.

Après ce qui a été dit sur la racine quarrée; & après avoir démontré l'analogie des méthodes employées pour extraire les racines quarrées & cubiques des nombres; il doit suffire, pour faire connoître les règles particulières de l'extraction de la racine cubique d'un nombre quelconque, de donner un exemple détaillé de l'opération entière. Soit proposé d'extraire du nombre 75 la racine cubique approchée à un centième, sa racine doit donc être un nombre de centièmes; ainsi 75 doit être transformé en millionnièmes, c'est-à-dire, qu'il s'agit d'extraire la racine cubique de



75000000 millionnèmes; & comme elle doit être cent fois plus petite que celle de 75000000 unités, il faut extraire celle de ce dernier nombre, pour en conclure celle qui est cherchée. Il y a plus de trois chiffres dans 75000000; ainsi sa racine doit être composée, & d'un nombre de dizaines, & d'un nombre d'unités, qu'il faut chercher séparément.

Considéré comme le cube de cette racine, le nombre proposé doit contenir les quatre produits partiels qui entrent dans la composition d'un cube. L'un

$$\begin{array}{r|l} 75.000.000 & 422 \\ \hline & 110 \\ & 9120 \end{array}$$

de ces produits, qui est le cube des dizaines, est de la classe des milles; ainsi les 3 derniers chiffres de 75000000 ne peuvent en faire partie; par conséquent, on doit les séparer par un point, pour ne considérer que la partie de ce nombre, qui est placée sur la gauche, & qui est 75000. C'est en cherchant la racine cubique de 75000, séparément, qu'on détermine les dizaines de la racine demandée. Mais ce nombre a plus de trois chiffres, ainsi sa racine cubique particulière renferme des dizaines & des unités qu'il faut chercher séparément. On doit donc distraire les trois derniers chiffres de 75000, parceque le cube des dizaines de la racine de ce nombre partiel, ne peut être contenu que dans 75; & c'est en suivant ces diverses dispositions raisonnées, qu'on peut en conclure pour règle générale, que tout nombre, dont la racine cubique est demandée, doit préalablement être partagé en tranches de trois chiffres chacune, (à commencer par la droite). Procédant ensuite à chercher la racine cubique du nombre partiel 75000, on trouve que le plus grand cube renfermé dans 75 est 64. Sa racine qui est 4, est le nombre des dizaines de la racine de 75000. On retranche le cube 64 de 75, & le reste est 11: de sorte que le reste de 75000 qui est 11000, renferme les trois autres produits partiels qui entrent dans le cube de la racine de 75000. Entre ces produits, il ne faut considérer que celui du triple quarté des dizaines trouvées, multiplié par les unités cherchées. Il est de la classe des

que les centaines, & les deux derniers chiffres du reste 11000, ne peuvent en faire partie. C'est pourquoi, on doit se contenter, pour déterminer les unités de la racine de 65000, de placer à la droite du reste 11 de la première tranche, le premier chiffre 0 de la tranche suivante, pour réunir ensemble les centaines du nombre 11000. Ce nombre 110 contient un produit qui a pour facteurs, & le triple du carré des dizaines, & les unités. Ainsi on doit le diviser par le triple du carré des dizaines, pour déterminer les unités cherchées. Le quotient est 2; par conséquent la racine cubique & particulière de 75000 étant 42, ce dernier nombre exprime les dizaines de la racine totale de 75000000. Comme les unités de cette racine totale restent à chercher, il faut continuer l'opération de la même manière. On doit donc élever 42 au cube & le soustraire de 75000. Ce cube est 74088, qui diffère du précédent de 912, & qui est le plus grand cube contenu dans 75000. (Car le reste 912 ne surpasse pas le triple de la racine 42, multiplié par cette racine augmentée d'une unité. En effet ce dernier produit indiqué, est 3.42.43 ou 5418, nombre qui est bien supérieur à 912.) On écrit, à la suite du reste 912 des deux premières tranches, le premier chiffre zero de la troisième tranche, & on forme ainsi un nombre de 9120 centaines, qui contient particulièrement le produit du triple carré des dizaines trouvées 42, multiplié par les unités cherchées. On divise 9120 par le triple carré de 42, le quotient qui est à peu-près 2, exprime le nombre des unités de la racine totale: par conséquent la racine cubique de 75000000 unités est 422, en ne la déterminant qu'à une unité près. La racine cherchée de 75, & approchée à un centième, est donc 4,22. Telle est l'opération détaillée qu'il faut faire, pour parvenir à découvrir la racine cubique d'un nombre entier quelconque.

Il est aisé de conclure, de ce qui vient d'être démontré, que si on cherche la racine cubique d'un nombre de décimales, il faut, avant toute opération, rendre le nombre des chiffres décimaux, multiple de

3, par le moyen de zeros ajoutés à la suite du nombre donné; & ensuite on en extrait la racine cubique, comme s'il étoit un nombre entier, sous la condition de séparer à la racine, & sur sa droite, un nombre de chiffres, qui soit le tiers de celui des chiffres décimaux, que presente le nombre proposé. S'il est question de trouver la racine cubique d'une fraction ordinaire; on conçoit, par la formation du cube d'une fraction, qu'il faut extraire séparément la racine cubique, & du numérateur & du dénominateur. On abrège même cette opération, en transformant la fraction donnée, en une autre dont le dénominateur soit un cube parfait; ou en la multipliant par le quarré de son dénominateur: parce qu'alors on connoît la racine cubique du dénominateur de la fraction transformée, & il ne reste qu'à extraire celle de son numérateur, pour obtenir la racine cubique de la fraction proposée. Soit demandée celle de  $\frac{3}{5}$ , par exemple, il faut chercher la racine, de  $\frac{75}{125}$  qui lui est égale. Le dénominateur 125, a 5 pour racine; & celle de 75 approchée à un centieme est 4, 22, comme on l'a vu précédemment. Ainsi la fraction  $\frac{3}{5}$  a pour racine cubique 4,22 divisés par 5, ou 0,844. Si on cherchoit à un millieme près, celle de la quantité décimale 0,6; suivant les regles données ci-dessus, on la concluroit de la racine de 600000000 unités, & on trouveroit qu'elle est 0,844, ou qu'elle est égale à celle de  $\frac{3}{5}$ ; comme cela doit être, puisque  $\frac{3}{5}$  & 0,6 sont deux quantités parfaitement égales entr'elles.

75 Si une quantité est représentée algébriquement par  $a$ , son cube est  $a^3$ ; car elle doit être trois fois facteur dans son cube: & comme pour former un produit de lettres semblables (58), il faut ajouter ensemble leur exposans, le nombre 3 doit être l'exposant de  $a$  élevé au cube. De là il suit en général, que pour extraire la racine cubique d'une quantité algébrique, il faut diviser son exposant par 3. C'est ainsi que la racine cubique de  $a^2$  est  $a^{\frac{2}{3}}$ ; & il n'y a pas ici, comme pour la racine quarrée, d'in-

certitude sur le signe, parceque le cube d'une quantité, est, comme elle, positif ou négatif.

On fait aussi que le cube, d'une quantité algébrique qui a plus d'un terme, & qui est représentée par  $a+b$ , est  $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ; & c'est en remarquant cette composition du cube, qu'il devient aisé de fixer les regles de l'extraction de la racine cubique. En effet, une quantité algébrique, composée de plusieurs termes, étant proposée, & sa racine cubique étant demandée, il faut la comparer à la formule du cube de  $a+b$ , parce qu'elle doit être considérée comme le cube de sa racine. Ainsi elle doit être ordonnée de maniere que son premier terme soit un cube parfait, & que le rang des autres termes, soit déterminé, par rapport à une des lettres qui est élevée au cube dans le premier terme.

Après cet arrangement préalable, on extrait la racine cubique du premier terme, en divisant son exposant par 3, & on le retranche de la quantité donnée. Le reste ne contient plus alors que trois autres produits partiels, déjà indiqués par la formule; & en divisant le premier terme de ce reste, par le triple quarré de la racine trouvée, on détermine par le quotient, le second terme de la racine cherchée. On vérifie ensuite cette racine, en l'élevant au cube; & en comparant ce cube à la quantité proposée. On continue enfin la même opération jusqu'à ce que tous les termes de cette racine aient été trouvés. Voici un exemple qui va compléter les éclaircissmens qu'on peut desirer. Soit proposé d'extraire la racine cubique de  $x^6-8b^3x^3-6bx^5+12b^2x^4$ . On doit l'ordonner par rapport à la lettre  $x$ , & l'écrire dans l'ordre ci-joint.

La quantité étant présentée sous cette forme, on extrait la racine cubique de  $x^6$  en divisant l'expo-

$$\begin{array}{r} x^6-6bx^5+12b^2x^4-8b^3x^3 \\ \hline -6bx^5+12b^2x^4-8b^3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2-2bx \end{array} \right.$$

sant 6 par 3 & cette racine est  $x^2$ . Retranchant  $x^6$  de la quantité proposée, on divise le premier terme du reste, c'est-à-dire  $-6bx^5$  par le triple quarré de la racine trouvée,

ou par  $3x^4$ , & le quotient  $-2bx$  devient le second terme de la racine. Enfin on élève  $x^2-2bx$  au cube ; & comme ce cube est parfaitement égal à la quantité proposée, la racine cubique de celle-ci est réellement & sans reste,  $x^2-2bx$ .

Nous avons dit en parlant des racines cubiques des nombres, que le reste de l'extraction, ne doit jamais surpasser le triple produit de la racine trouvée, multipliée par cette racine même augmentée d'une unité ; & ce principe devient d'une démonstration facile, par le moyen de l'algèbre. Car soit  $a$  la racine cubique présumée d'un nombre donné, ou du plus grand cube qu'il peut contenir ; si, sur cette racine on avoit fait une erreur en moins, & d'une seule unité, alors le nombre proposé devoit renfermer le cube de  $(a+1)$  ou  $a^3+3a^2+3a+1$ . Le reste seroit donc égal, ou supérieur à  $3a^2+3a+1$  ; par conséquent, si ce reste ne surpassoit pas  $3a^2+3a$ , ou  $3a(a+1)$ , la racine trouvée ne peut être en erreur d'une unité, & elle doit être regardée comme convenable, ou comme celle du plus grand cube contenu dans le nombre proposé.

76. *Rapports & proportions des nombres.* Dans l'art de la marine, il est sans doute des rapports de convenance, qui servent à déterminer, la grandeur des bâtimens, leur artillerie, leur forme, leur solidité & le nombre des hommes qui peuvent être nécessaires pour les conduire à leur destination ; mais l'idée qu'on attache alors au mot de rapport n'embrasse que des qualités qui rendent un vaisseau propre à remplir telles & telles vues, comme à faire telle campagne, à combattre en ligne, à résister à des mers dures, à porter de grands poids, à avoir une marche rapide, à entreprendre diverses pêches, divers genres de commerce, &c. Des tels rapports peu susceptibles d'être soumis à un calcul précis, ne sont pas ceux que l'arithmétique considère. Celle-ci n'apprend à comparer que des nombres ; & comme on a vu que les nombres ont été imaginés pour exprimer de combien d'unités une quantité est composée ; toutes les quantités de même espèce, ne deviennent comparables que par les nombres seuls

qui expriment leur grandeur. Ainsi dans un vaisseau, on compare, ou à sa largeur principale, ou à la longueur de sa quille, les dimensions & des pièces de sa charpente, & des mâts, & des vergues, & des voiles, & des cordages, & des ancres, & des cables, &c, en les estimant en pieds, ou en pouces, ou en lignes. Ainsi, dans le commerce avec l'étranger, on compare les mesures de France, avec celles qui sont adoptées par les autres nations, & qui sont connues sous le nom de livres, de pieds, de brasses, de tonneaux, de lasts, de lieues, de milles &c. Les résultats de ces comparaisons ne peuvent consister que, dans la différence des quantités mises en parallèle, ou dans le nombre de fois qu'elles se contiennent : & de tels résultats sont, ce qu'on nomme les rapports, ou les raisons de ces quantités. Il y a cette distinction, que le rapport qui exprime combien la grandeur d'une quantité surpasse celle d'une autre, est nommée arithmétique, tandisque qu'on donne le nom de géométrique, à celui qui exprime combien de fois l'une contient l'autre. Conséquemment à ces définitions, on voit qu'en traitant de la soustraction, & de la division des quantités, nous avons donné toutes les règles qui peuvent être nécessaires pour calculer ces différens rapports. Ainsi le nombre 12 étant comparé au nombre 4, leur rapport arithmétique, ou leur différence est 8; & leur rapport géométrique, ou le quotient de 12 divisé par 4, est 3. De même le port d'un bâtiment étant de 250 tonneaux, & celui d'un autre bâtiment, de 750 tonneaux, leur rapport arithmétique est 500 tonneaux : & leur rapport géométrique est 3; c'est-à-dire, que la charge qui peut être transportée par le dernier, surpasse de 500 tonneaux, celle du premier, & se trouve être en même temps, trois fois plus grande qu'elle.

77. La différence de deux quantités, ne varie pas lorsque chacune est également augmentée ou diminuée; par conséquent le rapport arithmétique de deux termes reste constamment le même, quoique ces deux termes soient augmentés, ou diminués d'un même nombre. Le rapport arithmétique de 12 à 4 est 8, & il

reste toujours 8 , quoiqu'on ajoute , par exemple , le nombre 20 à l'un & à l'autre ; car la différence de 32 à 24 est 8 , ainsi que celle de 10 à 2.

Nous avons fait voir précédemment , (25) en parlant de la division des nombres , qu'un dividende & son diviseur , étant également multipliés , ou divisés par un même nombre , le quotient qui est en résulte , est constamment le même dans toutes ces combinaisons. Par conséquent le rapport géométrique de deux quantités , ne peut pas changer , lors qu'on multiplie , ou qu'on divise l'une & l'autre , par un même nombre. Les nombres 12 & 4 , par exemple , étant divisés chacun par 2 , & multipliés l'un & l'autre par 10 , conservent entr'eux le même rapport géométrique , qui est 3. Car le nombre 2 est contenu , trois fois dans six , comme 40 dans 120 , & comme 4 dans 12.

Un rapport géométrique qui consiste dans la division d'une quantité par celle qui lui est comparée , peut aussi être regardé comme une fraction dont la première quantité est le numérateur , & la seconde le dénominateur ; & comme une fraction peut être le résultat de la multiplication de deux , ou de plusieurs fractions , un rapport géométrique peut aussi être le résultat de la multiplication de plusieurs autres rapports géométriques. Dans ce cas , un tel rapport reçoit le nom de rapport composé. C'est ainsi que le rapport de 24 à 240 , est composé de deux rapports qui sont ceux de 4 à 12 , & de 6 à 20. Car la fraction  $\frac{24}{240}$  , est le produit de la fraction  $\frac{4}{12}$  multipliée par  $\frac{6}{20}$ . De même qu'on peut composer un rapport géométrique , on peut aussi le décomposer en rapports partiels , & cette double opération est souvent utile pour conduire à la solution de certains problèmes.

78. Des rapports arithmétiques ou géométriques , qui ne sont que des différences , ou des quotiens , sont des nombres qui peuvent être comparés entr'eux comme d'autres quantités. Deux rapports peuvent donc être égaux , ou inégaux ; & leur égalité est sur-tout intéressante par ses conséquences. Dans ce cas , on peut toujours dire que le rapport de deux quantités est

le même que celui de deux autres quantités; ou que de quatre quantités comparées deux à deux dans ces rapports, la première est à l'égard de la seconde, comme la troisième, est à l'égard de la quatrième. L'assemblage de quatre quantités qui sont rangées dans l'ordre indiqué, & qui sont comparées deux à deux, reçoit le nom de proportion. Quatre quantités sont donc en proportion, ou peuvent être mises en proportion, lorsque le rapport des deux premières est égal à celui des deux dernières. Comme nous avons défini deux espèces de rapports, il y a aussi deux espèces de proportions; & une proportion est arithmétique ou géométrique, selon que les rapports dont elle est composée, sont arithmétiques, ou géométriques.

Remarquons que, pour simplifier l'énoncé de toutes ces comparaisons, on est convenu de signes & de noms particuliers. S'il faut indiquer que le rapport de 12 à 4 est arithmétique, on écrit 12.4; c'est-à-dire, qu'un point sert à séparer les deux nombres comparés: & la séparation est faite par deux points, lorsque le rapport est géométrique, comme celui-ci 12:4. deux rapports égaux qui composent une proportion, sont aussi séparés l'un de l'autre; mais c'est par deux points dans une proportion arithmétique, comme on le voit dans celle-ci, 16.9:25.18; & par 4 points, dans la proportion géométrique, comme dans la suivante 24:6::36:9. Les deux quantités qui sont comparées dans un même rapport, sont nommées les deux termes de ce rapport. La première est distinguée sous le nom d'antécédent, & la seconde sous celui de conséquent. Enfin dans une proportion, l'antécédent du premier rapport, & le conséquent du second, sont placés à ses extrémités, & leur rang leur a fait donner le nom d'extrêmes; comme le rang des deux termes intermédiaires (dont l'un est conséquent du premier rapport, & l'autre antécédent du second) les a fait distinguer sous le nom de termes moyens, ou de moyens.

79. Toute proportion arithmétique, a cette propriété particulière, savoir: que la somme de ses deux termes extrê-



mes est égale à celle de ses deux termes moyens. En effet dans une proportion quelconque donnée, imaginons qu'à chacun de ses deux premiers termes, on ajoute le second extrême ou le dernier conséquent; alors le premier terme devient la somme des deux extrêmes de la proportion donnée; & comme le rapport primitif, n'est pas changé par cette opération supposée, le nouvel antécédent est égal à son conséquent, augmenté de la raison qui regne dans la proportion, c'est-à-dire, au premier moyen de la proportion donnée, après qu'il a été augmenté, & du dernier conséquent, & de la raison. Remarquons actuellement que la somme particulière du dernier conséquent & de la raison, est égale au second antécédent ou au second moyen; par conséquent enfin, la somme des deux extrêmes, est égale à celle des moyens, dans une proportion arithmétique quelconque.

Appliquons ces raisons à un exemple pour les rendre plus sensibles. Soit la proportion  $16.9:25.18$ ; on peut dire sans altérer l'égalité des rapports,  $16+18.9+18:25.18$ . Le premier terme de cette seconde proportion est la somme des extrêmes de la première, & il doit être égal, au second terme ( $9+18$ ) augmenté de la raison 7 qui est celle de la proportion (76); mais cette raison ajoutée au seul conséquent 18, doit rendre celui-ci égal à son antécédent qui est le second moyen; par conséquent la somme du second terme de cette seconde proportion & de la raison, n'est autre chose que la somme des deux moyens de la première proportion donnée: donc la somme des extrêmes ( $16+18$ ) doit être égale à ( $9+25$ ) qui est la somme des moyens de la proportion donnée; & cette égalité est confirmée par les résultats de l'addition séparée, soit des deux extrêmes, soit des deux moyens; car l'un & l'autre sont 34.

Lorsque dans une proportion arithmétique, les deux termes moyens sont les mêmes comme dans celle-ci  $12.7:7.2$ ; cette proportion reçoit le nom de continue; & on énonce sa propriété, qui est une suite

de la propriété de toute proportion, en disant que la somme de ses deux termes extrêmes, est égale au double d'un des termes moyens; parcequ'alors la somme de ses deux moyens, est le double d'un de ces moyens.

Si nous avons remarqué & démontré avec soin la propriété générale des proportions arithmétiques, c'est dans des vues d'utilité, & parce qu'elle présente une règle sûre pour déterminer un des termes, d'une proportion arithmétique, dont les trois autres termes sont connus. En effet, le quatrième terme d'une proportion est-il inconnu; sa valeur est la différence du premier terme à la somme des moyens; parceque la somme des deux extrêmes de la proportion est égale à celle des deux moyens, & si de la première somme on retranche le premier extrême, le reste seroit le deuxième extrême; par conséquent si de la somme des moyens, on soustrait l'extrême connu, la différence doit être égale à l'extrême cherché. Si le terme demandé étoit un moyen, on le détermineroit en soustrayant le moyen connu, de la somme des deux extrêmes. Ainsi cherche-t-on le troisième terme  $x$  de la proportion suivante  $16.9:x.18$ , on doit ajouter ensemble les extrêmes  $18$  &  $16$ , & de la somme  $34$ , retrancher le moyen  $9$ ; alors la différence  $25$  est le moyen cherché. Ces mêmes principes fournissent aussi une règle générale, pour trouver un moyen proportionnel arithmétique entre deux nombres donnés; c'est-à-dire pour compléter une proportion continue dont le terme moyen est inconnu. Il s'agit alors de prendre la moitié de la somme des deux nombres donnés, parcequ'ils doivent être les extrêmes, de la proportion proposée; & cette demi-somme est le moyen cherché, puisque le double de ce moyen doit être égal à la somme des extrêmes. Si, par exemple, on demande qu'elle est le terme moyen arithmétique qu'on peut placer entre deux nombres donnés  $8$  &  $24$ , pour composer une proportion continue; il faut ajouter  $8$  &  $24$  qui doivent être les extrêmes de la proportion; & la moitié  $16$  de leur somme, est alors le moyen demandé, de sorte qu'on

peut

peut faire cette proportion, continue 8.16:16.24: parce que le rapport de 8 à 16 est 8, tel que celui de 16 à 24.

L'usage de la propriété des proportions arithmétiques est extrêmement borné; cependant il est quelque cas où elle est utilement employée dans la marine. Par exemple: supposons que les tirans d'eau d'un vaisseau à flot, soient, de 20 pied 6 pouces à l'avant, de 22 pieds 3 pouces à l'arrière, & qu'on demande son tirant d'eau moyen, ou le tirant d'eau du vaisseau, mesuré au milieu de la longueur de sa quille. Ce tirant d'eau cherché, est un moyen proportionnel arithmétique, entre les deux tirans d'eau donnés; parcequ'il doit différer également de l'un & de l'autre. On le détermine, comme on l'a dit précédemment, en ajoutant ensemble les deux tirans d'eau donnés, (qui doivent former les extrêmes de la proportion continue demandée,) & en prenant la moitié de leur somme. Ce moyen est ici 21 pieds 4 pouces 6 lignes, & tel doit être le tirant d'eau moyen du vaisseau, ou la profondeur à laquelle le milieu de la longueur de sa quille, est placé au dessous du niveau de l'eau. Dans l'art de la navigation, on cherche souvent quelle est la latitude, qui tient le milieu, entre la latitude du point de départ d'un vaisseau, & celle du point de son arrivée. Cette latitude moyenne, qu'on nomme aussi latitude du moyen parallèle, est un moyen proportionnel arithmétique, entre les deux latitudes données; par conséquent elle est égale à la moitié de de la somme de ces dernières. Ainsi la règle générale à observer & observée pour trouver la latitude du moyen parallèle, est de prendre la moitié de la somme des latitudes de départ & d'arrivée.

80. La propriété de toute proportion géométrique, est que le produit de ses deux termes extrêmes, est égal à celui de ses deux termes moyens. Car considérons une proportion géométrique quelconque, & imaginons que ses deux premiers termes, dont l'un est un extrême, & l'autre un moyen, soient multipliés par le deuxième extrême, ou le dernier con-

féquent de la proportion donnée; alors le premier terme devient le produit des extrêmes de la première proportion: & comme le rapport primitif n'est pas changé, ce nouvel antécédent, est égal à son conséquent multiplié par la raison de la proportion, c'est-à-dire, au premier moyen donné, multiplié par le deuxième conséquent, & multiplié encore par la raison. Comme le produit particulier du deuxième conséquent multiplié par la raison, est égal au 2.<sup>e</sup> antécédent ou au second moyen; il s'ensuit que le produit du premier moyen multiplié non seulement par le deuxième conséquent, mais aussi par la raison, doit être égal au produit des deux moyens; par conséquent aussi le nouvel antécédent, ou le produit des deux termes extrêmes de la proportion donnée, est égal au produit de ses deux termes moyens. Par exemple: soit la proportion géométrique  $36 : 12 :: 24 : 8$ . Elle peut être transformée en celle-ci  $(36.8) : (12.8) :: 24 : 8$  où l'on voit que le produit  $36.8$  est celui des deux extrêmes de la première proportion. On fait aussi que l'antécédent  $36.8$  est égal au conséquent  $12.8.3$  & que  $8.3$  est un produit égal au deuxième moyen  $24$ : par conséquent le produit de  $36$ , multiplié par  $8$ , doit être égal à celui de  $12$  multiplié par  $24$ . En effet le produit des moyens de la proportion supposée, est  $288$ , ainsi que celui de ses extrêmes.

Si dans une proportion géométrique, les deux moyens sont égaux entre eux, comme dans celle-ci  $36 : 12 :: 12 : 4$ ; la même propriété qui vient d'être démontrée doit avoir encore lieu: mais à cause des circonstances, elle est énoncée différemment, & on dit, que dans de telles proportions nommées continues, le produit des extrêmes est égal au carré d'un des termes moyens; parce qu'effectivement le produit des moyens, est dans ce cas, celui d'un terme moyen multiplié par lui-même, où son carré. Ainsi dans l'exemple indiqué, le produit de  $36$  multiplié par  $4$ , doit être égal au carré de  $12$ , & l'opération justifie cette égalité.

81. Il résulte, de cette propriété des proportions géométriques, des conséquences dont l'application est aussi fréquente qu'elle est utile. En effet, on peut en conclure une règle propre à faire connoître un des termes, d'une proportion géométrique, dont les trois autres sont donnés. Cette règle est, qu'un terme, s'il est un extrême, est toujours égal au quotient de la division du produit des moyens par l'extrême connu; ou s'il est un moyen, qu'il est égal au quotient de la division du produit des extrêmes par le moyen donné. Cette règle est fondée sur ce que le produit des extrêmes, étant égal à celui des moyens, on peut au besoin, considérer le produit des extrêmes, comme étant celui des moyens ou réciproquement. Comme le quotient du produit de deux facteurs, qui est divisé par un de ses facteurs, est toujours égal à l'autre facteur; il s'en suit que, si l'un quelconque, du produit des extrêmes d'une proportion, ou de celui des moyens, est divisé par un des extrêmes, le quotient doit être l'autre extrême; & que si le diviseur est un terme moyen, le quotient doit être l'autre moyen. Dans une proportion continue, le produit des extrêmes est égal au carré d'un des termes moyens. Ainsi on doit conclure de ce principe que, pour déterminer un terme moyen géométrique, entre deux nombres donnés, il faut extraire la racine carrée du produit des deux nombres. Car ce terme cherché est celui qui doit former chaque moyen d'une proportion continue, dont les nombres donnés sont les deux extrêmes; & comme le produit de ces derniers, est égal au carré du terme moyen, celui-ci doit être la racine carrée du produit des deux nombres donnés.

82. Dans une proportion géométrique quelconque, l'ordre des termes peut être changé de plusieurs manières, sans qu'ils cessent de former une proportion, pourvu qu'une certaine condition soit observée. Cette condition est qu'il y ait toujours égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens. Ainsi dans une proportion donnée, les

extrêmes peuvent être mis à la place des moyens & réciproquement. Les extrêmes peuvent être mis l'un à la place de l'autre; & les mêmes changemens peuvent être faits dans le lieu des moyens; parceque dans tous ces cas, le produit des extrêmes reste nécessairement égal à celui des moyens. On peut dire aussi, que si deux produits quelconques sont égaux, leurs facteurs peuvent composer une proportion géométrique, parcequ'on peut regarder les facteurs de l'un de ces produits, comme les extrêmes d'une proportion, dont les moyens sont les facteurs du second produit. Par exemple: on fait que le produit 12.4 est égal à celui-ci 6.4.2. alors en regardant le premier produit comme celui des extrêmes d'une proportion, on peut dire  $12:6::4.2:4$  ou  $12:6::8:4$ . l'ordre & la grandeur de ces quatre termes, sont tels que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; par conséquent ces quatre termes forment une proportion géométrique, & le rapport des deux premiers termes doit être égal à celui des deux derniers. Effectivement chacun de ces rapports est 2.

Etant donnés quatre termes quelconques en proportion géométrique, on peut, en conclure deux proportions différentes. On peut dire, la somme des deux premiers termes, est au second; comme la somme des deux derniers est au dernier: ou la différence des deux premiers termes, est au deuxième: comme celle des deux derniers, est au quatrième. En effet, par un tel arrangement, chaque antécédent est augmenté ou diminué de son conséquent; c'est pourquoi le rapport qu'il avoit avec lui est augmenté ou diminué d'une unité, puisqu'il le contient alors une fois de plus ou de moins: mais avant ce changement, chaque antécédent contenoit son conséquent le même nombre de fois, puisqu'il y avoit proportion, par conséquent l'égalité subsiste encore entre ces nouveaux rapports, après l'opération indiquée: & leurs termes, doivent former les proportions qui ont été énoncées. Ainsi étant donnée la proportion  $36:9::$

24:6 on peut en conclure les deux proportions suivantes  
 45:9::30:6 & 27:9::18:6.

Si deux proportions géométriques sont multipliées ou divisées l'une par l'autre, c'est-à-dire antécédent par antécédent, & conséquent par conséquent; les produits ou les quotiens qui en résultent, sont aussi des termes en proportion. Car, en faisant une telle opération, on multiplie ou on divise les deux rapports égaux d'une proportion, par deux quantités égales, qui sont les rapports d'une deuxième proportion: par conséquent les produits ou les quotiens résultans, doivent être constamment égaux, quoiqu'ils cessent d'être les mêmes: & les termes de ces rapports composés, ou décomposés, forment nécessairement une proportion. Soit proposé de multiplier par ordre les termes des

deux proportions suivantes  $\left\{ \begin{array}{l} 6:2::15:5 \\ 24:3::32:4 \end{array} \right\}$  les quatre produits sont 144, 6, 480, 20; & ils forment une proportion 144:6::480:20; parce que le rapport des deux premiers termes est 24, tel que celui des deux derniers. Ce rapport est composé des rapports particuliers 3, & 8 des proportions données. Si de cette proposition générale, on descend au cas particulier de la multiplication d'une proportion par elle-même; on doit en conclure que quatre termes, étant en proportion géométrique, leurs quarrés doivent aussi être en proportion. On démontreroit de la même manière que leurs cubes & leurs puissances plus élevées, doivent aussi être en proportion. Enfin il faut encore en conclure que les racines de ces mêmes puissances doivent être proportionnelles: ou que les racines quelconques, de quatre termes en proportion, doivent elles-mêmes être en proportion.

83. Les applications des propriétés des proportions arithmétiques, ainsi que celles des propriétés des proportions géométriques sont fréquentes & nombreuses. Il est très-aisé de s'en convaincre généralement, en considérant que les objets les plus ordinaires de nos idées, se présentent toujours à notre esprit, avec des rapports plus ou moins composés;

& que parmi ces rapports, ceux qui sont égaux sont les élémens d'autant de proportions. Dans la pratique de l'art de la marine, il est une foule de cas où l'usage des propriétés des proportions géométriques devient utile & nécessaire; & sans les parcourir dans leurs variétés, je vais donner des exemples qui, par leur ensemble, pourront fournir assez de modèles à suivre, dans la résolution des problèmes ordinaires, ou dans l'application de la règle, par laquelle on détermine un terme quelconque d'une proportion géométrique, dont les trois autres termes sont connus.

*Problème premier.* Un vaisseau a fait 13 lieues en 5 heures, & on demande, combien il doit en faire dans 24 heures, en supposant son mouvement uniforme & constant.

La régularité de la marche de ce vaisseau, porte à conclure que dans un intervalle de temps, double ou triple, il doit franchir un espace deux ou trois fois plus grand. Ainsi le rapport des intervalles de temps est égal à celui des espaces parcourus ou à parcourir. C'est pourquoi on peut faire cette proportion  $5:24::13:x$  (je nommerai toujours  $x$ , la quantité cherchée.) On pourroit dire aussi,  $24:5::x:13$ , & en appliquant la règle annoncée, on trouve que la valeur de  $x$  qui est le quotient, du produit de 13 lieues multiplié par 24, divisé par 5, est de  $62\frac{2}{5}$  lieues. Le vaisseau d'après sa marche, supposée uniforme pendant 5 heures de temps, doit donc faire  $62\frac{2}{5}$  lieues en 24 heures.

2.<sup>e</sup> On fait que l'entretien de l'équipage d'un bâtiment, doit coûter 156 l. par semaine, ou pendant sept jours; & il est question de savoir à quel prix doit monter cette dépense, pendant la durée d'une campagne, qu'on suppose de 9 mois, ou de 270 jours.

Cette question doit être résolue comme la précédente, parceque la dépense journalière de l'équipage d'un vaisseau peut être supposée régulière, & que dans de l'espace 8 jours, par exemple, elle est deux fois plus grande que pendant 4 jours. Par conséquent le rapport des nombres, de jours de dépenses, est égal à celui



des valeurs de ces mêmes dépenses. Ainsi dans cette question, on doit chercher le terme inconnu, de la proportion suivante  $7:270::1561:x$ ; & on trouve que la dépense doit monter à 60210 liv.

3.<sup>e</sup> Une somme de 30000 doit être partagée entre tous les hommes de l'équipage d'un vaisseau; & on demande ce qui doit revenir à un matelot, à qui on a assuré deux parts, en supposant qu'il y ait 300 parts égales à distribuer.

La somme de 30000 l. est supposée divisée en 300 parties égales, & tout homme qui reclame avec justice un plus grand nombre de parts, doit obtenir une plus grande portion proportionnelle de la somme à partager. C'est pourquoi celui qui doit avoir dix parts par exemple, recevra une somme deux fois plus grande que celui qui n'a droit de prétendre qu'à 5 parts. On doit donc trouver la somme qui revient au matelot qui demande deux parts, en faisant la proportion  $300:2::30000:x$ ; & cette quantité  $x$  qui est de 200 liv. est la somme, que ce matelot doit recevoir dans le partage supposé.

4.<sup>e</sup> On veut faire assurer, sur un vaisseau, dont la campagne est déterminée, une somme de 155968 l. : & les assureurs exigent une prime de  $4\frac{1}{2}$  pour cent; on demande quel est le prix total de l'assurance de la somme proposée.

Les conditions sont par conséquent, que chaque centaine de liv., doit payer, pour être assurée, 4<sup>l</sup> 10<sup>s</sup> de prime; & comme la somme proposée doit payer une prime proportionnelle, à celle qui est demandée pour 100 l. on peut faire la proportion suivante  $100^l:4^l 10^s::155968:x$ . La prime cherchée qui est désignée par  $x$  est de 7018<sup>l</sup> 11<sup>s</sup> 2, <sup>d</sup>4.

5.<sup>e</sup> Certaines marchandises ont été vendues pour la somme de 45671, payable à six mois; & avec la condition que le vendeur escompteroit à raison d'un intérêt annuel de six pour cent, si l'acheteur payoit avant l'échéance des six mois : on demande avec quelle somme l'acheteur peut s'acquitter, s'il

veut payer, au moment de la livraison des marchandises.

On voit que la somme de 4567<sup>l</sup> renferme, & la somme à payer au moment de la livraison, & l'intérêt de cette somme dernière, pendant six mois. Ainsi il s'agit de séparer ces deux parties, qui sont confondues dans 4567<sup>l</sup>. D'après les conditions énoncées, une somme de 100 livres, payable à la livraison, devoit produire au vendeur 103<sup>l</sup> au bout de six mois: c'est pourquoi la somme 4567<sup>l</sup>, doit être à la somme à payer, dans le rapport de 103 à 100. On peut donc faire la proportion  $103:100::4567:x$ : & ce quatrième terme  $x$ , étant trouvé de 4434<sup>l</sup> 10<sup>s</sup>; l'acheteur ne doit compter au moment de la livraison que cette dernière somme, pour payer les objets de ses achats. Si le débiteur ne payoit qu'au bout de cinq mois, il lui reviendrait encor une remise ou un escompte proportionnel. A cette époque, chaque objet, qui eut été payé 100<sup>l</sup> à la livraison, doit l'être par 102<sup>l</sup> 10<sup>s</sup> au bout de cinq mois, ainsi en faisant cette proportion  $102^l\ 10^s:100::4567:x$ , le terme  $x$  est nécessairement la somme qui est due à la fin des cinq mois, lorsque la somme à payer après six mois, est 4567<sup>l</sup>.

6.<sup>e</sup> L'équipage d'un vaisseau qui est en mer, n'a plus que pour douze jours de vivres; cependant, suivant les conjectures les plus probables, il ne peut arriver à un port qu'après trente jours de route: & on demande quel changement on doit faire à la ration ordinaire, de manière que les vivres qui restent, fussent pour tous le tems qu'on croit devoir passer au large.

Cette ration doit diminuer & devenir d'autant plus petite, à l'égard de la ration ordinaire, que le nombre des jours que le vaisseau doit rester en mer, est plus grand que celui des jours de vivres. Par conséquent ces rations comparées se contiennent, dans un ordre opposé à celui des intervalles de tems correspondans. On doit donc dire que ces rations sont entr'elles dans un rapport inverse des nombres de jours indiqués. Ainsi la ration nouvelle ou diminuée, est à la ration ordinaire, comme

12 font à 30; par conséquent, si la ration ordinaire est prise pour l'unité, & la ration nouvelle désignée par  $x$ , on doit faire la proportion  $30:12::1:x$ ; & la ration diminuée, ne doit donc plus être, dans les circonstances supposées, que les  $\frac{12}{30}$  ou les  $\frac{2}{5}$  de la ration ordinaire. Chaque homme de l'équipage, ne peut donc plus réclamer que les  $\frac{2}{5}$  des vivres qu'il recevoit avant cette époque. (On donne à cette règle de trois, le nom d'inverse, tandis que les précédentes sont nommées directes. Mais les noms sont superflus, par-tout où le raisonnement seul doit servir de guide.)

7.<sup>e</sup> On avoit accordé à un équipage composé de 125 hommes, une gratification d'une certaine somme; & la mort ou l'absence ont réduit le nombre des co-partageans, à 75: on demande quelle est l'augmentation de la part de chacun de ces derniers.

Cette part est augmentée d'autant plus, que le nombre des co-partageans a diminué davantage. Le rapport de la part primitive de chacun, à la part nouvelle des hommes présens, est donc inverse de celui des nombres des partageans: ainsi regardant comme précédemment, la part primitive comme l'unité, on peut dire  $1:x::75:125$ ; c'est-à-dire en déterminant  $x$ , que la part de chacun des 75 hommes présens, est égale aux  $\frac{125}{75}$  ou au  $\frac{5}{3}$  de leur part primitive; cette part est donc augmentée des deux tiers.

8.<sup>e</sup> Un capitaine français, commandant un bâtiment, est obligé de relâcher en Angleterre; & il fait pour 200 livres sterlings de dépenses, qu'il ne peut payer qu'en lettres de change. On demande quel est le nombre de livres tournois que doit présenter sa traite sur son correspondant, ou sur son armateur français; en supposant que le change de l'Angleterre sur la France, soit alors de 25 deniers sterlings.

La question se réduit à convertir 200<sup>l</sup> sterlings en livres tournois; ou bien à chercher une somme de livres tournois, qui soit égale à celle de 200<sup>l</sup> sterlings. Un tel rapport d'égalité, qui doit regner entre ces

deux sommes, ne peut suffire seul pour cette recherche; mais un 2.<sup>e</sup> rapport d'égalité est donné par le change supposé. Car il indique que l'Angleterre donne 25 deniers sterlings pour 3 liv. tournois; ainsi reduisant en deniers 200<sup>l</sup>. sterlings, à raison de 240 pour une livre; on peut dire  $48000:x::25:3$ : & la quantité  $x$  qui vaut 5760<sup>l</sup>, est le montant cherché de la lettre de change, exprimé en livres tournois. Ce capitaine pour acquitter sa dette, doit donc tirer sur son armateur français, en faveur de son créancier anglais, une lettre de change de 5760 liv. Cette opération de change est simple, & directe, mais ses résultats quoique justes ne sont pas toujours ceux qui conviennent le mieux. Un capitaine, dans la position où nous venons de l'imaginer, & attentif à l'intérêt de ses commettans, doit, avant de tirer directement sur la France, examiner s'il ne seroit pas plus avantageux, de faire payer à l'Angleterre la somme qu'il lui doit, en tirant sur un correspondant étranger, à qui son correspondant françois, seroit une remise déterminée par le change. Par exemple, supposons le change de Londres avec la France, de 25<sup>d</sup>; celui d'Amsterdam avec la France de 48<sup>d</sup> de gros; & celui d'Amsterdam avec Londres de 36. Comme Amsterdam donne à Londres 36<sup>d</sup> de gros pour 20<sup>d</sup> sterlings, on détermine aisément, par la proportion suivante, le nombre de deniers de gros qu'Amsterdam doit donner pour 200<sup>l</sup> sterlings,  $20:36::48000;x$ . Ainsi ce quatrième terme étant 86400 deniers de gros; c'est avec cette somme, que la Hollande acquitteroit la dette, que le capitaine français a contracté en Angleterre. Quant à la remise que le correspondant français doit faire au payeur hollandais pour le rembourser; elle est proportionnelle au change qui annonce que 3 liv. tournois peuvent payer en Hollande 48 deniers de gros; & par conséquent on en trouve le montant par cette proportion  $48:3::86400:x$ . Ce dernier terme est 5400, c'est-à-dire que, par cette nouvelle opération de change; le capitaine ne seroit payer que 5400<sup>l</sup> à son armateur français, au lieu de 5760<sup>l</sup> qu'indiquoit la première opération.

9.<sup>e</sup> Un bâtiment a fait en mer des avaries grosses, qui sont évaluées à 3000<sup>l</sup>, & qui doivent être payées par trois personnes associés dans l'armement de ce bâtiment. Mais les intérêts de ces associés, ne sont pas les-mêmes : le premier a un intérêt de 300 louis, celui du deuxième est de 700 louis, & celui du 3.<sup>e</sup> est de 500 louis ; & chacun devant contribuer au paiement, du dommage estimé 3000<sup>l</sup>, en raison de son intérêt particulier ; on demande quelle est la part contributive de chaque associé.

La somme de 3000<sup>l</sup>, doit être partagée en trois parties, qui soient entr'elles comme les nombres 300, 700, & 500, ou comme 3, 7 & 5 : & il y a entre le dommage total & la somme des intérêts, le même rapport, qu'entre une portion de ce dommage & l'intérêt partiel qui doit l'acquitter. C'est pourquoi, on doit trouver la part contributive de chaque associé par une proportion. Par exemple, s'agit-il de déterminer la somme qui doit être payée par le premier associé, & qui est désignée par  $x$  : on doit dire 1500:3000::300: $x$  & on trouve que  $x$  ou cette part, est 600<sup>l</sup>. Deux semblables proportions, en changeant les termes convenablement, conduiroient aussi à trouver que la part du 2.<sup>e</sup> associé est de 1400<sup>l</sup>, & celle du 3.<sup>e</sup> de 1000<sup>l</sup> : & ces trois parties, ont entr'elles les rapports qui ont été indiqués.

10.<sup>e</sup> Une somme de 10000<sup>l</sup>, doit être partagée entre trois personnes associés dans un commerce ; mais elle doit l'être de manière, que la part du 2.<sup>e</sup> associé soit double de celle du premier ; & celle du 3.<sup>e</sup>, triple de la part du second. On demande quelle somme doit recevoir chacun de ces associés.

Cette question se réduit à celle de partager 10000<sup>l</sup> en trois parts, qui soient entr'elles comme les nombres 1, 2 & 6 ; & la somme de ces derniers nombres, étant 9, il y a entr'elle & la somme à partager, le même rapport, qu'entre l'un quelconque de ces nombres & la portion correspondante des 10000<sup>l</sup>. On doit donc trouver la somme à recevoir par le 1.<sup>er</sup> associé, en faisant la proportion suivante, 9:10000<sup>l</sup>::1: $x$

& cette part  $x$ , qui est  $1111^1 2^s 2^d \frac{2}{3}$ , suffit pour déterminer la part de chacun des deux autres associés; puisque la part du deuxième, est double de la somme trouvée, & la part du troisième est égale à six fois la même somme. L'une est donc de  $2222^1 4^s 5^d \frac{1}{3}$ , & l'autre  $6666^1 13^s 4^d$ .

Si le partage eut dû être fait, avec cette nouvelle condition, que le 2.<sup>e</sup> associé recevroit  $180^1$  au-dessus du double de la part du premier associé, & qu'il reviendrait au troisième associé, non seulement le triple de la part du second, mais encore  $500^1$  de plus; le calcul auroit été plus long, sans être plus difficile. En effet, la somme de  $10000^1$  doit alors être considérée comme renfermant, & trois sommes partielles qui sont entr'elles, comme les nombres 1, 2 & 6; & trois autres sommes particulières qui sont  $180^1$ ,  $500^1$ , & trois fois 180. Ainsi, prélevant sur  $10000^1$  la valeur des trois dernières qui est de  $1220^1$ , il reste  $8780^1$ ; & cette dernière somme est celle qui doit être partagée, comme précédemment en trois parties qui soient proportionnelles aux trois nombres 1, 2 & 6. Après ce partage; on ajoute à la deuxième part  $180^1$ , &  $1040^1$  à la troisième, & on a les sommes partielles que chaque associé devoit recevoir suivant les conditions de la question.

11.<sup>e</sup> Trois armateurs ont contribué, quoique inégalement, à l'armement d'un corsaire qui a fait une prise dont le gain net est de  $40000^1$ . Le premier avoit fourni pour l'armement, 500 louis, & 20 mois avant la prise. Le deuxième a fourni 600 louis, dix huit mois avant la même époque: & une mise de 400 louis a été fournie par le 3.<sup>e</sup>, 15 mois avant la prise: on demande quel est le gain de chaque associé.

La part que chaque associé doit avoir au gain total, doit dépendre non seulement de sa mise particulière, mais aussi de l'intervalle de temps, pendant lequel elle a été employée dans la société. Les parts des associés doivent donc être entr'elles & en raison de la grandeur réelle de leurs mises, & en raison du tems pendant lequel la société en a joui; c'est-à-dire qu'elles

doivent être en raison composée, & du rapport des mises, & de celui des intervalles de tems. Si on compare les parts des deux premiers associés: comme le rapport de leur mises est de 500:600, & comme celui des deux tems est 20:18, on a, en les multipliant l'un par l'autre, leur rapport composé 500.20:600.18. Et par conséquent on doit faire la proportion; la part du premier est à celle du second, comme 500.20:600.18: On trouveroit par le même procédé, que la part du 1.<sup>er</sup> est à celle du troisieme, comme 500.20:400.15. Ainsi on peut établir cette suite de rapports égaux, 1.<sup>re</sup>: 2.<sup>e</sup>: 3.<sup>e</sup> :: 500.20:600.18:400.15. Dans cette suite, on peut dire; la somme des trois premiers termes est au troisieme, comme la somme de trois derniers est au dernier (82): c'est-à-dire 40000:x::26800:6000. Cette quantité x, est le gain qui revient au troisieme associé. Le gain partiel du deuxieme associé, est déterminé par une pareille proportion qui est; 40000:x::26800:10800. Enfin le gain du premier est donné par cette proportion, 40000:x::26800:10000, qui peut être simplifiée, & transformée en celle-ci, 400:268::x 10000. Le calcul du terme inconnu dans chacune de ces proportions est facile à faire & nous ne nous appesantirons pas sur de tels détails.

84. *Progressions des nombres.* Nous avons dit qu'une proportion est continue, lorsque les termes qui la composent sont tels, qu'on peut dire; le 1.<sup>er</sup> est au 2.<sup>d</sup> comme le 2.<sup>d</sup> est à un 3.<sup>e</sup> terme. Si cette proportion étoit imaginée prolongée indéfiniment, ou si ce troisieme terme étoit moyen proportionnel entre le deuxieme & un quatrieme terme; si celui-ci l'étoit entre le troisieme terme & un cinquieme, & ainsi successivement; l'assemblage de tous ces termes, rangés dans l'ordre annoncé, seroit une progression. On peut donc dire en général qu'une progression est une suite de nombres particuliers, dont chacun a un même rapport avec celui qui le précède dans l'ordre de cette suite; & comme on distingue deux espèces de rapports ainsi que deux espèces de proportions, il y a aussi des progressions arithmétiques & des progressions

géométriques. Dans toute progression arithmétique, chaque terme diffère, de celui qui le précède, d'une même quantité; & dans toute progression géométrique, chaque terme contient celui qui le précède, un même nombre de fois. Par exemple, les nombres suivans font en progression arithmétique; 3. 5. 7. 9. 12. 13. 15 &c; & ceux-ci font en progression géométrique; 2. 6. 18. 54. 162. &c. l'arrangement des termes, & les points qui les séparent, donnent une idée exacte de la forme & de l'ordre, qu'il faut observer, pour présenter & faire distinguer des progressions quelque soient leur termes & leurs especes.

85. Toute progression arithmétique, a des propriétés particulieres. Si elle est croissante, ou si ses termes augmentent en s'éloignant du premier; on peut dire qu'un terme quelconque est égal au premier augmenté de la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui: (en nommant raison, la différence de chaque terme à celui qui le précède immédiatement). En effet, d'après la nature du rapport, le deuxième terme d'une progression arithmétique est égal au premier augmenté de la raison. Le troisième terme est égal au deuxième augmenté de la raison, ou au 1.<sup>er</sup> augmenté de la raison répétée deux fois. De même le 4.<sup>me</sup> est égal au premier augmenté de la raison répétée trois fois. On trouveroit aussi que le centième est égal au premier augmenté de la raison répétée 99 fois: par conséquent en général, un terme quelconque d'une progression arithmétique, est égal au premier augmenté de la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui. Delà on conclut cette regle générale, qu'étant donnés, le premier terme & la raison d'une progression arithmétique, on détermine un de ces termes dont le rang est connu, en ajoutant le premier terme au produit de la raison multipliée, par le nombre des termes qui précèdent celui qui est cherché. Par exemple, soit la progression 4. 7. 10. 13. 16. 19 &c. dont le premier terme est 4 & la raison 3. si son dixième terme est demandé, on le trouve en ajoutant 4 avec le produit de 3 multiplié par 9: & ce terme est 31. Si le premier terme d'une progression



n'étoit pas donné; & qu'on ne connut qu'un autre terme de cette progression, dont le rang seroit désigné; celui-ci serviroit également à trouver un terme quelconque de cette même progression, parcequ'elle pourroit être regardée, comme ayant le terme connu, pour premier ou pour dernier terme, suivant l'exigence des cas. Soit donné par exemple le sixieme terme 19 de la progression précédente; & que le dixieme soit cherché: celui-ci doit être égal au sixieme augmenté de quatre fois la raison; en considérant le sixieme comme le premier terme d'une progression dont on cherche le cinquieme: & ce terme est alors 31, comme on l'a déterminé précédemment. Si généralement on désigne le premier terme par  $p$  la raison par  $r$  & le rang d'un terme  $x$  par  $n$ , on peut exprimer algébriquement cette propriété des progressions arithmétiques, en faisant cette équation  $x = p + r(n-1)$ . On voit ici bien clairement que des quatre quantités  $x, p, r$ , &  $n$ , trois étant données, il est aisé de déterminer la quatrième, si elle est inconnue & cherchée.

Si le premier & le dernier terme d'une progression étoient connus, ainsi que le nombre des termes intermédiaires nommés moyens; on peut demander quels sont ces mêmes moyens: & un tel problème, est énoncé ordinairement en proposant d'insérer un certain nombre déterminé de moyens arithmétiques entre deux nombres donnés.

Il faut remarquer, pour résoudre ce problème, qu'on propose en d'autres mots, de faire une progression arithmétique qui ait, pour premier & pour dernier termes, les deux nombres donnés; & pour moyens, ou termes intermédiaires, d'autres nombres dont la grandeur est cherchée, & dont la quantité est connue. Comme on sait que chaque terme d'une progression est égal, à celui qui le précède immédiatement, augmenté de la raison; il suffit par conséquent, pour déterminer successivement chacun des moyens demandés, de calculer la raison qui doit regner dans la suite de ces termes; parceque cette raison étant trouvée & ajoutée au plus petit des deux nombres donnés, la

somme doit être le premier moyen cherché; ensuite, celui-ci étant augmenté de la même raison, doit devenir le second moyen; & ainsi successivement.

La règle générale, pour déterminer la raison qui regne dans une progression arithmétique, dont on connoît les termes extrêmes, & le nombre des termes intermédiaires ou moyens, est de diviser la différence des deux termes extrêmes, par le nombre des moyens augmenté de l'unité. Le quotient est égal à la raison cherchée. Car le plus grand des nombres donnés, étant supposé le dernier terme de la progression proposée, doit être regardé comme une somme composée, & du premier terme donné, & de la raison répétée autant de fois qu'il doit y avoir de termes avant le dernier, ou autant de fois qu'il doit y avoir de moyens plus un. C'est pourquoi, si du dernier terme on retranche le premier, il ne doit rester que la raison répétée autant de fois qu'il doit y avoir de moyens plus un: & par conséquent, la raison est le quotient de la division de cette différence par le nombre des moyens demandés, augmenté de l'unité. Par exemple, soit proposé d'insérer entre 4 & 19, quatre moyens arithmétiques: il faut trouver la raison, & par conséquent, diviser 15, par le nombre 5, qui est le nombre 4 des moyens demandés, augmenté de l'unité. La raison est donc 3. En l'ajoutant au premier terme 4, la somme 7 est le premier moyen. Augmentant ensuite celui-ci de la même raison 3, la somme 10 est le second moyen: & enfin observant la même règle successivement, on parvient à former la progression 4.7.10.13.16.19, qui présente dans les quatre nombres 7, 10, 13, & 16, les quatre moyens arithmétiques qu'il falloit insérer entre 4 & 19.

S'il étoit nécessaire de déterminer la somme de tous les termes qui composent une progression arithmétique, il faudroit en connoître, & le premier, & le dernier, avec le nombre total des termes dont on cherche la somme. Ces derniers, & les principes déjà exposés, rendent cette somme facile à calculer, car elle est égale à la somme du 1.<sup>er</sup> & du dernier terme de la progression

progression, multipliée par la moitié du nombre de ses termes. En effet, soit suppose, pour fixer les idées & faciliter l'indication des termes comparés, une progression arithmétique composée de 20 termes. Si on considère, dans cette suite de termes, le rapport du premier au dixieme, on voit qu'il est égal à celui du onzieme au dernier, parceque la raison de la progression répétée neuf fois est la différence du 1.<sup>er</sup> terme au dixieme, comme elle est celle du onzieme au dernier. La somme des deux extrêmes de cete progression est donc égale à celle du dixieme & du onzieme terme. On prouveroit de même que la premiere somme est égale; & à celle du neuvieme terme & du douzieme; & à celle du huitieme & du trezieme: & ainsi de suite. (Si le nombre des termes eut été supposé impair, la même somme seroit démontrée être égale au double du terme moyen qui est également éloigné des deux extrêmes): par conséquent réunissant toutes ces sommes partielles, on doit en conclure que la somme de 20 termes en progression arithmétique, est égale à celle du premier & du dernier terme, multipliée par la moitié du nombre des termes. Ce raisonnement peut être étendu à une progression de termes, en nombre plus ou moins grand, & pair ou impair; & il conduiroit à cette regle générale que la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale à celle du premier & du dernier terme, multipliée par la moitié du nombre des termes. C'est ainsi qu'étant donné la progression 3.5.7.9.11.13.15.17; & la somme de ces termes étant demandée; il faut ajouter 3 & 17 dont la somme est 20, & multiplier celle-ci par 4 qui est la moitié du nombre des termes. Le produit 80 est donc la somme de tous les termes de cette progression & on trouveroit un résultat égal par l'addition effective des mêmes termes.

Voici quelques applications des propriétés des progressions arithmétiques.

1.<sup>o</sup> Si un vaisseau a fait deux lieues dans une premiere heure, & qu'ensuite sa marche ait été également accélérée d'un tiers de lieue par chaque

heure pendant un intervalle de temps de 6 h, on demande quel est le chemin qu'il a pu faire pendant ces six heures.

Les chemins partiels faits par ce vaisseau pendant chaque heure, peuvent être regardés comme autant de termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2, la raison  $\frac{1}{3}$ , & le nombre des termes 6. La somme de ces chemins, ou le chemin total du vaisseau, est donc celle des termes de la progression indiquée; c'est-à-dire qu'elle est égale à celle des chemins qui ont été faits pendant la première & la dernière heure, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progression. Le dernier terme n'est pas donné, mais il est facile à calculer, & il est égal au premier 2 augmenté de la raison  $\frac{1}{3}$ , répété cinq fois, on a  $3\frac{2}{3}$  lieues. Ce terme ajouté au premier 2 donne une somme  $5\frac{2}{3}$ ; & cette somme multipliée par 3 (la moitié du nombre des termes) devient un produit 17 qui annonce que pendant les six heures supposées, le vaisseau a dû faire 17 lieues.

2.<sup>o</sup> Un débiteur s'est engagé à acquitter 10000 liv. par des payemens égaux & annuels, de 200 liv; mais il se propose ensuite de payer, à l'époque de la première année, 30 l de plus que la somme promise; à l'époque de la troisième année, 30 liv. de plus que le second payement; & d'augmenter ainsi successivement chaque payement annuel. Il demande quelle sera la somme totale qu'il aura payée après un intervalle de 20 ans.

Les payemens annuels que le débiteur se propose de faire, sont autant de termes d'une progression arithmétique, dont le premier est 200, la raison 30, & le nombre des termes 20. Comme on demande quelle doit être la somme acquittée après 20 payemens, il faut chercher le montant du vingtième payement qui est de 770 liv., (parcequ'il est la somme de 200 & de 30 répété dix-neuf fois). Ensuite on doit l'ajouter avec le premier terme & la somme 970 l; étant multipliée, par 10 qui est la moitié du nombre des termes, le produit 9700 est la somme cherchée.

Sans doute il seroit important de connoître un moyen de déterminer à quelle époque la dette totale seroit

amortie par de tels payemens en progression; mais la simple arithmétique ne peut pas présenter des formules simples pour la solution d'une telle question, & l'algebre au contraire fournit des secours satisfaisans. Soit  $s$  la somme des payemens ou des termes d'une progression arithmétique; soit  $p$  le premier de ces termes;  $r$  la raison; &  $n$  le nombre des termes. Dans la question que nous venons de supposer, la somme à payer est 10000 liv, & elle est égale à  $s$ . La différence des payemens annuels, ou la raison, est 30 l. & c'est la valeur de  $r$ . Enfin le premier payement est de 200 l., & c'est le premier terme  $p$ . Il ne s'agit que de trouver le nombre  $n$  des années après lesquelles la somme due sera entièrement payée.

Le dernier payement est  $= p+r(n-1)$ , on doit l'ajouter au premier  $p$ , & on a l'équation  $s=(2p+rn-r)\frac{n}{2}$ . Si on exécute la multiplication & qu'on fasse disparaître le dénominateur 2, on a  $2s=rn^2+n(2p-r)$ . Supposons que  $2p-r=2br$ , &  $2s=qr$ , ( $q$  &  $b$  étant des indéterminées) l'équation se change en celle-ci  $q=n^2+2bn$ . Cette équation est nommée du second degré parceque l'inconnue  $n$ , y est élevée à la deuxième puissance. Considérons actuellement (73) le deuxième membre de cette équation. Il deviendra un carré parfait en lui ajoutant le carré de la quantité  $b$ . Mais comme l'égalité des deux membres de l'équation doit être conservée, cette raison exige que le carré de  $b$  soit aussi ajouté au premier membre. Par conséquent on peut dire que  $(q+b^2)=n^2+2bn+b^2$ . Les racines carrées des deux membres doivent être égales, et celle du 2.<sup>e</sup> membre est évidemment  $(n+b)$ ; on a donc  $n+b=(q+b^2)^{\frac{1}{2}}$ ; (parceque, pour extraire la racine de  $(q+b^2)$  considérée comme une somme mise entre deux parenthèses, il faut diviser son exposant 1, par 2 qui est celui de la racine.) Donc  $n=(q+b^2)^{\frac{1}{2}}-b$ . Si maintenant on substitue à la place de  $b$  & de  $q$ , leurs valeurs, & qu'on exécute toutes les opérations indiquées, le résultat sera que  $n=20,39$ ; c'est-à-dire qu'après 20 ans 4 mois & 20 jours, la

dette entiere devoit être acquittée ; ce qui s'accorde avec ce qui a été trouvé précédemment , puisqu'à la vingtieme année , la somme payée devoit être de 9700 livres , somme très-approchée de 10000 liv.

86. Dans une progression géométrique croissante , chaque terme est égal à celui qui le précède , multiplié par la raison de la progression (84) ; & il en résulte que chaque terme est aussi égal au 1.<sup>r</sup> multiplié , par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent. En effet , si on entre dans les détails , on voit que le troisieme terme est égal au deuxieme multiplié par la raison ; mais celui-ci est égal au 1.<sup>r</sup> multiplié par la raison ; le troisieme est donc égal au 1.<sup>r</sup> , multiplié deux fois de suite par la raison , ou multiplié par la deuxieme puissance de la raison. Le produit de ce troisieme terme par la raison , est égal au quatrieme terme ; donc ce dernier vaut le 1.<sup>r</sup> multiplié par la troisieme puissance de la raison , ou par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent. Ce même raisonnement étant appliqué successivement à chaque terme d'une progression géométrique , conduit à la regle générale déjà énoncée ; savoir que chaque terme est égal au 1.<sup>r</sup> multiplié par la raison élevée à une puissance indiquée par le nombre des termes qui le précèdent. Cette propriété fournit un moyen facile de trouver la valeur d'un terme qui tient un rang connu dans une progression géométrique , dont le 1.<sup>r</sup> terme & la raison sont donnés. Si dans la progression 1:2:4:8:16:32:64 &c , on cherche le 8.<sup>e</sup> terme ; on doit le trouver en multipliant le 1.<sup>r</sup> terme 1 , par la septieme puissance , de la raison qui est 2. Ce produit est 128 ; & il est le huitieme terme demandé. On eut d'ailleurs trouvé le même resultat en multipliant le septieme terme 64 , par la raison 2.

C'est aussi de cette même propriété qu'on conclut une regle générale , à l'aide de laquelle , on peut insérer plusieurs moyens géométriques entre deux nombres donnés. En effet , la question de déterminer ces moyens , est celle de faire une progression

géométrique, dont les deux nombres donnés soient les deux termes extremes, & dont les moyens demandés, soient les termes intermédiaires. La recherche de ces moyens dépend donc de celle de la raison qui doit regner, dans cette progression, ou dans la suite de ces moyens. Car cette raison étant déterminée, on obtient le premier moyen cherché en multipliant le plus petit des deux nombres donnés, par cette raison. Le produit de ce premier moyen multiplié par la raison devient le deuxième moyen; & ainsi de suite. La regle générale par laquelle on doit calculer la raison cherchée d'une telle progression, est de diviser le plus grand des deux nombres donnés, par le plus petit; & d'extraire du quotient une racine marquée par le nombre des moyens demandés, augmenté d'une unité. Voici la demonstration de cette regle. Le plus grand des nombres donnés, qui doit être le dernier terme de la progression qu'on veut faire, peut être regardé comme le produit de deux facteurs dont l'un est le premier terme ou le plus petit nombre donné, & l'autre la raison élevée à une puissance marquée, par le nombre des termes qui précèdent ce dernier, ou par le nombre des moyens demandés, augmenté de l'unité. C'est pourquoi, en divisant le plus grand des nombres donnés par le plus petit, qui est un de ses facteurs, le quotient doit être égal à l'autre facteur; & par conséquent si de ce quotient on extrait une racine marquée par le nombre des moyens demandés, augmenté de l'unité; cette racine doit être la raison cherchée. Ensuite avec cette raison, on forme la progression, & on trouve, comme on l'a dit plus haut, tous les moyens demandés. Si entre 2 & 16, par exemple, on se propose d'insérer deux moyens géométriques: il faut diviser 16 par 2, & ensuite extraire du quotient 8, la racine troisième qui est 2. La raison qui doit regner dans la progression est donc 2. On multiplie cette raison par le premier terme donné 2, & le produit 4 est le premier moyen. On multiplie ce moyen par 2, & le produit 8 est le deuxième moyen. Enfin la progression

est 2:4:8:16 & les deux termes intermédiaires 4 & 8 sont les moyens cherchés.

Il est souvent nécessaire de connoître la somme des termes d'une progression géométrique ; ainsi il est à propos d'en présenter la formule. Soit une progression dont la somme des termes est demandée, & imaginons une seconde progression, qui ne soit que la proposée, diminuée de son premier terme, & augmentée d'un terme de plus ; ou qui soit la proposée dont tous les termes soient multipliés par sa raison. Il résulte de cette supposition, que si on prend la différence des sommes particulières des termes de chacune de ces deux progressions, elle doit être celle du premier terme de la proposée au dernier terme de la seconde progression ; c'est-à-dire, au dernier terme de la première, multipliée par la raison : mais la différence des sommes des termes de chacune des progressions, n'est autre chose que la somme des termes de la proposée multipliée, par la raison diminuée d'une unité ; par conséquent cette somme est égale au quotient qui résulte de la différence, du premier terme de la proposée à son dernier terme multiplié par la raison, divisée par la raison diminuée d'une unité. On peut donc établir pour règle générale, que si on se propose de déterminer la somme des termes d'une progression géométrique limitée, il faut retrancher son premier terme, du dernier multiplié par la raison, & diviser leur différence par la raison diminuée d'une unité. Par exemple, soit la progression 2:4:8:16:32:64 ; & soit demandée la somme de ces six termes qui la composent. Il faut multiplier 64 par la raison 2 ; & retrancher du produit 128 le premier terme 2 ; ensuite on divise le reste 126, par 1 qui est la raison 2 diminuée d'une unité ; & le résultat 126, est la somme de tous les termes donnés, comme on peut le vérifier par une addition directe & effective.

Comme les applications des propriétés des progressions géométriques sont très-laborieuses, lorsqu'elles sont faites sans le secours des logarithmes, nous nous réservons d'en donner des exemples, après avoir traité de la nature, & de l'utilité de ces nombres artificiels.



87. *Logarithmes des nombres.* Les quatre principales regles d'arithmétique, que nous avons présenté précédemment, n'ont pas toutes le même degré de simplicité, & de facilité dans l'exécution; c'est pourquoi l'addition & la soustraction étant moins compliquées, que la multiplication & la division, on a cherché à reduire ces deux dernieres opérations aux deux premieres, c'est-à-dire, à déterminer les produits ou les quotiens de deux nombres, par la voie de l'addition & de la soustraction. Les logarithmes que nous allons faire connoître, servent parfaitement à remplir ces vues de commodité & d'utilité.

Imaginons, pour donner une idée générale des logarithmes, que deux progressions, l'une arithmétique, & l'autre géométrique, soient placées l'une au-dessous de l'autre, de manière que chaque terme de l'une, corresponde au terme qui tient le même rang dans l'autre progression; alors un terme quelconque de la progression arithmétique, est nommé le logarithme du terme correspondant de la progression géométrique. Mais il est un choix à faire entre toutes les progressions possibles, afin de n'employer que celles qui offrent la plus grande facilité, soit pour le calcul des logarithmes de tous les nombres, soit pour les diverses opérations qu'on peut faire par le moyen des logarithmes. On a donc adopté la progression géométrique qui commence par 1, dont la raison est 10, & qui, composée des termes suivans, est étendue indéfiniment 1:10:100:1000:10000: &c. chacun de ces termes est simplement égal à la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précédent; & ce nombre exprime par conséquent, combien de fois la raison 10 est facteur dans chacun de ces termes. Si maintenant on se conforme à une convention générale déjà faite pour l'algebre (58), savoir: que lorsqu'un nombre tel que 1000, est un produit dans lequel 10 est 3 fois facteur, on peut représenter cette puissance par  $10^3$ , c'est-à-dire, en plaçant à la droite, & un peu au-dessus du facteur 10, le nombre qui, sous le nom d'exposant, exprime combien de fois 10 est facteur. Les termes

de cette progression où 10 est facteur, ou cinq fois, ou 6, ou 7 fois peuvent être représentés sous la forme  $10^5, 10^6, 10^7$ : par conséquent la progression précédente peut être transformée en celle-ci  $10^0:10^1:10^2:10^3:10^4:10^5:10^6:10^7$ , &c.

Le choix de cette progression géométrique, considérée dans ce nouvel état, a conduit à celui de la progression arithmétique, dont les termes doivent être employés comme les logarithmes des termes correspondans de la première; car on doit remarquer que les exposans des termes de celle-ci, sont en progression arithmétique, & composent même la progression la plus simple de cette espèce, comme commençant par zéro, & ayant l'unité pour raison. Établissons les deux progressions indiquées l'une au-dessous de l'autre comme elles sont ici

$10^0:10^1:10^2:10^3:10^4:10^5:10^6:10^7$ &c.
0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 &c.

Si on doit voir dans les termes de la progression arithmétique, les logarithmes des termes correspondans de la progression géométrique; on peut aussi ne considérer que la progression géométrique seule, car l'exposant de chacun de ses termes, est le logarithme de ce même terme. Adoptons cette dernière manière d'envisager les logarithmes pour exposer plus clairement leurs usages. Si on examine attentivement les termes de la progression géométrique précédente, on doit en conclure, que chacun étant composé uniquement de la raison plusieurs fois facteur, le produit de deux de ces termes doit avoir la raison pour facteur, autant de fois qu'elle l'est dans l'un & l'autre terme multiplié. On sait d'ailleurs que les exposans indiquent combien de fois la raison est facteur dans un terme quelconque; par conséquent, la somme des exposans des termes multipliés, doit indiquer aussi combien de fois la raison est facteur dans leur produit. De-là on doit conclure que pour reconnoître, dans la suite des termes de cette progression, celui qui est le produit, de deux autres termes multipliés l'un par l'autre, il suffit d'ajouter les exposans de ces deux facteurs, & de chercher le terme qui, dans cette progression, a pour exposant

la somme trouvée. Par exemple, veut-on savoir quel est le produit de 10 par 1000, ou de  $10^1$  par  $10^3$ , il faut ajouter les exposans 4 & 1, & chercher dans la suite des termes de la progression, celui qui a pour exposant 5, ou la somme de ceux des deux facteurs. Le terme  $10^5$  est donc le produit des deux nombres donnés. En effet, la raison est dans ce terme, cinq fois facteur : & en développant cette puissance de 10, on trouve qu'elle est égale à 100000 : ce qui est d'ailleurs, comme on le fait, le produit de 10 par 10000.

Ces réflexions & cet exemple concourent ainsi à faire voir qu'on peut parvenir à connoître le produit de deux termes quelconques, d'une telle progression géométrique, en faisant une simple addition de deux nombres déterminés qu'on nomme leurs logarithmes. La division est aussi réduite, d'après les mêmes principes, à une simple soustraction de logarithmes. En effet, suivant les regles de la multiplication par le moyen des logarithmes, la somme des logarithmes de deux termes de cette progression, est le logarithme du produit de ces deux termes ; c'est pourquoi, dans une division, comme le produit du diviseur multiplié par le quotient, est égal au dividende ; la somme du log. du quotient & de celui du diviseur, doit être le log. du dividende : par conséquent, si de cette somme, ou si du log. du dividende, on retranche le log. du diviseur, le reste doit être le log. du quotient. Si, par exemple, on doit diviser  $10^7$  par  $10^3$  ; il faut retrancher le log. de  $10^3$ , de celui de  $10^7$ , ou soustraire leurs exposans ; & leur différence étant 4, ce nombre qui est le logarithme du quotient, doit être l'exposant du terme qui est réellement le quotient de  $10^7$  divisé par 3. Ce quotient est donc  $10^4$  : & en effet, si après avoir développé les puissances 7<sup>e</sup> & 3<sup>e</sup> de dix, on exécute la division à l'ordinaire, on trouve pour quotient 10000, ou  $10^4$ .

On peut encore réduire l'opération de la division, ou la recherche du quotient à une simple addition de logarithmes, au lieu d'une soustraction. Le procédé consiste, à retrancher d'abord de 10 unités, le logarithme du diviseur ; ensuite à ajouter ce reste avec le logarithme du dividende ; enfin à retrancher

de la dernière somme, les 10 unités employées dans l'opération ; & le résultat est le logarithme du quotient cherché. En effet, cette différence entre 10 unités & le logarithme du diviseur (différence qu'on nomme complément arithmétique du logarithme du diviseur), étant ajoutée au logarithme du dividende ; le résultat est le même, que si on eut ajouté 10 unités au logarithme du dividende ; & qu'on en eut retranché le logarithme du diviseur ; mais le logarithme du quotient est seulement égal à la différence, du logarithme du dividende à celui du diviseur ; par conséquent la somme du logarithme du dividende, & du complément arithmétique du logarithme du diviseur, surpasse de 10 unités, le logarithme du quotient : & il faut en retrancher ces 10 unités, pour le rendre égal à ce dernier logarithme. Par exemple, le terme  $10^7$ , doit-il être divisé par  $10^3$  ; le complément arithmétique du logarithme 3 du diviseur est 7 ; ajouté au logarithme 7 du dividende, leur somme est 14 ; & ce logarithme diminué de 10 unités, est réduit à 4 qui est le logarithme du quotient : par conséquent le quotient est réellement  $10^4$ , comme on l'a trouvé ci-dessus.

Doit-on élever un des termes de cette progression à une puissance quelconque, par le moyen des logarithmes ; il faut multiplier le logarithme de ce terme par l'exposant de la puissance. Car dans cette puissance, ce terme est autant de fois facteur, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance : son logarithme doit donc être ajouté à lui-même, autant de fois que l'indique cet exposant, ou plutôt il doit être multiplié par cet exposant, pour devenir le logarithme de la puissance cherchée. Par conséquent, si on multiplie le logarithme d'un terme par l'exposant d'une puissance, le produit doit être le logarithme de cette puissance. Ainsi soit proposé d'élever le terme  $10^2$  à la 3<sup>e</sup> puissance ; comme 2 est son logarithme ; & 3, l'exposant de la puissance ; le produit 6 est le logarithme de la puissance 3<sup>e</sup> de  $10^2$ , & par conséquent le terme  $10^6$  est le cube de  $10^2$ . On peut vérifier aisément ce résultat, en élevant  $10^2$  au cube, & en développant le produit du nombre

10, multiplié cinq fois de suite par lui-même : l'un ou l'autre produit est 1000000.

Réciproquement, si on doit extraire une racine quelconque d'un des termes de cette progression, il faut diviser le logarithme de ce terme, par l'exposant de la racine demandée. Car le logarithme de cette racine, multiplié par son exposant, doit être égal au logarithme du terme proposé : par conséquent le logarithme de la racine de ce terme, est le quotient de la division du logarithme du terme donné par l'exposant de la racine cherchée. Si de  $10^6$ , par exemple, on demande la racine  $3^e$  ; on divise le logarithme 6 de  $10^6$ , par l'exposant 3 de la racine : & le quotient 2, est le logarithme de la racine  $3^e$  de  $10^6$ . Cette racine elle-même est donc  $10^2$ .

83 Après avoir ainsi développé toutes les conséquences dépendantes de la nature, & des propriétés de la progression particulière qui vient d'être présentée ; il faut faire connoître comment on peut transporter tous les résultats avantageux & commodes, que nous venons de citer, au calcul des nombres quelconques. Nous remarquerons que les règles générales qui ont été conclues, ( relativement aux opérations qu'on peut faire, & sur les termes de cette progression, & sur leur logarithmes ), ne dépendent pas de la raison décuple de cette même progression : & les raisonnemens sur lesquels elles sont établies, peuvent être appliqués sans aucun changement à toute autre progression, dont le premier terme seroit 1 ou  $10^0$ , & la raison, quelconque. C'est pourquoi l'application de leurs conséquences, pourra être faite complètement au calcul de tous les nombres entiers, si on peut trouver une progression qui, ayant l'unité pour premier terme, présenteroit tous les nombres entiers, parmi les termes dont elle seroit composée. Une telle progression est facile à assigner. En effet, considérons la progression décuple  $10^0:10^1:10^2:10^3:10^4$ , &c elle n'offre, de tous les nombres entiers dont on fait usage, que ceux-ci, 1, 10, 100, 1000, &c. mais imaginons qu'entre les deux premiers termes 1 & 10, on insère un million de moyens géométriques,

on doit trouver parmi ces termes moyens, les nombres intermédiaires, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9, ou des nombres qui en diffèrent si peu, que sans erreur sensible, les différences peuvent être négligées.

Si on suppose aussi qu'entre 10 & 100, ainsi qu'entre 100 & 1000, & successivement, on ait inséré un million de moyens géométriques; on voit que de ces opérations, il doit résulter une progression, dont l'unité est le premier terme, & qui, parmi les termes nombreux, dont elle est composée, peut présenter tous les nombres entiers compris depuis un jusqu'à cent mille, & au-dessus, si elle est prolongée convenablement. La recherche de ce grand nombre de moyens géométriques, suppose celle de la raison qui doit regner dans cette progression, & pour en donner une idée, examinons seulement comment on opère pour insérer un million de moyens entre 1 & 10. Il faut, pour trouver la raison, extraire du nombre 10<sup>e</sup> une racine marquée, par l'exposant un million plus un. Il faut donc diviser l'exposant 1 de ce nombre, par 1000001 qui est l'exposant de la racine (73); & le quotient de cette division, exprimé en décimales, est 0,0000009; de sorte que la raison est 10<sup>0,0000009</sup>, & les diverses puissances de cette raison sont les moyens cherchés. En développant ces calculs, on trouve, par exemple, que le nombre 2 est égal à-peu-près à 10<sup>0,301030</sup>, & par conséquent que 0,301030 est le logarithme de 2 : de même le nombre 3 est à-peu-près égal à 10<sup>0,477121</sup>, & son logarithme est par conséquent 0,477121, &c. Des calculateurs infatigables, & qui méritent sans doute la reconnaissance publique, ont bien voulu exécuter toutes les opérations annoncées, & publier des tables des logarithmes les nombres entiers. Ces tables présentent dans leur ensemble, & sur deux colonnes parallèles, des termes correspondans de deux immenses progressions arithmétiques & géométriques, dont l'une a zero, & l'autre l'unité, pour 1.<sup>er</sup> terme; & leur usage est fondé sur toutes les propositions qui ont servi à fonder le calcul

des termes de la progression décuple : parce que , comme on l'a dit plus haut , elles sont entierement applicables à ces progressions nouvelles , quoique infiniment plus nombreuses. On peut donc dire de tous les nombres contenus dans ces tables , comme on l'a dit précédemment de tous les termes de la progression décuple ; 1.<sup>o</sup> que si on ajoute les logarithmes de deux nombres , la somme est le logarithme du produit de ces mêmes nombres ; 2.<sup>o</sup> que s'ils doivent être divisés l'un par l'autre , la différence du logarithme du dividende à celui du diviseur , est le logarithme du quotient ; 3.<sup>o</sup> que le logarithme de la puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre , multiplié par l'exposant de la puissance ; 4.<sup>o</sup> enfin , que le logarithme de la racine d'un nombre , est le quotient de la division du logarithme de ce nombre par l'exposant de cette racine.

89. Les logarithmes dont on fait usage dans l'application de ces regles , ainsi que les nombres entiers , qui correspondent à ces mêmes logarithmes , sont faciles à trouver par le moyen de tables actuelles , parce qu'elles présentent sur deux colonnes , les logarithmes des nombres , vis-à-vis de ces mêmes nombres ; de sorte qu'étant donné un nombre , son logarithme est le terme qui lui correspond , dans la colonne adjacente des logarithmes ; de même étant donné un logarithme , le nombre auquel il appartient , est celui qui , dans la colonne des nombres correspond à ce logarithme. Ces tables ne renferment cependant & explicitement , que les logarithmes de 100000 nombres entiers , & non ceux des nombres qui sont ou plus grands , ou fractionnaires , ou joints à des fractions , & qui peuvent se présenter dans les calculs ; c'est pourquoi , avant de donner des exemples des opérations qu'on fait par le secours des logarithmes , il est à propos de placer ici , des remarques particulieres & propres à écarter , dans tous les cas , les difficultés qui peuvent arrêter les calculateurs.

Soit une fraction  $\frac{27}{59}$  dont on cherche le logarithme ; comme elle n'indique qu'une division non exécutée , il faudroit , suivant un des procédés de la division par

logarithmes; retrancher le logarithme de 59 de celui de 27: mais celui-ci étant plus petit, le reste seroit négatif. C'est pourquoi afin d'éviter ces logarithmes négatifs, nous croyons convenable de n'employer que le procédé des complémens arithmétiques des logarithmes, pour parvenir à trouver le logarithme d'une fraction quelconque. Dans l'exemple proposé, on doit donc prendre le complément arithmétique du logarithme de 59, qui est 8,229148, & l'ajouter au logarithme de 27, qui est 1,431364. Leur somme est 9,660512, & diminuée de 10 unités, elle seroit le logarithme de la fraction. Mais au lieu d'exécuter cette soustraction, je proposerois d'indiquer qu'elle est à faire, en plaçant un point au-dessus de la caractéristique 9; c'est-à-dire, d'écrire ce logarithme, ainsi que celui de toute autre

fraction, sous cette forme,  $\cdot 9,660512$ . Ce point annon-  
ceroit qu'il reste à retrancher 10 unités de ce logarithme; & deux ou plusieurs points placés ainsi au-dessus d'une même caractéristique, indiqueroient de même qu'il reste à retrancher, des logarithmes où ils seroient placés, ou 10, ou 20, ou 30 unités. Cette indication suffiroit pour faciliter la recherche des résultats des opérations où de tels logarithmes pourroient être employés. Car, soit proposé de multiplier  $\frac{27}{59}$  par 32, on ajouteroit le logarithme de 32, avec celui de la fraction, c'est-à-dire avec  $\cdot 9,660512$ , &

de la somme  $\cdot 11,165662$ , on retrancheroit 10 unités, comme il est indiqué par le point unique qui couronne le caractéristique 9 du logarithme de la fraction: alors, le reste  $\cdot 1,165662$  deviendrait le logarithme du produit des deux facteurs donnés.

Ce qui vient d'être dit sur les fractions en général, s'applique parfaitement & complètement aux décimales. En effet, quoique celles-ci soient présentées sous la forme de quantités, telles que 0, 25 & 0, 034; elles ressemblent, dans le fond, aux fractions ordinaires, & on doit les regarder comme devant être écrites de cette manière;  $\frac{25}{100}$ ,  $\frac{34}{1000}$ , &c. Le logarithme



pointé d'une fraction est, comme on l'a dit, égal à la somme du logarithme du numérateur & du complément arithmétique du logarithme du dénominateur. Ce dernier, lorsque les fractions sont décimales, est la différence de dix unités, à 1, 2, 3, ou 4 unités, selon que les décimales sont des dixièmes, des centièmes, des millièmes, ou des dix millièmes : par conséquent on détermine le logarithme pointé, d'une fraction décimale ; en ajoutant, au logarithme du nombre des parties décimales, le logarithme 10 diminué d'autant d'unités qu'il y a de chiffres décimaux. Au reste, ces logarithmes sont dits pointés, parcequ'ils doivent être diminués de 10, comme on l'a dit de ceux des fractions ordinaires.

Si un nombre proposé, étoit composé d'un nombre d'unités & d'un nombre de décimales, tel, par exemple, que 25,32. Ce nombre, ni son logarithme ne se trouvent explicitement dans les tables ordinaires. Ce logarithme peut être cependant déterminé à l'aide des mêmes tables, en considérant, sans virgule, le nombre proposé, ou comme étant cent fois plus grand. En effet, nous avons vu dans la progression géométrique qui sert de base aux logarithmes, que 1 est le logarithme de 10, que 2 est celui de 100, que 3 est celui de 1000, &c. ; c'est-à-dire qu'un nombre étant dix fois, ou cent fois plus grand qu'un autre nombre ; le logarithme du 1<sup>r</sup> surpasse de 1 ou 2 unités, le logarithme du 2<sup>e</sup> nombre. Par conséquent, le logarithme de 2532, (qui est un nombre cent fois plus grand que 25,32) doit être de 2 unités plus grand que celui de 25,32 ; & comme le premier, donné par les tables, est 3,403464, celui de 25,32 doit être 1,403464. C'est par un procédé semblable qu'on détermine le logarithme, d'un nombre quelconque accompagné de décimales.

Supposons que ce dernier logarithme 1,403464, soit le résultat d'une opération quelconque, & qu'on demande quel est le nombre qui lui correspond. On chercheroit inutilement un tel logarithme parmi ceux qui, dans les tables, n'ont qu'une unité à leur carac-

teristique; on n'y reconnoîtroit aucun logarithme composé entièrement des mêmes chiffres: mais en augmentant ce logarithme de deux unités, on le trouve placé exactement parmi ceux qui ont trois unités à leur caractéristique. Le nombre qui lui correspond est 2532; & ce nombre, dont le logarithme est plus grand de 2 unités que le logarithme donné, est donc cent fois plus grand que le nombre qui correspond à ce dernier logarithme. Le nombre cherché doit donc être 25,32; c'est-à-dire, qu'il faut séparer par une virgule, sur la droite du nombre trouvé dans les tables, autant de chiffres qu'on ajoute d'unités au logarithme donné. C'est par de tels moyens qu'on peut trouver par les tables; soit les nombres joints à des décimales, qui correspondent à des logarithmes donnés; soit les logarithmes des nombres qui sont accompagnés de décimales.

Nous venons de faire voir qu'il faut augmenter un nombre, tel que 25,32, pour en trouver le logarithme par les tables; mais c'est le contraire lorsqu'on propose de déterminer le logarithme d'un nombre qui dépasse les limites des mêmes tables. Soit, par exemple, le nombre 125344, dont le logarithme est demandé: comme les tables ne s'étendent pas au-delà de 100000, il faut rendre ce nombre assez petit pour qu'il soit compris dans les limites des tables; ce qui se fait en séparant sur sa droite, ou un, ou deux, ou trois chiffres, selon qu'il devient nécessaire de le rendre ou 10 ou 100 ou 1000 fois plus petit. Le nombre proposé n'a besoin que d'être réduit à 12534,4; & le logarithme de ce dernier nombre étant trouvé, il deviendra celui du premier, en l'augmentant d'autant d'unités qu'il y a de chiffres séparés sur sa droite. La question se réduit donc à déterminer le logarithme de 12534,4. Les tables présentent ceux de 12534 & de 12535, ainsi celui qui est cherché, est placé entre ces derniers; & il seroit connu si on savoit sa différence au logarithme de 12534. Voici donc le calcul de cette différence. On prend, celle des deux nombres entiers, qui est 1, celle de leur logarithmes qui est 34, & celle de 12534,4 à 12534 qui est 0,4: ensuite on fait la proportion suivante: la  
différence

différence des deux nombres entiers, est à celle du plus petit de ces nombres au nombre proposé, comme la différence des logarithmes des nombres entiers, est à celle du logarithme du plus petit de ces nombres au log. du nombre proposé; ou  $1:0,4::34:x$ . Le quatrième terme qui est 14 est donc la différence cherchée. On l'ajoute au logarithme de 12534, qui est 4,098090, & la somme 4,098104 est celui de 12534,4. Enfin le logarithme du nombre proposé, qui est 125344 ou dix fois plus grand que 12534,4; doit donc être 5,098104. Tel est le procédé qu'il faut suivre pour calculer les logarithmes des nombres qui, par leur grandeur, sont hors des limites des tables.

Est-il question de déterminer réciproquement, le nombre correspondant à un logarithme qui n'est pas dans les tables? Il y a deux cas: ou sa caractéristique le place dans l'étendue des tables, ou elle indique qu'il dépasse leurs limites. Dans ce dernier cas, il faut diminuer sa caractéristique d'un nombre d'unités, assez grand pour que ce logarithme puisse être compris dans les bornes des tables, & qu'on puisse y trouver le nombre qui lui correspond. Ce nombre doit être alors, ou dix, ou cent, ou mille fois plus petit, que celui qui est cherché: ainsi on doit déterminer ce dernier, en rendant le nombre trouvé par les tables, ou dix, ou cent, ou mille fois plus grand. Par exemple, le logarithme 6,000000 n'est pas dans les tables ordinaires, mais en le diminuant de 2 unités, on trouve dans ces mêmes tables que 4,000000 correspond au nombre 10000: & comme ce dernier, par le changement opéré sur le logarithme donné, doit être cent fois plus petit que le nombre cherché, celui-ci doit être 1000000. Dans l'autre cas, un logarithme qui, par sa caractéristique, n'excède pas les limites des tables, peut ne pas s'y trouver entièrement, c'est-à-dire, avec tous les chiffres décimaux qui le composent; alors le nombre qui lui correspond ne peut jamais être entier, mais un nombre composé d'unités & de décimales. Il est donc placé nécessairement entre deux nombres entiers renfermés dans les tables. Soit, par exemple, proposé le loga-

rithme 3,265436, & soit demandé le nombre qui lui correspond. En le comparant à ceux dont il approche davantage, on reconnoît qu'il est plus petit que le logarithme de 1843, & plus grand que celui de 1842 : il doit donc correspondre au nombre 1842 augmenté de quelques décimales. Ses décimales doivent être déterminées, en faisant la proportion indiquée précédemment. On doit dire, 235 (différence des logarithmes de 1842 & de 1843), sont à 146 (différence du logarithme de 1842 au logarithme proposé), comme 1 (différence des nombres 1842 & 1843), est à la différence de 1842 au nombre qui correspond au logarithme proposé. Cette différence cherchée est 0,621 ; par conséquent le nombre 1842,621 est le nombre réel qui correspond au logarithme proposé.

Telles sont toutes les remarques qui peuvent être nécessaires & utiles pour le facile usage des tables des logarithmes. Actuellement nous allons présenter quelques applications des regles précédentes, à la solution de certaines questions ; afin de donner une idée des avantages attachés à l'emploi des logarithmes dans les calculs. Les logarithmes servent à exécuter la regle de trois (83) dans toutes les occasions où elle est employée ; & pour en donner un exemple, cherchons le quatrieme terme de la proportion qui sert à résoudre la seconde question proposée précédemment ;  $7:270::1561:x$ . Il faut ajouter le logarithme de 270 qui est 2,431364, & avec le logarith. de 1561 qui est 3,193403, & avec le complément arithmétique du logarithme de 7 qui est 9,154902. Leur somme diminuée de dix unités est 4,779669, & ce logarithme correspond à 60210 qui est la valeur cherchée de  $x$ . S'il étoit proposé de déterminer un moyen proportionnel géométrique entre deux nombres, les logarithmes offrent beaucoup de facilité pour y parvenir promptement. Le logarithme de ce moyen est égal à la moitié de la somme des logarithmes des deux nombres donnés. Si, par exemple, ces nombres sont 3 & 12, dont les logarithmes ajoutés forment la somme 1,556302 ; la moitié de cette somme qui est 0,778151, est le logarithme du moyen cherché,

& comme le nombre qui lui correspond est 6, on peut dire,  $3:6::6:12$ ; c'est-à-dire que 6 est le moyen demandé. S'il falloit déterminer plusieurs moyens géométriques entre deux nombres donnés, l'opération devient très-commode & très-courte par le secours des logarithmes. En effet, suivant les principes exposés précédemment, il faut déterminer la raison de la progression géométrique qu'on veut former, avant de calculer les moyens demandés. Il faut, pour trouver le logarithme de cette raison, retrancher le logarithme du plus petit des nombres donnés du logarithme du plus grand, & diviser le reste par le nombre des moyens demandés, augmenté d'une unité. C'est ainsi que voulant insérer entre 4 & 64 trois moyens géométriques, on fait une somme du logarithme de 64 & du complément arithmétique du logarithme de 4. Ensuite le quotient de cette somme diminué de dix unités & divisé par 4, ou le logarithme 0,301030, indique que la raison doit être 2. Remarquons qu'en faisant usage des règles ordinaires de l'arithmétique, il eût fallu exécuter une division & faire l'extraction de la racine quatrième du quotient, extraction toujours pénible, quand les nombres proposés sont considérables: d'ailleurs, plus le nombre des moyens augmente, plus les opérations sont laborieuses. Le logarithme de la raison étant ainsi déterminé, on l'ajoute au logarithme du petit nombre donné, & la somme est le logarithme du premier moyen. Ce dernier logarithme ajouté à celui de la raison fait connoître le logarithme du second moyen; & ainsi successivement. Enfin cherchant les nombres qui correspondent aux derniers logarith. on trouve les moyens cherchés, & on fait la progression demandée,  $4:8:16:32:64$ .

L'invention des logarithmes a non-seulement facilité la solution des questions que peut résoudre l'arithmétique ordinaire, mais aussi celle de questions plus compliquées qui exigent l'application des règles de l'algèbre. En voici deux exemples.

1.<sup>o</sup> Un vaisseau a été vendu 50000<sup>l</sup> payables à la volonté de l'acheteur, mais à condition que la somme

qui ne seroit pas payée porteroit intérêt à raison de 5 pour 100 par an. On demande combien il faudroit d'années pour que le prix d'achat fût doublé, en supposant qu'aucune partie de cette somme ne soit payée dans cet intervalle de tems.

La somme de 50000<sup>l</sup>, les intérêts de cette somme, & l'intérêt des intérêts étant accumulés, doivent composer ensemble, après un nombre  $n$  d'années, une somme de 100000<sup>l</sup>. à la fin de la première année, l'intérêt dû est le vingtième de 50000<sup>l</sup>; & en nommant  $a$  cette somme &  $b$  l'intérêt  $\frac{1}{20}$ , la dette à cette époque est représentée par  $a+ab$ , ou par  $a(b+1)$ . A la fin de la seconde année, il est dû  $a(b+1)+ab(b+1)$ , ou  $a(b+1)^2$  c'est-à-dire, ce qui étoit dû à la fin de l'année précédente & l'intérêt de cette dette. A la fin de la troisième année, il est dû  $a(b+1)^2+ab(b+1)^2$ , ou  $a(b+1)^3$ . Enfin à la fin de l'année  $n$ , la somme due est  $a(b+1)^n$ , & comme cette somme doit être double de 50000<sup>l</sup> ou de  $a$ , on doit former l'équation  $2a=a(b+1)^n$  ou  $2=(b+1)^n$  : il s'agit donc de trouver  $n$  qui indique combien d'années doivent s'écouler jusqu'au moment où la somme s'élèvera à 100000<sup>l</sup>, & les logarithmes rendent cette recherche facile. Car prenant les logarithmes des deux membres de cette équation, on a  $1.2=n \cdot l.(b+1)$ , & par conséquent  $n=\frac{1.2}{l.(b+1)}$ . Substituant ensuite  $\frac{1}{20}$  à la

place de  $b$ , on a  $n=\frac{1.2}{1.21-1.20}$ . Il faut donc diviser

0,301030 qui est le logarithme de 2 par 0,021189 qui est la différence des logarithmes de 21 & de 20. Le quotient exprime qu'après 14 ans deux mois & douze jours, la somme due, peut être doublée, comme on le demande.

2.<sup>o</sup> Si l'acheteur & le vendeur font entr'eux la condition que la somme de 50000<sup>l</sup> soit payée en dix ans, par des paiemens égaux, & en tenant compte non-seulement des intérêts des sommes non payées, mais aussi des intérêts d'intérêts, on demande quelle doit être la somme à payer à la fin de chaque année.

Conservons les dénominations précédentes & nommons  $x$  la somme payée annuellement. A la fin de la première année il est dû  $a+ab$  ou  $a(b+1)$ . & comme la somme  $x$  est payée à cette époque, la somme due au commencement de la 2.<sup>e</sup> année, est  $a(b+1)-x$ . A la fin de la 2.<sup>e</sup> année, & après le paiement de  $x$ , il est dû  $a(b+1)-x+ab(b+1)-bx-x$  ou  $a(b+1)^2-x(b+1)-x$ . A la fin de la troisième année & après le paiement de  $x$ , il est dû  $a(b+1)^2-x(b+1)-x+ab(b+1)^2-xb(b+1)-bx-x$  ou  $a(b+1)^3-x(b+1)^2-x(b+1)-x$ , & ainsi de suite; de sorte qu'à la fin de la dixième année & après le paiement de l'annuité, époque à laquelle il ne doit être rien dû, la quantité qui représente cette dette, & qui est  $a(b+1)^{10}-x(b+1)^9-x(b+1)^8-x(b+1)^7-x$ , doit être égale à zéro. On a donc l'équation  $a(b+1)^{10}=x[1+(b+1)+(b+1)^2+(b+1)^3+(b+1)^4+....+(b+1)^9]$ . On doit remarquer que cette suite de termes qui multiplie  $x$  & qui est entre deux parenthèses, est une progression géométrique dont, le premier terme est 1, le dernier  $(b+1)^9$ , & la raison  $(b+1)$ . la somme de tous ces termes, est égale, comme on l'a vu (86), au quotient de la différence, du premier terme au dernier multiplié par la raison, divisée par la raison diminuée d'une unité; c'est-à-dire à la quantité  $\frac{(b+1)^{10}-1}{b}$ . Par conséquent

l'équation précédente se change en celle-ci  $ab(b+1)^{10}=x(b+1)^{10}-x$ ; &  $x=\frac{ab(b+1)^{10}}{(b+1)^{10}-1}$ . Telle est la valeur

de l'annuité représentée par  $x$ , & dont les logarithmes facilitent le calcul. Car en substituant à la place de  $b$  & de  $a$ , leurs valeurs: en prenant ensuite les logarithmes des quantités  $a$ ,  $b$  &  $(b+1)^{10}$ , & en les combinant suivant qu'il est indiqué par l'équation  $1.x=\log. a+\log. b+10 \log. (b+1)-\log. [(b+1)^{10}-1]$  on trouve que  $x=8151^1 14^5$ . Le procédé qui a été détaillé & suivi pour parvenir à la solution des deux questions précédentes, peut servir de modèle pour résoudre plusieurs autres questions du même genre: & nous nous bornons à ces exemples, parce que dans la navigation, il se présentera des occasions nombreuses de faire des applications aussi variées que nécessaires de la théorie des logarithmes.

---

# LA SCIENCE

## DE

### L'HOMME DE MER.

#### SECTION DEUXIEME.

---

#### G É O M É T R I E.

---

99. **L**A nature n'offre à nos yeux, dans le ciel, sur la terre & sur les mers, que des corps matériels qui présentent, un volume plus ou moins considérable sous des faces variées, dans leur forme, leur nombre & leur grandeur; des angles diversement ouverts; & enfin des lignes qui, par leur longueur & leurs directions différentes, forment ces angles, ou terminent ces corps ainsi que leurs faces diverses. La mesure des corps, de leurs faces, des angles & des lignes; la comparaison de leur grandeur, & la détermination de leurs rapports; sont les objets de la science qui est nommée géométrie. Les propriétés sensibles de ces corps, telles que leur couleur, leur température, leur dureté, leur mollesse, leur élasticité, leur impénétrabilité, & enfin leur organisation, ne sont pas considérées dans la géométrie, qui est bornée à n'envisager que leur forme & l'étendue qu'ils occupent dans l'espace. Sous un tel point de vue, tous les corps naturels qui sont susceptibles de l'application des mesures annoncées, sembleroient devoir être embrassés explicitement par cette science; cependant quelque variété qu'on remarque dans leur figure & dans



leur volume, comme ils peuvent tous être décomposés ou divisés en parties moins dissimilables & plus ou moins nombreuses, la mesure de tous les corps en général est réduite, à celle de corps simples, à ceux qui ont des figures planes ou circulaires; & la géométrie en ne s'occupant que de celle de ces derniers, indique d'ailleurs comment les principes & les règles de ces mesures doivent s'étendre à tous les corps existans. Ces corps particuliers sont des pyramides, des cones, des prismes, des cylindres & des spheres. Leur forme est généralement connue; & leurs faces, qui, ainsi que dans tout autre corps connu, limitent la grandeur de leur volume ou leur solidité, sont elles-mêmes bornées par des lignes droites dans l'étendue qu'elles embrassent; c'est-à-dire dans leur surface. Sans doute la nature n'offre à nos yeux aucune ligne ni aucune surface qui n'appartienne à quelque corps solide; cependant l'esprit peut les isoler par le secours de la réflexion; il peut les imaginer séparées des corps qui frappent nos sens; il peut mesurer ces faces sans considérer la solidité des corps; & des lignes tracées sur ces faces peuvent être mesurées, comparées & variées dans leurs positions respectives, sans que dans toutes ces opérations, il devienne nécessaire d'avoir égard à la grandeur des surfaces. Par conséquent la géométrie peut traiter séparément & des lignes, & des surfaces, & des solides. Par de telles abstractions, ou par la division de tous ces objets, cette science devient plus facile à étudier; l'enchaînement de ses principes peut être mieux senti, & leurs conséquences dans les applications les plus éloignées, se présentent avec autant de netteté que de justesse. C'est par toutes ces raisons que la géométrie est partagée en trois branches bien distinctes. La première embrasse les lignes. Elles y sont considérées dans leur longueur, ainsi que dans leur direction; & elles sont comparées dans les positions respectives qu'elles peuvent recevoir. La seconde traite, des surfaces considérées isolément; de leurs dimensions nommées longueur & largeur; des lignes qui forment leurs limites; de l'espace qu'elles circonscrivent, des rapports de leurs

côtés, de leurs surfaces & des angles qu'elles peuvent faire entr'elles ou avec des lignes droites. Enfin la 3.<sup>e</sup> a pour objet la mesure du volume des corps & de leur contour. On y considère le nombre & la position de leurs faces, & on estime leur étendue; on y compare leurs solidités, leurs surfaces, ainsi que la grandeur des lignes qui les terminent. Chacune des parties de cette science présente des principes & des conséquences, qui, utiles à tous les arts, ont sur tout des rapports intimes & multipliés avec celui de la marine; & chacune de ses branches pourroit être infiniment étendue. Mais la géométrie de l'homme de mer est bornée par sa destination. Elle ne doit embrasser que les seules vérités qui sont applicables à la marine; c'est-à-dire celles qui sont nécessaires pour aider à concevoir ou à perfectionner & l'architecture navale, & la construction des vaisseaux, & leur armement, & l'art entier de la navigation. Le développement qu'on doit donner à ces trois branches de la géométrie doit donc être dirigé, & ses limites doivent être fixées, par l'étendue, comme par le nombre des applications qu'on peut en faire à la marine.

91. Avant de traiter ces divers objets, & afin de les présenter sans aucune interruption, ou sans aucune digression particulière; il paroît à propos de faire la description des corps qui sont considérés dans la géométrie, & de donner une idée de leur solidité, de leur surface, de leur figure, de leurs faces & des lignes qui peuvent être tracées sur ces corps. Il est aussi très-nécessaire de définir quelques mots dont la signification mérite d'être fixée avec précision.

L'espace est, cette vaste étendue, ce vuide immense où sont placés tous les corps de la nature. Le point n'occupe dans l'espace qu'une place infiniment petite en tout sens. Une suite de ces points pressés les uns contre les autres, est nommée une ligne droite, si elle est dirigée vers un seul point de l'espace. Mais elle est nommée une ligne courbe, si à chaque pas elle se dirige vers des points différemment placés; ou si chacun de ses points s'écarte infiniment peu de la direction des deux points qui le précédent immédiatement. La suite

*ab* (fig. 1.<sup>e</sup>) de plusieurs points qui tendent tous au point *e* est une ligne droite. Bien différente de celle-ci, la suite *cqd* de points, qui successivement se dirigent vers des points extérieurs, tels que *f*, *h*, & *g*, qui sont différemment placés, est une ligne courbe. Les lignes ont une longueur qui est plus ou moins considérable; mais ainsi que les points dont elles sont composées, elles ont une épaisseur & une largeur infiniment petites. L'intersection de deux lignes droites ne peut être qu'un point unique; parce qu'étant chacune une suite de points dirigés différemment, elles se confondroient nécessairement, si elles pouvoient être supposées avoir plus d'un point qui leur fût commun. Si, sans se traverser, elles se rencontrent dans l'espace & se touchent par une de leurs extrémités; l'ouverture qu'elles forment entr'elles est nommée angle rectiligne. C'est ainsi que [fig. 1] la ligne *ob* qui se joint en *b* à la ligne *ba*, fait avec celle-ci un angle *oba*, qui n'est autre chose que l'ouverture qu'elles concourent ensemble à former, ou l'inclinaison de l'une de ces lignes sur l'autre. Si on imagine qu'un très-grand nombre de lignes droites soient placées parallèlement lesunes aux autres & infiniment voisines, de manière que chacune soit dirigée vers un des points d'une ligne droite *ef* (fig. 2), qu'on suppose tracée dans l'espace; cet assemblage, de lignes assez pressées pour ne laisser aucun vuide entr'elles, & dirigées ainsi, est nommé un plan. *abcd* est un plan, & on peut le supposer formé par des lignes qui sont dirigées vers plusieurs points de la ligne droite *ef*. Comme l'étendue de ces lignes composantes, & leur nombre, restent indéterminés, d'après la description qui vient d'en être faite; un plan, peut avoir une longueur *ab* & une largeur *ad* indéfinies, tandis que son épaisseur est infiniment petite comme celle de ses lignes élémentaires. Il est d'ailleurs tel, que toute ligne droite ayant deux points communs avec ce plan, s'y applique parfaitement. On voit par conséquent que si deux points, fussent pour faire connoître la direction d'une ligne droite; il en faut nécessairement trois, pour indiquer la position d'un plan au milieu de l'espace. Un plan est-il terminé entièrement

par des lignes droites? Il est nommé une figure. Si ces lignes limitatrices sont au nombre de trois, la figure est un triangle: & un plus grand nombre de lignes lui fait donner le nom de polygone. Parmi ces figures, celle qui est terminée par quatre lignes, c'est-à-dire, par quatre côtés, qui, comparés deux à deux, sont parallèles; & qui est telle que *abcd*; est nommée un parallélogramme. Si les côtés sont multipliés à l'infini; si chacun peut être considéré comme un point; & si tous sont disposés de manière, que chacun soit également éloigné d'un point placé dans le même plan; la figure porte alors le nom de cercle. Les portions de l'espace qui sont alors circonscrites par de tels côtés, ou par ces points, sont nommées les surfaces de ces figures: & la somme des mêmes lignes, dans un de ces polygones, reçoit le nom de son contour. Dans un cercle *cdz* (fig. 1), la suite des côtés infiniment petits, ou des points qui limitent son étendue, est nommée la circonférence: & on distingue sous le nom de centre, le point tel que *o*, qui est également éloigné de chaque point de la circonférence *cdz*. Si on imagine qu'on superpose les uns au-dessus des autres, & dans des situations parallèles, un très-grand nombre de triangles ou de polygones égaux; il résulte de cet assemblage un corps nommé prisme, & qui a la forme *abcd* (fig. 3). Les faces latérales d'un tel corps sont autant de parallélogrammes, & ses deux bases opposées *afe* & *bcd* sont parallèles & égales chacune au polygone générateur. Enfin la portion de l'espace qui est terminée par ces mêmes faces, est nommée la solidité de ce corps, ou son volume. Lorsque la base ou le polygone générateur est un cercle; le solide engendré est nommé cylindre. Tel est le solide *onqpm* (fig. 4). Si on superpose les uns au-dessus des autres des triangles ou des polygones qui diminuent graduellement en étendue, suivant leur distance à une première figure qui sert de base; & de manière que la dernière de ces figures superposées ne soit qu'un point: ou si d'un point de l'espace on mène des lignes aux extrémités des côtés d'un polygone pris pour base; le solide qui est terminé par ces lignes & cette base, ou qui est

formé par des polygones accumulés & décroissans, est nommé pyramide. Le corps représenté (fig. 5) est tel que nous venons de le décrire. Ses faces sont des triangles dont un angle  $a$  pour sommet celui  $a$  de la pyramide; & sa base  $p$  ut être un polygone quelconque, comme elle est ici un triangle. D'ailleurs les triangles  $dbc$ ,  $omn$ , &  $riq$  peuvent être considérés comme faisant partie de ceux qui concourent à engendrer un solide de cette forme. Ils décroissent depuis la base  $dbc$ : & le dernier de ces triangles n'a plus que des côtés insensibles qui se confondent en un seul point  $a$ . Si la base d'un tel solide est un cercle  $cdb$  (fig. 6), les figures élementaires doivent être aussi des cercles: & ce solide, qui est terminé par un seul point  $a$  comme la pyramide, est nommé cône. Enfin si on imagine qu'une portion de l'espace; étendue en tout sens, soit tellement conformée que tous les points extérieurs de son contour soient également éloignés d'un point placé dans le milieu de cet espace; ce solide reçoit le nom de sphère. On voit sa forme  $abcde$  (fig. 7). Si on suppose un plan coupant qui traverse ce solide par son centre; il y forme une section  $bneu$ , qui nécessairement est un cercle; parce que tous les points du contour de cette section appartenans à la sphère, sont également éloignés du point  $o$  qui est dans le plan  $bneu$ . Une telle section, qui partage d'ailleurs la sphère en deux parties égales, est distinguée sous le nom de grand cercle de la sphère, & on peut en imaginer une infinité, dont les plans ont des directions différentes. Telles sont les formes des corps, des surfaces, & des lignes, qui sont considérées dans la géométrie. Leurs rapports avec les objets de l'art de la marine peuvent être déjà sentis; mais ils ne seront développés que dans les diverses applications, qui doivent suivre l'exposé de chaque principe, ou de chaque proposition de cette science; c'est-à-dire, dans les diverses conséquences qui résultent des propriétés de ces trois sortes d'étendue.

## ARTICLE PREMIER.

*Des Lignes.*

92. Soient marqués deux points sur un plan, ou dans l'espace ; la ligne la plus courte que l'on puisse mener de l'un à l'autre est nécessairement une ligne droite ; parceque la suite des points qui la composent & qui a son origine à un des points donnés, est dirigée vers un seul & même point. On trace une telle ligne, avec le secours, ou d'une règle, ou d'un cordeau, ou de piquets nommés jalons. une règle est-elle employée à cette opération, le côté parfaitement droit, qu'elle présente, est appliqué sur les points donnés ; & le long de ce côté, on fait glisser une plume ou un crayon, qui marque une suite de points placés sur une même direction. Lorsqu'on se sert d'un cordeau (& c'est dans le travail des pièces de bois, qu'il est souvent mis en usage par les charpentiers) : on le blanchit avec de la craie ; on le roidit ; on l'assujettit à passer par deux points donnés ; on l'éleve ensuite au-dessus de ce plan, en le pinçant par son milieu ; & sa tension qui le ramène vers le plan, lorsqu'il est abandonné à lui-même, lui fait imprimer sur ce même plan, la trace d'une ligne droite qui passe par les deux points proposés. C'est ainsi qu'un cordeau bien tendu, qui, passant par les deux points *b* & *m*, où doivent être placées les extrémités de la quille *bm* d'un vaisseau qu'on se propose de construire (fig. 37), indique la suite directe des sommets de tous les tins destinés à supporter cette quille en divers points de sa longueur. Un cordeau est aussi employé pour indiquer la direction de la route d'un vaisseau qui s'avance dans l'espace ; & voici comment on en fait usage. Une extrémité de ce cordeau, nommée ligne de lok, est attachée à une planchette, qui a la forme *abc* (fig. 101. G), & qui est nommée lok. Ce petit corps, chargé par sa base *bc* d'une certaine quantité de plomb, & jeté à la mer, peut flotter librement, s'enfonce assez profondément dans l'eau, pour résister aux légers efforts

qui tendroient horizontalement à le faire changer de place. La marche d'un vaisseau est-elle uniforme, on jette le lok *abc* sur le point de la mer que le vaisseau vient d'abandonner; & le cordeau, ou la ligne de lok, qu'on laisse alors s'étendre sur la surface de l'eau, à mesure que le vaisseau s'éloigne du lok, devient la ligne de direction de la marche de ce bâtiment, pendant la durée de l'observation qui est d'une demi-minute de tems. Si enfin il est question de tracer sur le terrain une ligne droite, dont les extrémités sont connues & peuvent être vues l'une de l'autre; on plante verticalement un piquet, ou un jalon sur chacune de ces extrémités; & ensuite on en plante d'autres intermédiaires; de manière que ceux-ci soient placés exactement sur l'alignement des jalons extrêmes. Les sommets, de ces jalons multipliés à volonté, & bien alignés sur les deux points donnés, marquent ainsi sur le terrain, tous les points qui appartiennent à une même ligne droite; & on peut marquer la trace continue de cette ligne, à l'aide d'un cordeau qu'on étend sur la tête de tous les jalons.

93. Mesurer une ligne droite, c'est chercher combien de fois sa longueur contient celle d'une autre ligne connue, & qu'on est convenu de prendre pour unité (3). Les mesures de longueur qui sont le plus en usage dans la société, sont la toise, le pied, le pouce & la ligne. Dans la marine, on y ajoute la brasse, la palme, le nœud, & une longueur de cable (nommée encablure). On estime en pieds, & en parties de pied, la longueur d'un vaisseau, ses largeurs, son creux, la longueur de sa quille, celle des différentes pièces de la coque d'un bâtiment, son tirant d'eau, l'élançement de son étrave, l'acculement de ses varangues, l'abaissement & l'élévation des marées, la hauteur de la mâture, la longueur des vergues, les dimensions des ancres, &c. Comme nous l'avons déjà dit; la brasse, qui est une longueur de 5 pieds, est employée pour mesurer, les profondeurs de la mer, la longueur des cordages tels que, les cables, les étais, les haubans, les galhaubans, &c. La palme, dont la longueur est de 13 lignes, sert à mesurer les diamètres des mâts &c

des vergues ; & c'est en encablures , ou en longueurs de 120 brasses , qu'on estime certaines distances peu considérables. Cette dernière unité sert aussi à mesurer la distance des vaisseaux qui naviguent de compagnie , celle des colonnes d'une armée navale en ordre de marche , ainsi que la longueur totale , ou de ces colonnes , ou d'une ligne de bataille. Enfin le nœud , dont la longueur est de  $47 \frac{1}{2}$  pieds , & qui est une des parties égales , dont une ligne de lok est composée ; sert à mesurer , & la vitesse d'un courant des eaux de la mer , & la longueur de chaque partie élémentaire de la route d'un vaisseau , c'est-à-dire l'espace , considéré comme rectiligne , que ce vaisseau parcourt pendant la durée d'un demi-minute de tems. Ainsi cette ligne de lok , qui est employée , comme on l'a déjà dit , à faire connoître la direction de la route d'un vaisseau , sert aussi à mesurer sa longueur , par le moyen de ses divisions , ou de ses nœuds. Nous dirons bientôt sur quelle base est fondé le choix de  $47 \frac{1}{2}$  pieds , pour la longueur de chaque nœud. Cette mesure , & toutes les autres (dont nous venons de faire l'énumération , comme étant adoptées dans la marine) , sont celles qui portées convenablement sur la longueur de tous les objets qui ont été cités précédemment , servent , par leur nombre , à évaluer l'étendue en ligne droite , soit de ces mêmes objets , soit d'une infinité d'autres qui sont susceptibles d'être mesurés de la même manière.

94. La définition déjà donnée des lignes courbes , annonce combien elles peuvent être variées & dans la grandeur de leur contour , & dans la position des points dont elles sont composées. Mais entre les courbes infiniment nombreuses qu'on peut imaginer , la géométrie de l'homme de mer ne considère que , les cercles , leur circonférence , & toutes leurs propriétés. Si elle traite de quelques autres courbes assez arbitraires , dont il est question dans l'art de la marine , telles que celles , des lisses , des lignes d'eau , des coupes , des barres , des estains ; & des sections qu'on peut faire , dans les baux , les mâts , les vergues , la carene , &c. ; c'est uniquement pour présenter les moyens de les décrire & de mesurer leur longueur , sans égard à leurs propriétés.



Déjà nous avons donné une idée d'un cercle quelconque & de sa circonférence ; & il seroit presque superflu d'indiquer comment on le décrit. Cependant , pour ne rien laisser à desirer, nous allons en présenter les moyens. Si on se sert d'un compas, son ouverture mesurée entre ses deux pointes, doit être égale au rayon ; c'est-à-dire , à la distance qui doit régner entre le centre & les divers points de la circonférence. Alors on appuie une de ses branches, par la pointe, sur le centre qui est donné dans un plan ; on fait tourner la seconde branche autour de la première , comme autour d'un axe fixe ; & cette dernière , trace , par sa pointe, sur ce même plan , une courbe uniforme nommée circonférence de cercle. On emploie aussi un cordeau dans le même dessein. On le fait d'une longueur égale à celle du rayon donné. On fixe une de ses extrémités sur le point qui, dans un plan , doit être le centre du cercle à décrire, & en faisant tourner ce cordeau tendu, dans le plan où le centre est placé, & autour de ce centre, la seconde de ses extrémités indique à chaque pas, le lieu des divers points de la circonférence demandée.

Si, sur un plan, plusieurs points sont désignés comme devant faire partie du contour d'une de ces courbes qui sont considérées dans l'architecture navale ; & qu'il faille tracer le cours continu d'une telle courbe, ou faire passer une ligne, par tous les points donnés : voici le moyen employé dans la marine. On se sert d'une latte pliante, en bois de sapin, dont l'épaisseur diminue, d'une de ses extrémités à l'autre. On la force, en la courbant, de passer par tous les points supposés ; & à l'aide d'un crayon ou d'une pointe, qu'on fait glisser le long de cette latte, on trace sur le plan, la courbe demandée. Il est aisé de voir que la longueur de telles courbes, peut être mesurée en pieds & parties de pieds, [ si elle est utile à connoître ] par le moyen d'un fil dont on enveloppe la face extérieure de la latte pliante employée à ce tracé.

La longueur de la circonférence d'un cercle peut être déterminée par le même procédé. Elle peut être estimée aussi en pieds & parties de pied ; & on a reconnu que

le double du rayon d'un cercle, ou son diamètre  $z\alpha q$  (fig. 1), étant de 7 pieds, la longueur de sa circonférence  $c\zeta dq$  est à-peu-près de 22 pieds. Ce rapport de 22 à 7, qui est celui de cette circonférence particulière à son diamètre, suffit, comme on le verra plus loin, pour trouver, ou la longueur de toute autre circonférence, étant donné son diamètre; ou la grandeur du diamètre d'une circonférence dont la longueur est connue. Ainsi il sera prouvé, que la mesure de toute circonférence est réduite à celle d'une seule circonférence & de son diamètre. Sans doute on conçoit, que plus le rayon d'un cercle est grand, plus aussi la longueur de son contour est considérable: mais si cette diversité d'étendue différencie les circonférences, certaine raison d'analogie tend aussi à les rapprocher. Car il y a une égale régularité dans leur courbure; & une ressemblance parfaite regne entre leurs formes. Ces rapports de similitude, ainsi que d'autres raisons de convenance & d'utilité, ont donc fait adopter la convention de regarder toutes les circonférences de cercle, comme étant composées chacune de 360 parties égales nommées degrés. Ainsi les plus grandes, comme les plus petites, sont également partagées en 360 degrés. On est convenu aussi de considérer, chacun de ces degrés comme composé de 60 parties égales nommées minutes; & chaque minute de 60 secondes. C'est en faisant usage de cette division conventionnelle, qu'on désigne la grandeur, d'un arc, c'est-à-dire, de telle portion d'une circonférence quelconque; par le nombre de degrés dont cet arc est composé: & c'est en indiquant le rayon de cet arc, ou de la circonférence dont il fait partie, qu'on donne une idée de la grandeur de chaque degré.

Les hommes de mer ont adopté la division de d'une circonférence en 360 degrés; mais ils en ont imaginé une autre qui leur est particulière. ils partagent la circonférence de la rose des boussoles, en 32 parties égales, dont chacune est par conséquent de 11 degrés 15 minutes; afin que chaque rayon mené du centre aux extrémités de ces arcs, puisse désigner, sous le nom d'air de vent, la direction, ou du vent

regnant,

régnant, ou de la route d'un vaisseau. La circonférence  $z d q c$  (fig. 1) présente ces dernières divisions. Les rayons, tels que  $o d$ ,  $o q$ ,  $o z$ , &c. qui sont tracés sur son plan, sont ceux qui portent le nom commun d'airs de vent, & qui d'ailleurs reçoivent encor un titre distinctif pour annoncer leur position à l'égard des 4 points principaux de l'horison.

Entre toutes les courbes possibles, autres que celles, ou des couples (fig. 27 & 47 G), ou d'une ligne d'eau (fig. 24), ou d'une lisse (fig. 48 & 69), ou d'un estain (fig. 61, 66 & 67), ou des barres d'arceffe (fig. 59), dont les contours sont tracés & mesurés, comme on l'a dit précédemment; il en est dont il importe particulièrement aux hommes de mer de connoître exactement la longueur, pour exécuter avec sûreté diverses opérations de la navigation. Ces courbes sont, 1.<sup>o</sup> celle qu'un vaisseau trace dans sa route sur la surface du globe, ou telle que  $m z$  (fig. 7), qui est représentée sur le contour de la sphere  $abcde$ ; & 2.<sup>o</sup> celle de la circonférence d'un grand cercle, de la terre dont on suppose la figure parfaitement sphérique, quoiqu'elle s'écarte un peu de cette forme régulière. Soit  $aec$  (fig. 102 G) la route d'un vaisseau sur une portion  $b q d$  de la surface de la mer. Elle est courbe, puisqu'elle est tracée sur une surface courbe; & cette courbure est d'autant plus sensible, quel'espace parcouru par un vaisseau est plus considérable. On a vu comment on détermine la direction de chacune des parties élémentaires de cette route: & on trouve leur longueur, en la mesurant à l'aide de la ligne de lok, lorsqu'elle est divisée en nœuds, comme on l'a dit précédemment. Cette longueur est indiquée par le nombre des nœuds qu'on laisse librement s'étendre sur la surface de la mer, ou sur la trace de la marche du bâtiment, pendant la durée de l'expérience, qui est toujours d'une demi-minute. Ainsi, en supposant qu'on mesure toutes ces routes partielles, & qu'on les réunisse ensuite en une seule & même somme, on peut parvenir à connoître la longueur totale de la route  $ac$  d'un bâtiment. Mais alors cette longueur ne seroit évaluée qu'en nœuds; & comme il est impor-

tant aux navigateurs que , dans ses positions toujours changeantes , un vaisseau puisse sans cesse être comparé à divers points de la surface du globe , il est devenu nécessaire de chercher le rapport de la grandeur de chaque nœud , à celle de la circonférence d'un grand cercle du globe. Celle-ci a été déterminée en mesurant immédiatement en toises , plusieurs de ses degrés ; & on a trouvé , en supposant la terre parfaitement sphérique , comme en prenant un milieu entre les degrés mesurés , que chaque degré de la circonférence d'un grand cercle de la terre , a une longueur de 57030 toises. On est convenu ensuite de donner le nom de lieue marine au 20<sup>e</sup> de l'étendue de chacun de ces degrés , c'est-à-dire de faire cette lieue de  $2851\frac{1}{2}$  toises , ou de 17109 pieds. Enfin chaque nœud de la ligne de lok a été fait égal à la 120.<sup>e</sup> partie d'un tiers de lieue. La grandeur de la lieue , & celle du nœud , ont ainsi un rapport déterminé avec la grandeur des degrés du globe ; & sous ce point de vue , elles peuvent servir de mesures convenables ; savoir , la lieue pour exprimer les plus grandes distances & les plus longues routes des vaisseaux ; & le nœud pour apprécier les plus petits changemens de position d'un vaisseau en mouvement sur la surface de la mer. Cette dernière mesure n'a pas été seulement imaginée pour aider à connoître le chemin fait par un bâtiment pendant une demi-minute de tems ; mais aussi pour que d'un tel chemin bien mesuré , on put conclure facilement l'espace que le même vaisseau parcourt dans une heure , en supposant sa marche uniforme. C'est ainsi que s'il franchit un espace égal à 4 nœuds , pendant la durée d'une demi-minute , ou pendant la 120<sup>es</sup> partie d'une heure ; il doit , lorsque sa vitesse reste constante , faire , pendant une heure entière , 120 fois plus de chemin que pendant le tems de l'expérience. Il doit donc faire 120 fois les  $\frac{4}{120}$ <sup>es</sup> d'un tiers de lieue , ou  $\frac{4}{3}$  de lieue. En général , un bâtiment qui file un certain nombre de nœuds , doit être supposé faire par heure autant de tiers de lieue ; & c'est en calculant , de la même manière , le chemin parcouru pendant chaque heure du

jour, qu'on conclut par une simple addition, la route qu'il fait en 24 heures.

95. *Des angles rectilignes.* Deux lignes tracées sur un même plan, peuvent être situées l'une à l'égard de l'autre, ou parallèlement ou obliquement, ou perpendiculairement : & si, en se rencontrant, elles se touchent ou se traversent, en un point qui alors leur devient commun, elles font entr'elles, comme on l'a déjà dit (91), des angles plus ou moins ouverts ; ou elles ont entr'elles une inclinaison, qui est aussi variable qu'il y a de positions relatives à leur donner.

Deux lignes sont parallèles, lorsque tracées sur un même plan, & telles que *ab* & *co* (fig. 8), tous leurs points correspondans sont à égale distance l'un de l'autre : c'est - à - dire, lorsque leur intervalle, mesuré au point *a*, & ensuite au point *o*, ou à une distance plus ou moins grande du point *a*, est constamment le même ; de sorte que ces lignes, quoique prolongées aussi loin qu'on peut le supposer, ne doivent jamais se rencontrer.

Des lignes sont obliques, lorsqu'inclinées les unes aux autres, & partant de divers points du plan ou elles sont situées, elles se rencontrent ou peuvent se rencontrer dans leur prolongement. Telles sont les lignes *ab* & *ed*. Remarquons, 1.<sup>o</sup> que le point de rencontre, ou d'intersection de deux lignes, telles que *ob* & *ab* (fig. 1), reçoit le nom de sommet, de l'angle que ces lignes forment entr'elles ; 2.<sup>o</sup> que celles-ci sont nommées les côtés de l'angle ; & 3.<sup>o</sup> que généralement on désigne un angle, tel que *oba*, par trois lettres, dont l'une *b*, qui est au sommet, est toujours nommée au milieu des deux autres *a* & *o*, placées sur un des points de chaque côté de l'angle. Cependant on désigne souvent un angle par la seule lettre de son sommet, lorsque ce même sommet n'est pas commun à plusieurs angles.

On dit d'une ligne telle que *ca* (fig. 9) qu'elle est perpendiculaire à la ligne *ed*, lorsqu'elle ne penche pas plus vers le côté *ce*, que vers son prolongement *cd*. De-là on peut conclure que si le point *c* est également éloigné de *e* & de *d*, tout autre point de la ligne *ac*

est aussi également éloigné des mêmes points  $e$  &  $d$ . En effet, soit un autre point  $a$  qui appartient à la perpendiculaire  $ac$ , ses distances aux points  $e$  &  $d$  sont les lignes  $ae$  &  $ad$ , & elles sont parfaitement égales. Car supposons l'angle  $acd$  replié sur l'angle  $ace$ , de manière que  $ac$  soit dans le pli : puisque la ligne  $ac$  est inclinée sur  $cd$ , comme elle l'est sur  $ce$ , l'ouverture des deux angles  $ace$  &  $acd$  doit être la même ; ainsi le côté  $cd$ , dans cette superposition, doit s'étendre ou s'appliquer sur le côté  $ec$  : & comme  $ec$  est égal à  $cd$ , le point extrême  $d$  doit s'appliquer sur le point  $e$  ; c'est-à-dire, que les extrémités de la ligne  $ad$ , (puisque  $a$  reste fixe) tombent sur celles de la ligne  $ae$ . il y a donc égalité parfaite entre les distances  $ae$  &  $ad$ . Comme on peut étendre le même raisonnement à la position de tout autre point de  $ac$ , comparé ou aux extrémités de  $ed$ , ou à des points de cette ligne également distans de  $c$ , on peut dire généralement que si une ligne est perpendiculaire sur le milieu d'une seconde ligne, tous les points de la première sont également éloignés des extrémités de la seconde. Si la ligne  $ac$  est prolongée jusqu'en  $i$ , & si on mène les deux lignes  $ei$  &  $id$ , la ligne  $ai$  est visiblement plus courte, que la somme des deux lignes  $ei$  &  $ea$ , ou que celle de  $id$  &  $da$ . C'est pourquoi, ces lignes étant considérées dans un cercle dont  $ac$  &  $ci$  sont deux rayons, la ligne  $ac$ , ou la perpendiculaire abaissée du point  $a$  sur  $cd$ , doit être plus courte que toute autre ligne qu'on peut supposer menée du même point  $a$ , à un point quelconque de la ligne  $ed$ . L'angle  $acd$ , formé par les deux lignes  $ac$  &  $cd$  qui sont perpendiculaires l'une à l'autre, est nommé angle droit.

Si une ligne telle que  $cb$ , est plus penchée vers le deuxième côté  $cd$ , que vers son prolongement  $ce$ , cet angle  $bcd$  est nommé aigu ; mais il est dit obtus, lorsque  $uc$  est moins penchée sur le second côté  $cd$ , que sur  $ce$ , prolongement de  $cd$ . On voit ainsi que l'ouverture d'un angle, ou l'inclinaison de deux lignes, peut être grandement diversifiée. Il est extrêmement utile aux hommes de mer, de savoir mesurer des angles donnés, comme de savoir former des angles d'une

grandeur déterminée ; & on est convaincu de cette nécessité, lorsqu'on parcourt, même rapidement, les différentes branches de l'art de la marine.

Dans les vaisseaux, les mâts sont, ou perpendiculaires, ou inclinés à la quille ; les manœuvres dormantes & courantes sont divers angles avec les objets auxquels elles sont attachées ; l'effet du gouvernail dépend de l'angle d'incidence sous lequel l'eau environnante vient le frapper. Il en est de même de la résistance de l'eau ; de l'action, des courans, des lames, & de l'effort des vents sur les voiles. Le navigateur, en mer, observe l'angle que fait la route d'un vaisseau, soit avec sa quille, soit avec d'autres lignes déterminées, les inclinaisons latérales des bâtimens, les angles sous lesquels il apperçoit des objets éloignés, soit dans le ciel, soit autour de lui. C'est aussi par des angles qu'il juge de sa position relativement à tous les points auxquels il se compare ; c'est-à-dire, qu'il juge ainsi s'il est au vent, ou sous le vent ou par le travers de ces mêmes points. Les ancres sont conformées de manière qu'elles présentent leurs pattes au foi qu'elles doivent pénétrer, sous l'angle le plus favorable à l'amarrage des bâtimens. Dans les ports, les charpentiers, pour travailler les pièces composantes d'un vaisseau, ont recours à des équerrages, à des perpendiculaires, à des obliques ; ils en font usage pour disposer convenablement ces pièces, en élevant ces grands édifices, & ils donnent aux cales de construction une pente assortie à la grandeur des bâtimens. Dans l'architecture navale, toutes les lignes projetées sur des plans, sont aussi entr'elles des angles dont la grandeur est fixée d'après certains rapports. Ainsi aucune des parties de l'art de la marine, ne peut être exercée avec succès, sans qu'on connoisse comment on mesure des angles quelconques, comment on leur donne une grandeur convenue, comment on les compare, comment on fixe leurs rapports, & enfin comment on applique cette théorie aux besoins de cet art.

On a satisfait à ces vues particulières, en ayant égard à des considérations plus générales ; & on a établi une mesure commune qui sert à estimer exactement l'incli-

naïson d'une ligne à une ligne. La circonférence d'un cercle quelconque, dont le centre est au sommet d'un angle, a paru présenter une mesure convenable; & la régularité de son contour, ainsi que ses divisions en degrés, minutes & secondes, l'ont fait reconnoître pour une échelle uniforme, autant qu'étendue & précise. On est donc convenu d'adopter cette base, & voici comment on a raisonné pour exprimer, à l'aide des divisions d'une circonférence de cercle, la valeur d'un angle quelconque.

96. Soit l'angle  $bcd$  (fig. 9), qui est formé par l'inclinaison de la ligne  $bc$  sur la ligne  $cd$ . On peut supposer que cette inclinaison, d'abord nulle, a augmenté graduellement; ou autrement, on peut supposer que la ligne  $bc$ ; avant d'être arrivée dans la position qui lui est donnée dans cette figure, étoit d'abord couchée sur la ligne  $cd$ , & qu'ensuite en tournant sur son extrémité  $c$ , elle est parvenue à faire avec elle un angle tel que  $bcd$ . En donnant cette origine naturelle à l'angle  $bcd$ , on voit que si chaque point de  $bc$ , dans la rotation supposée, laisse après lui une trace de sa marche, cette trace devient un arc de cercle décrit du point  $c$  comme centre; parceque chaque point, dans ce mouvement, reste sans cesse à une même distance de ce centre. On voit aussi que la grandeur de ces arcs augmente & diminue, selon que l'inclinaison de  $bc$  sur  $cd$  devient ou plus grande ou plus petite; & que tous ces arcs, tels que  $bd$  &  $zs$ , sont composés d'un même nombre de degrés, quoique leur longueur soit différente. Car les points  $b$  &  $z$ , qui par un mouvement uniforme, commenceroient & finiroient en même tems de tracer chacun une circonférence entière, ou 360 degrés, décrivent nécessairement, dans un même tems, des arcs d'un même nombre de degrés, & tels que  $sx$  &  $db$ . Ainsi, puisqu'il est évident que plus l'ouverture d'un angle est considérable, plus aussi sont nombreux les degrés d'un quelconque de ces arcs compris entre ses côtés, & décrits de son sommet comme centre; puisque le nombre de ces degrés change avec cette ouverture, & dans le même rapport; ou, puisqu'en supposant que l'angle



*bcd* est la moitié de *acd*, l'arc *ad* estimé en degrés est double de *bd*; on doit conclure que la mesure d'un angle quelconque est le nombre de degrés, & de parties de degrés de l'arc compris entre ses côtés, & décrit de son sommet comme centre.

La mesure de l'angle *bcd* est donc l'arc *bd*; celle de *acd* est *ad*, & celle de *ucd* est *uad*. Tous ces angles, & tous ceux qu'on peut concevoir dans l'ouverture de l'angle *ucd*, peuvent être supposés formés successivement par la rotation de la ligne *dc* autour du point *c*, à commencer du point *d*. On peut imaginer aussi que la rotation continuée de *dc* autour de *c*, ait amené cette ligne dans la position *ce*, ou dans le prolongement de la direction primitive de *cd*. Alors l'extrémité *d* se trouveroit avoir décrit la moitié de la circonférence entière. Car si on concevoit que cette extrémité *d*, au-lieu de tracer l'arc *dbae*, eût tourné dans le sens opposé, & eût parcouru l'arc *dite*; la ligne *cd* seroit aussi parvenue dans la position *ec*, après avoir formé, dans ce mouvement, des angles de même grandeur & en même nombre, que lorsque *d* décriroit *dbae*: par conséquent la partie *dite* de la circonférence tracée, doit être égale à *dbac*. La ligne *ed*, qui sépare ces deux arcs, est nommée diamètre. Ainsi toute ligne qui menée dans un cercle, passe par le centre *c* & aboutit à deux points opposés *e* & *d* de la circonférence, partage celle-ci en deux parties égales.

97. Un angle tel que *acd* est-il droit, ou la ligne *ac* est-elle perpendiculaire à *cd*? sa mesure, qui est l'arc *ad*, est de 90 degrés. Car comparons l'angle *acd* avec l'angle *ace*, qui est formé par *ac* & par le prolongement de *cd*; ils doivent être égaux, puisque *ac* penche également vers *cd* & vers *ce*. Leurs mesures sont donc égales; mais la somme de ces mesures, qui sont *ea* & *da*, vaut 180 degrés, parceque *ecd* est un diamètre; par conséquent, la mesure de l'angle *acd*, ou celle d'un angle droit, est de 90 degrés. De-là il résulte que la mesure d'un angle aigu, tel que *bcd*, est toujours plus petite que 90 degrés; & que celle d'un angle obtus, tel que *ucd*, surpasse toujours celle de l'angle droit. La

différence des valeurs d'un angle aigu, ou d'un angle obtus, à celle d'un angle droit, ou à 90 degrés, est nommé le complément de ces premiers angles; tandis que la différence de la valeur de ces mêmes angles à la grandeur de la demi-circonférence, ou à 180 degrés, reçoit le nom de supplément de ces angles. C'est ainsi que le complément de  $bcd$ , est l'angle  $bca$  ou l'arc  $ba$ ; celui de  $acd$  est  $uca$  ou  $ua$ . Le supplément de  $acd$  est  $ue$ , & celui de  $bcd$  est  $bue$ . De-là on doit conclure que si deux angles diffèrent également, ou de 90 degrés, ou de 180 degrés; c'est-à-dire, s'ils ont des compléments égaux ou un même supplément, ils sont nécessairement de même grandeur.

L'inspection de la figure démontre aussi que si une ligne telle que  $bc$ , rencontre une autre ligne, telle que  $ecd$  & sans la traverser, en un point  $c$ ; elle fait avec celle-ci deux angles  $bcd$  &  $bce$ , qui valent ensemble 180° ou qui sont suppléments l'un de l'autre). Car en traçant de leur sommet commun  $c$ , comme centre, les arcs qui sont leur mesures, la somme  $dbae$  de ces arcs vaut 180 degrés; puisque la ligne  $ecd$  est un diamètre. Si la ligne  $bc$  est supposée prolongée au-delà de  $c$ ; ou si deux lignes, telles que  $bt$  &  $ed$ , se croisent en un point  $c$ , il y a égalité entre l'angle  $bcd$  & l'angle  $ect$ , (qui ayant un même point pour sommet, & leurs ouvertures opposées, sont nommés angles opposés au sommet). Car décrivons du sommet commun, comme centre, les mesures de ces angles, & même la circonférence entière, les lignes  $ed$  &  $bt$  sont deux diamètres; les angles  $bcd$  &  $ect$ , ont donc chacun pour supplément le même angle  $bce$ ; & par conséquent les angles  $bcd$  &  $ect$ , opposés au sommet, sont égaux. On doit prononcer, par la même raison, l'égalité des angles  $tcd$  &  $bce$ , qui sont aussi opposés au sommet.

Si deux lignes parallèles  $ab$  &  $co$ , tracés sur un même plan, sont traversées par une troisième ligne  $def$ , nommée sécante; cette dernière doit être également inclinée sur les deux parallèles. Ainsi il y a égalité, entre les angles  $deb$  &  $cio$ , entre  $dea$  &  $dio$ , entre  $feb$  &  $fio$ , & entre  $aei$  &  $cif$ . On peut dire aussi qu'il y a égalité

entre les angles *deb* & *cif*, (qui sont nommés alternes-externes, parceque tous deux sont placés hors de l'espace *aboc* qu'embrassent les paralleles, & parce que l'un est à droite, tandis que l'autre est à gauche de la sécante). Car la sécante étant également inclinée sur les paralleles, & l'angle *cio* étant opposé au sommet, à l'égard de l'angle *cif*, les deux angles comparés sont l'un & l'autre égaux au même angle *cio*; & par conséquent, ils sont égaux entr'eux. De même les angles alternes-internes, tels que *aei* & *eio*, sont de même valeur comme étant égaux chacun à un 3.<sup>e</sup> angle *deb*. Car celui-ci & l'angle *aei* sont opposés au sommet; & *eio* est égal à *deb*, à cause de l'égale inclinaison de la sécante sur les paralleles; par conséquent, les angles alternes-internes sont égaux. Si on compare deux angles externes, & placés du même côté de la sécante, tels que *deb* & *oif*, on trouve qu'ils sont supplémens l'un de l'autre. Car *deb* est égal, à *cio* qui a *fio* pour supplément. Enfin les angles internes, situés du même côté de la sécante, & tels que *bei* & *eio* sont aussi supplémens l'un de l'autre; puisque *bei* est égal, à *fio* qui a pour supplément *eio*.

De toutes ces propriétés, il résulte qu'il y a égalité entre des angles tels que *mse* & *eio*, qui ont leurs côtés paralleles, & qui présentent leur ouverture dans le même sens. En effet, les côtés *se* & *ie* étant prolongés, se coupent en un point *e*; & alors l'angle *deb*, que les prolongemens forment ensemble, est égal à chacun des deux angles donnés. Il l'est à *mse*, parceque la sécante *se* est également inclinée sur les paralleles *sm* & *de*, & il l'est à *eio*, parceque la sécante *di* est aussi également inclinée sur les paralleles *sb* & *fo*: donc les angles annoncés sont égaux.

99. Après avoir posé les bases de la mesure & du rapport des angles, il faut, afin de favoriser les opérations des hommes de mer, indiquer les moyens, ou les instrumens convenables, soit pour mesurer tous les angles qui peuvent entrer dans les calculs des marins, soit pour tracer sur le papier, ou sur des plans quelconques, ceux dont la grandeur est déter-

minée. Les charpentiers de vaisseaux employent pour mesurer un angle quelconque, une fausse équerre (fig. 13), dont les deux branches  $AB$  &  $BD$ , réunies par une charnière en  $B$ , peuvent, en s'ouvrant, ou en se resserrant, former des angles de toute grandeur. C'est avec cette équerre qu'ils mesurent, sur le plan d'un vaisseau à construire, l'angle que doit former, par exemple, le gabariage  $nm$  d'un couple (figure 69.  $G$ ) avec l'élément  $nr$  du contour d'une lisse  $afno$ . Une des branches est placée sur  $nr$ , le sommet  $B$  au point  $n$ , & la seconde branche sur  $nm$ . Si cet angle, ainsi mesuré, est aigu, comme  $mnr$ , ils le nomment un équerrage en maigre; & s'il est obtus, comme  $fek$ , l'équerrage est en gras. C'est avec de pareils équerrages, mesurés sur les plans des lisses, & portés aux divers points de l'arrête  $oen$  d'une pièce de bois, (fig. 62.  $G$ ) qu'ils dirigent la conformation de cette pièce. Si l'équerrage de cette pièce en  $e$  est donné; ils la taillent de manière, que, sur chaque face  $ionm$  &  $lonp$ , des lignes  $re$  &  $eu$ , tracées avec des directions déterminées, forment entr'elles un angle égal à l'équerrage mesuré.

D'autres instrumens servent à mesurer la grandeur des angles, par la valeur des arcs de cercle qu'ils embrassent entre leurs côtés, & qui sont décrits de leur sommet comme centre. Ces instrumens sont connus sous les noms de sextant, d'octant, de cercle, de graphometre, de boussole, & de rapporteur. Les trois premiers sont sur-tout relatifs aux observations astronomiques, & c'est en traitant de celles-ci que nous en présenterons la description. Au reste, dans leur construction, ils n'offrent que la forme, ou d'un cercle, ou d'une portion de cercle, dont la circonférence est divisée en degrés & parties de degré, ainsi que tous les moyens nécessaires pour rendre leur usage aussi sûr que commode. Le graphometre est un instrument en cuivre, qui est composé d'un demi-cercle  $debc$  (fig. 10), dont la circonférence est divisée en degrés & parties de degré. Un de ses diamètres  $ab$  est nommé alidade, parceque mobile, il porte sur ses extrémités une pinnule, & parcequ'il peut tourner librement autour du centre  $u$ ,

dont il ne peut s'écarter. Dans cet état, s'agit-il de mesurer un angle *oui*, sous lequel l'œil d'un observateur en *u*, doit voir les objets *i* & *o*; l'instrument est placé dans le plan de ces objets, & de manière que le point *i* soit vu de l'observateur sur la direction d'un autre diamètre fixe *duc*, qui porte aussi à cet effet une pinnule sur chacune de ses extrémités. Ensuite on fait tourner l'alidade mobile *ab*, jusqu'à ce qu'à travers les pinnules *a* & *b*, l'observateur aperçoive l'objet *o*; & l'arc compris entre les côtés de l'angle *buc*, ou de *oui*, est la mesure de l'angle cherché, exprimé en degrés & parties de degré.

La boussole est souvent employée par les hommes de mer, pour mesurer des angles. Cet instrument est formé d'une boîte, au milieu de laquelle est suspendue horizontalement, sur un pivot vertical, une aiguille aimantée, qu'on fait avoir la propriété de rester dans une même position, & d'y revenir lorsqu'elle en est écartée. Cette aiguille, qui tourne librement sur un pivot, & qui peut ainsi, dans tous les tems, prendre sa situation naturelle, porte un carton circulaire, tel que NOSE (fig. 12), qui est nommé rose de compas, dont le centre est le sommet du pivot, dont la circonférence est divisée en 360 degrés, & sur lequel 32 rayons, menés aux extrémités de 32 arcs de 11 degrés 15 minutes, indiquent autant d'airs de vent. Soient deux objets *b* & *u*, & soit demandé l'angle que forment entr'eux les rayons visuels menés de ces deux points à l'œil d'un observateur, placé au point *c*. Comme il y a deux pinnules sur les côtés opposés de la boîte, en *a* & en *d*, & sur la direction d'un des diamètres de la rose, on observe d'abord l'arc *Nd*, qui est la mesure de l'angle *bcN*, formé entre la direction *Ns* de l'aiguille, & le rayon visuel *acdb* mené à l'objet *b*. Ensuite présentant les pinnules vis-à-vis l'objet *u*, on observe l'arc *Ni*, qui est la mesure de l'angle de l'aiguille avec le rayon visuel *uic*; & la différence des deux arcs mesurés est, dans le cas supposé, la mesure de *dei*, ou de l'angle sous lequel les objets *b* & *u* sont vus du point *c*.

Afin de faire connoître d'autres usages de la boussole,

nous devons présenter quelques idées particulières & éloignées du sujet. La définition de la sphere qu'on a déjà donné ailleurs (91), est celle de la forme de notre globe, & sa sphéricité est démontrée; non seulement par la figure circulaire de son ombre dans les éclipses de lune, mais aussi par les observations des voyageurs qui ont fait le tour du monde, & auxquels les astres ont toujours paru changer de position relative, suivant la direction & la longueur de la route des vaisseaux. Le globe étant donc considéré comme une sphere, on peut imaginer des circonférences de grand cercle tracées sur sa surface (91); & comme le mouvement diurne de tous les points du ciel, démontre que le globe tourne sur lui-même en 24 heures, on peut supposer que plusieurs de ces circonférences passent par les deux points, autour desquels le globe semble faire sa revolution journaliere. De tels cercles ainsi placés, & tels que *azp* & *aup* (fig. 7), reçoivent le nom de méridiens; & le cercle *buen*, qui est situé à égale distance des poles de la terre, est nommé l'équateur du globe. Après cette explication, on voit que, pour chaque point *t* d'une route *md* que fait un vaisseau, on peut imaginer un meridien *atup*, qui traverse cette route; & le point d'intersection est le sommet de l'angle que fait en ce point *t*, la route du vaisseau, avec la direction du meridien du lieu. C'est un tel angle que les navigateurs en mer s'appliquent à mesurer, à tout instant, & à l'aide de la boussole. Ils cherchent, par des observations astronomiques dont nous parlerons ailleurs, l'angle que la direction *ab* de l'aiguille aimantée (fig. 96. G), fait avec celle *is* du meridien du lieu; & ensuite par l'angle que cette même aiguille leur paroît faire avec la direction de la route, ils déterminent l'angle véritable *ati* (fig. 7) qui est formé entre la route & le meridien du lieu. Cet angle est nommé le rhumb de vent de la route d'un bâtiment.

C'est ainsi qu'on estime, en mer, les véritables directions des vents, des courans, & de la quille d'un vaisseau, en mesurant les angles qu'elles font avec celles de l'aiguille aimantée. C'est encore à l'aide de cet instru-

ment, qu'une armée navale combine ses dispositions, ses mouvemens; qu'on dirige, la nuit comme le jour, à travers les plus vastes mers, un vaisseau destiné pour un point détermine de la surface du globe; & que les navigateurs jugent de leur position respective, soit entr'eux, soit à l'égard de tout objet extérieur.

L'emploi étendu, varié & fréquent qu'on fait ainsi de la boussole, a fait imaginer de donner des noms particuliers à chacun des 32 airs de vent, qui sont tracés sur la rose & la seule inspection des noms que reçoivent les airs de vent menés dans le 1.<sup>r</sup> quart de cette rose, (& dont nous allons faire l'énumération), suffira sans doute pour donner une idée des dénominations distinctives des autres airs de vent, tracés dans les autres quarts de la rose.

Deux diametres perpendiculaires l'un à l'autre, NS & OE (fig. 12), représentent, l'un la direction de l'aiguille placée sous le carton NOSE; & l'autre la ligne menée de l'orient à l'occident magnetiques sur l'horison du lieu. La ligne NS, est aussi nommée méridien magnétique: Les extrémités de ces lignes indiquent par conséquent à-peu-près les quatre points principaux de l'horison, lorsque l'aiguille aimantée ne s'éloigne, de la direction réelle du méridien, que d'une quantité à-peu-près connue. Les rayons, ou les airs de vent, CN & CO, sont nommés le nord & l'ouest; c'est-à-dire, qu'un vaisseau qui court de C vers N, ou vers O, est dit courir au nord ou à l'ouest. Un air de vent mené entre le N & l'O, & qui partage également le quart de la circonférence NO, est nommé le nord-ouest, ou NO, du nom des airs de vent N & O, entre lesquels il est placé. Deux autres rayons menés au milieu de l'intervalle qui sépare le NO, du N & de l'O, sont des airs de vent, qui reçoivent aussi un nom composé de ceux des airs de vents entre lesquels ils se trouvent; de sorte que l'air de vent dirigé de c en g, est écrit NNO, ou nommé nord-nord-ouest; & celui qui est mené au point h, est distingué sous le nom de ONO, ou ouest-nord-ouest. Enfin quatre rayons qui partagent également les intervalles des airs de vent déjà désignés, ont aussi des

noms distinctifs. Celui qui est entre l'O & le O NO, est placé au quart de l'espace qui sépare l'O & le NO; c'est pourquoi il est nommé  $O\frac{1}{4}NO$ , ou ouest-quart-nord-ouest. Cette dénomination indique qu'un tel air de vent est voisin de l'ouest, mais qu'il en est éloigné du côté du N, à une distance égale au quart de l'espace compris entre le NO & l'O. Les trois autres airs de vent, par des raisons semblables, sont nommées  $NO\frac{1}{4}O$ ,  $NO\frac{1}{4}N$ , &  $N\frac{1}{4}NO$ . On voit aisément par ces détails, quels sont, dans les trois autres quarts de la rose, les noms analogues qui distinguent les airs de vent qui y sont tracés: ainsi il seroit superflu de prolonger cette énumération.

100. Enfin, il est un autre instrument qui sert à mesurer des angles tracés sur le papier, & qui est nommé rapporteur (fig. 11). Il est en cuivre, ou en corne, & composé d'une demi-circonférence *irm*, qui est divisée en degrés. S'agit-il de l'employer à mesurer un angle donné? on place le demi-cercle *irm* de manière que l'angle donné *pun* ait son sommet au centre *u*, & qu'un de ses côtés *un* soit dirigé suivant *um*; alors l'autre côté *up* de l'angle donné, indique, par sa direction qui croise en *o* la demi-circonférence *irm*, l'arc *om* qui est la mesure de cet angle donné.

C'est avec un tel instrument qu'on peut mener par un point donné, tel que *e* (fig. 8), une ligne parallèle à *co*. Car en traçant une sécante quelconque *df*, qui passe par le point donné *e*, tout se réduit à mener par le même point *e*, une ligne qui fasse avec *def* un angle égal à *dio* (98). C'est pourquoi on mesure ce dernier angle avec cet instrument, nommé rapporteur: on place ensuite son centre en *e*, en dirigeant son diamètre sur *ed*; & enfin, par l'extrémité de l'arc mesuré, ainsi que par le point *e*, on mène une ligne *eb*, qui est nécessairement parallèle à la ligne donnée *co*, puisque la sécante *df*, est alors également inclinée sur les deux lignes *co* & *eb*.

101. Nous venons de voir sur quels principes repose l'art de mesurer les angles; nous avons fait connoître des instrumens imaginés pour prendre ou marquer ces



mesures : nous avons fait voir comment on doit procéder pour faire former à deux lignes droites un angle qui est déterminé, parcequ'il est égal à un angle connu ainsi il nous reste à dire comment on doit tracer sur le papier un angle qui ait une valeur de  $N$  degrés. On tire la ligne  $cy$  (fig. 9), & du point  $c$ , comme centre, on décrit, avec un rayon quelconque  $dc$ , ou  $sc$ , ou  $cy$ , un arc qui soit du nombre  $N$  de degrés; alors, par l'extrémité de cet arc, & par le centre  $c$ , on mene une ligne indéfinie  $cb$ , & cette ligne forme avec  $cy$  l'angle demandé. Le rapporteur rend cette opération facile (fig. 11) : on mene une ligne  $un$ , & on la destine à devenir un des côtés de l'angle cherché; on place le centre du rapporteur sur un point  $u$ , de cette ligne, qui d'ailleurs est dirigée suivant le diamètre  $im$  de l'instrument; on tire une ligne  $up$ , par le centre  $u$ , & par l'extrémité  $o$  de l'arc  $om$ , qui a pour grandeur le nombre des degrés indiqués. L'angle  $pum$  devient alors celui qu'on s'étoit proposé de former.

C'est par un procédé à-peu-près semblable, qu'on pourroit mener une ligne dirigée perpendiculairement à une autre ligne donnée, ou qui feroit avec elle un angle droit; mais il est des moyens raisonnés pour y parvenir, sans avoir recours au rapporteur, & nous allons les exposer.

On fait qu'une ligne qui est perpendiculaire sur le milieu d'une autre ligne, a tous ses points également distans des extrémités de cette dernière; & on fait aussi que la direction d'une ligne quelconque est suffisamment indiquée par la position connue de deux de ses points. Ainsi, soit proposé d'élever une perpendiculaire sur le milieu de  $ed$  (fig. 9), tous les points de la ligne à tracer doivent être à égale distance de  $e$  & de  $d$ ; par conséquent, pour la tracer, il suffit de trouver deux points qui soient placés à égale distance des deux extrémités  $e$  &  $d$ .

Du point  $d$  comme centre, & avec un compas dont l'ouverture soit plus grande que  $cd$ , soit décrit, au-dessus de  $ed$ , un petit arc, qui ait pour rayon  $ad$ : & si en-

suite du point  $e$  comme centre, avec la même ouverture de compas, on trace un autre petit arc, qui coupe le premier en  $a$ , ce point d'intersection est également éloigné de  $e$  & de  $d$ . En faisant une semblable opération, avec la même, ou avec une autre ouverture de compas, soit au-dessous, soit au-dessus de  $ed$ ; & en prenant pour centre les mêmes points  $e$  &  $d$ ; on trouve un autre point d'intersection  $n$ , qui est aussi également éloigné de  $e$  & de  $d$ . Alors si on mène de  $a$  en  $n$ , une ligne qui réunisse les deux points trouvés, cette ligne est la perpendiculaire cherchée; & elle passe par le milieu de  $ed$ , puisque le point  $c$ , qu'elle a de commun avec elle, est, comme les points  $a$  &  $n$ , également éloigné des deux extrémités  $e$  &  $d$ .

Si la perpendiculaire demandée ne doit pas passer par le milieu de la ligne  $ab$ , (fig. 14), mais par un point donné  $c$ ; alors on marque sur cette ligne, & de part & d'autre de  $c$ , deux points  $b$  &  $d$ , également éloignés de  $c$ . ensuite on trace, de ces points  $b$  &  $d$  pris pour centre, & avec un rayon convenable, deux petits arcs qui se coupent en un point  $e$  placé au-dessus de  $ab$ ; & les points  $c$  &  $e$  étant deux points également éloignés de  $b$  & de  $d$ , la ligne  $ec$ , qui les réunit, doit être la perpendiculaire cherchée.

Si cette dernière ligne devoit être menée par l'extrémité  $c$  d'une ligne  $ac$ ; alors si cette ligne peut être prolongée au-delà de  $c$ , on fait  $cb$  égal à  $cd$ ; on cherche comme précédemment, un point  $e$  également distant de  $d$  & de  $b$ , & on mène la ligne  $ec$ , qui est perpendiculaire à l'extrémité  $c$  de la ligne  $ac$ . Nous verrons bientôt comment on doit s'y prendre, pour mener une telle perpendiculaire, dans le cas où la ligne donnée ne pourroit être prolongée.

Enfin si d'un point  $e$ , placé au-dessus d'une ligne  $ab$ , on se propose d'abaisser sur celle-ci une perpendiculaire, alors il faut trouver un autre point de cette perpendiculaire. C'est pourquoi, on décrit un arc, du point  $e$  comme centre, & avec un rayon plus grand que la distance de  $e$  à la ligne  $ab$ , afin que cet arc coupe cette ligne en deux points  $b$  &  $d$ . Ces points d'intersection doivent

doivent être également éloignés de  $e$ ; ainsi de ces points comme centre, & d'un même rayon quelconque, si on décrit deux petits arcs qui se coupent; leur intersection  $z$ , est aussi un point également éloigné, comme le point  $e$ , des deux points  $d$  &  $b$ : par conséquent, la ligne dirigée de  $e$  en  $z$ , tombe perpendiculairement, du point  $e$ , sur la ligne donnée  $ab$ ; & satisfait à la question proposée.

L'art de mener des perpendiculaires, a de fréquentes applications dans la marine. Les plans des vaisseaux présentent plusieurs lignes perpendiculaires entr'elles; telles que celles qui représentent, des positions de couples, & des longueurs de lignes d'eau; ou celles qui sont des ordonnées de certaines sections; ou celles qui servent dans ces plans, de termes extrêmes de comparaison, comme les perpendiculaires de l'étrave & de l'étambot. Les charpentiers en font aussi un grand usage pour préparer, tailler & établir les pièces qui composent le corps d'un bâtiment. Ce sont des perpendiculaires, telles que  $go$  &  $dr$  (fig. 75.G) qui, abaissées de chaque extrémité de la quille, sur la flottaison d'un vaisseau, ou sur la ligne qui représente le niveau de la mer, & divisées en pieds & en demi-pieds, servent à faire de l'étrave  $fg$ , comme de l'étambot  $de$ , des échelles propres à indiquer, dans tous les tems, les tirans d'eau de l'arrière & de l'avant d'un vaisseau ainsi que leur différence. En mer, on juge qu'un objet se présente par le travers d'un vaisseau, lorsqu'il est placé sur une perpendiculaire élevée sur le milieu de la longueur de ce bâtiment; & réciproquement, un vaisseau est par le travers d'une baie ou d'un port, lorsqu'il se trouve sur une ligne qui est perpendiculaire à l'ouverture de cette baie, ou de ce port. Lorsqu'en mer, on veut décider si des objets sont au vent ou sous le vent d'un vaisseau; on imagine une perpendiculaire menée du point où est ce vaisseau, sur la direction du vent régnant; alors, tous ceux qui paroissent sur cette ligne, sont sur la perpendiculaire du vent; ceux qui sont au-dessus de cette ligne, du côté de l'origine du vent, sont jugés au vent de ce vaisseau; & ceux qui sont au-dessous de cette ligne, sont dits être

sous le vent à lui. Les dispositions relatives des armées navales, dependent de leur situation particulière à l'égard du vent ; les combinaisons des vaisseaux d'une même armée, & les changemens d'ordre, sont dirigés aussi sur la position de la perpendiculaire du vent ; & enfin, dans les vaisseaux chasseurs ou chassés, les hommes de mer sont sans cesse occupés de leur situation à l'égard de cette même perpendiculaire, pour juger de leurs avantages, ou de leurs désavantages, & souvent pour prévoir d'avance le sort qui les attend.

102. Après avoir indiqué des cas nombreux, où dans la pratique de l'art de la marine, il est nécessaire d'appliquer la théorie des perpendiculaires ; parcourons quelques autres conséquences utiles, qui résultent des mêmes principes.

Si dans un cercle *iabh* (fig. 15) on élève une perpendiculaire *id* sur le milieu d'une ligne *ab*, (qui joint les deux extrémités de l'arc *ab*, & qui, par cette raison, est nommée la corde de cet arc) ; une telle perpendiculaire passe par le milieu de l'arc *ab*, & par le centre du cercle. En effet, le point *d*, ainsi que tout autre point de *id*, est également éloigné des extrémités *a* & *b* ; les cordes menées de *d* en *a*, & en *b*, sont donc égales. Mais dans un même cercle, des cordes égales, ne peuvent soutenir que des arcs égaux ; puisqu'en repliant la corde *db* sur la corde *da*, de manière que leurs extrémités soient placées exactement l'une sur l'autre, les points de l'arc *db* doivent aussi se confondre avec ceux de *da*, parcequ'autrement l'arc *db* n'auroit pas tous ses points également distans du centre *o* : donc les arcs *db* & *da* sont nécessairement égaux : donc aussi toute perpendiculaire abaissée sur le milieu de la corde d'un arc dans un cercle, passe par le milieu de cet arc. Elle passe aussi par le centre du cercle : car on fait que si cette perpendiculaire n'étoit pas menée, & qu'il fallût trouver, hors de la ligne *ab*, un point de cette perpendiculaire ; on y parviendroit en décrivant deux petits arcs, des points *a* & *b* comme centres, avec un rayon égal à celui du cercle. Alors le point d'intersection de ces deux arcs seroit un des points de la perpen-

diculaire; & comme le même point est aussi le centre du cercle, il s'ensuit que toute perpendiculaire sur le milieu d'une corde, passe par le centre du cercle auquel cette corde appartient.

Si deux cordes  $ab$  &  $fh$ , menées dans un même cercle, sont parallèles, les arcs  $fa$  &  $bh$ , qu'elles interceptent, sont égaux. Car imaginons un diamètre  $id$  perpendiculaire sur ces cordes, alors l'arc  $ih = if$  & l'arc  $ad = db$ : par conséquent, si des deux demi-circonférences  $ifad$  &  $ihbd$ , on retranche les arcs égaux  $if$  &  $ih$ , ainsi que  $ad$  &  $db$ , les arcs restans  $af$  &  $bh$  doivent être égaux: donc des arcs d'un même cercle, interceptés par deux cordes parallèles, sont toujours égaux.

Si on se propose de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, tels que  $a$ ,  $d$ , &  $b$  (fig. 15): on imagine cette circonférence comme étant tracée, & on considère, comme ses cordes, des lignes qu'on mène du point  $d$  aux points  $a$  &  $b$ : alors on élève sur le milieu de ces cordes, des perpendiculaires. Celles-ci doivent toutes deux passer par le centre de la circonférence cherchée; ainsi leur point d'intersection indique le centre de la circonférence, qui doit embrasser les trois points donnés, étant décrite avec un rayon égal à la distance du point trouvé à l'un de trois points proposés  $a$ ,  $b$ , ou  $d$ .

Réciproquement, s'il faut déterminer le centre d'un cercle  $fadbh$ , ou d'un arc  $fab$ , on doit mener deux cordes, comme par exemple, de  $f$  en  $a$  & en  $b$ ; & sur le milieu de ces cordes, élever des perpendiculaires, qui, par leur point d'intersection, annoncent le centre  $o$  demandé. Ainsi, se propose-t-on de donner au contour de l'étrave d'un vaisseau, une forme circulaire, telle que  $gf$  ou  $bc$  (fig. 75 & 56. G); étant connu d'ailleurs le rayon de cette étrave; & les points  $b$  &  $c$  ayant une position, déjà déterminée soit par l'élanement de l'étrave, soit par la hauteur qu'elle doit avoir; il faut chercher le lieu du point qui doit servir de centre, pour décrire cet arc. Alors on imagine une corde de cet arc, qui est une ligne menée de  $b$  en  $c$ ; ensuite,

de ces deux derniers points, comme centre, on décrit deux petits arcs, avec le rayon donné: leur point d'intersection est le centre demandé; & c'est de ce point qu'on trace le contour d'un arc, qui, passant par les points  $b$  &  $c$ , est par conséquent celui de l'étrave.

S'agit-il de diviser un angle donné, tel que  $acd$  (fig. 9), en deux parties égales; tout consiste à chercher le milieu de l'arc  $ad$ , qui est sa mesure; & par conséquent, à élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde  $ad$  de ce même arc. Le sommet  $e$  de cet angle donné, est déjà un point de cette perpendiculaire, puisqu'elle doit passer par le centre de l'arc. Ainsi, des extrémités  $d$  &  $a$ , comme centres, & avec un même rayon, si on décrit deux petits arcs qui se croisent, on trouve, dans leur point d'intersection, un second point de cette perpendiculaire; par conséquent, la ligne menée, de ce point trouvé, au sommet de l'angle donné divise nécessairement celui-ci en deux parties parfaitement égales.

103. Nous avons vu comment, d'un point placé hors d'une ligne, on doit abaisser une perpendiculaire sur cette ligne; & nous avons démontré (95) qu'une telle perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener, du point donné, à la ligne, proposée. Soit donc  $od$ , (fig. 15) une perpendiculaire, abaissée de  $o$  sur  $ze$ , & soit décrit, du point  $o$ , comme centre, avec un rayon  $od$ , une circonférence  $dafihb$ ; toute ligne menée du centre  $o$ , à un point de  $ze$  différent de  $d$ , est nécessairement plus longue que  $od$ ; par conséquent, tous les points de la ligne  $ze$ , excepté  $d$ , sont placés hors de la circonférence décrite. Celle-ci n'a donc qu'un seul point qui lui soit commun avec  $ze$ ; &  $ze$ , qui ne fait que toucher cette circonférence au seul point  $d$ , est, sous ce rapport, nommée sa tangente en  $d$ . Une tangente à un cercle est donc perpendiculaire, à l'extrémité du rayon mené au point de contact; comme le rayon mené au point d'attouchement d'une tangente, est perpendiculaire sur cette tangente.

De-là il suit que si on propose de tracer une ligne,

qui soit tangente à un cercle, en un point donné, tel que  $d$  (fig. 15), sur sa circonférence; il faut tirer un rayon au point de contact  $d$ , & ensuite élever sur l'extrémité de celui-ci, une perpendiculaire  $ze$ , qui est la tangente demandée.

De-là on peut conclure aussi que, si plusieurs circonférences sont tracées sur un même plan, de manière que leurs centres soient tous placés sur une même ligne droite, & que cette ligne, ainsi que ces circonférences, passent toutes par un même point  $d$ , celles-ci ne font que se toucher en ce point  $d$ . Car elles doivent toutes avoir pour tangente la même ligne  $ze$ ; puisque, pour chacune, la tangente au point  $d$ , est une perpendiculaire élevée sur l'extrémité de la ligne des centres; par conséquent ces circonférences n'ont entr'elles, comme avec la tangente  $ze$ , qu'un seul point commun: ainsi elles se touchent toutes en ce point.

Il suit de-là que s'il faut tracer un arc, tel que  $qdr$ , qui ne fasse que toucher l'arc  $adb$  au point  $d$ ; on doit choisir pour centre de ce nouvel arc, un point du rayon  $do$  de l'arc donné, ou du prolongement de ce rayon; & on doit décrire cet arc avec un rayon égal à la distance du nouveau centre au point  $d$ . Cet arc ne fait alors que toucher  $adb$  en  $d$ , puisqu'en ce dernier point il ne peut avoir avec lui qu'une tangente commune.

S'il s'agit de tracer un arc qui ne fasse que toucher la ligne  $ez$ , au point  $d$ , & qui passe d'ailleurs par le point  $a$ ; on y parvient aisément, en remarquant, que cette ligne  $ez$  doit être tangente à cet arc, au point  $d$ ; & qu'une ligne menée de  $a$  en  $d$ , doit être une corde de l'arc à décrire. D'après ces considérations, le centre de l'arc cherché, doit être sur une ligne  $id$ , perpendiculaire en  $d$  sur la ligne  $ez$ ; & il doit se trouver aussi sur une ligne qui seroit menée perpendiculairement sur le milieu de la corde supposée; par conséquent, le point d'intersection de ces deux perpendiculaires, est le centre de l'arc cherché: & son rayon, est la distance de ce même centre à l'un des points donnés  $a$  &  $d$ .

S'il s'agit aussi de mener par les deux points  $b$  &  $c$

(fig. 17), un arc qui ne fasse que toucher à son extrémité  $b$ , un autre arc donné  $ab$ ; on voit qu'il faut satisfaire à deux conditions; & voici le procédé. Le centre du nouvel arc doit être pris sur la direction du rayon  $qb$  du premier arc donné; parceque toute circonférence décrite d'un point ainsi choisi, & assujettie à passer par  $b$ , doit toucher seulement l'arc  $ab$ , au point  $b$ , comme ayant son centre sur la même ligne où se trouve celui de  $ab$ : mais l'arc cherché doit aussi passer par le point  $c$ : par conséquent, une ligne perpendiculaire sur le milieu de celle qui joint les points  $b$  &  $c$ , & qui est une corde, doit aussi passer par le centre demandé. Le point d'intersection du rayon prolongé  $qbi$  de l'arc donné & de cette perpendiculaire, doit donc être ce centre. Ainsi, en décrivant, de ce point central  $i$ , avec un rayon égal à  $ib$  ou, à  $ic$ , un arc  $ab$ , on satisfait complètement à la question.

C'est par un pareil procédé que, dans l'architecture navale, on raccorde un arc, tel que  $uc$  (fig. 52. G), avec un arc  $cg$ , pour achever le demi-contour  $ucg$  de la varangue d'un vaisseau. Il sert aussi pour tracer (fig. 60 & 45 G) le contour d'une maîtresse varangue, ainsi que pour rendre bien continue la courbure des estains, des barres d'arcaste, & d'autres sections d'un vaisseau (fig. 59, 61, 65, 66, 67 G).

104. Nous avons vu qu'un angle ayant son sommet au centre d'un cercle, a pour mesure le nombre des degrés de l'arc compris entre ses côtés: mais il peut arriver que cet angle, quoique placé, dans le plan d'un cercle, n'ait pas son sommet au centre, & que ses côtés embrassent quelque partie de la circonférence: dans cet état, on demande quelle mesure peut être attribuée à cet angle, sans recourir à un arc, décrit de son sommet comme centre, & compris entre ses côtés.

Si un angle, tel que  $lie$  (fig. 16), a son sommet dans le plan d'un cercle  $oicu$ , & placé entre le centre & la circonférence; sa mesure est égale à celle d'un angle, qui auroit son sommet au centre, & dont l'ouverture seroit parfaitement la même. Cet angle de comparaison  $agf$  est aisément formé, en menant deux



diametres  $mf$  &  $za$  paralleles aux deux côtés  $ie$  &  $ib$  de l'angle donné; & l'égalité des angles  $bie$  &  $age$ , est fondée sur ce qu'ils ont leurs côtés paralleles, & leur ouverture tournée du même côté: ainsi l'arc  $af$ , qui est la mesure de  $agf$ , est aussi celle de  $bie$ . Remarquons actuellement que les arcs  $af$  &  $mz$ , sont égaux, comme étant les mesures des deux angles  $agf$  &  $mgz$ , qui sont opposés au sommet; ainsi, la mesure de  $bie$ , vaut la moitié de la somme des arcs  $af$  &  $mz$ , c'est-à-dire, la moitié, de celle des arcs  $af$ ,  $mo$ ,  $ou$ , &  $uz$ , ou de celle des arcs  $af$ ,  $fe$ ,  $ba$  &  $ou$ ; parce que les arcs  $mo$  &  $uz$ , sont respectivement égaux aux arcs  $ba$  &  $fe$ , comme compris entre des cordes paralleles. Ainsi la mesure de  $bie$ , vaut la moitié de la somme des arcs  $be$  &  $ou$ ; c'est-à-dire, des arcs compris, soit entre les côtés de cet angle, soit entre les prolongemens de ces mêmes côtés. Par conséquent, tout angle qui a son sommet dans un cercle, entre le centre & la circonférence, a pour mesure, la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de celui qui est compris entre ses deux côtés prolongés.

On doit voir qu'à mesure que le sommet de l'angle  $bie$  est plus près de la circonférence, l'arc  $ou$  diminue de grandeur, & qu'il devient nul, lorsque le sommet  $i$  de l'angle  $bie$  est placé sur la circonférence; par conséquent, la démonstration précédente étant indépendante, & de la grandeur de l'angle  $bie$ , & du lieu de son sommet en dedans du cercle, la mesure d'un angle formé par 2 cordes, & qui a pour sommet un point de la circonférence, doit être seulement la moitié de l'arc compris entre ses côtés. C'est ainsi que la mesure de l'angle  $toe$ , est la moitié de  $te$ ; celle de  $dub$  est la moitié de  $db$ , & celle de  $ubc$ , est la moitié de  $uec$ .

Si, tel que  $bur$ , un angle a pour sommet un point  $u$  de la circonférence, & pour côtés, une corde  $ub$ , & une tangente  $ur$ ; sa mesure est encore la moitié de l'arc  $ueb$  compris entre ses côtés. Car si par l'extrémité  $b$  de la corde  $ub$ , on mene une ligne  $bc$  parallele à la tangente  $ur$ ; l'angle donné  $rub$  est le supplément de  $ubc$ , parce qu'ils sont des angles internes placés du

même côté de la ligne  $ub$ , sécanté des deux parallèles. La mesure de  $ubc$  est la moitié de l'arc  $uec$ , ainsi celle de  $rub$ , doit être la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié des arcs  $uob$  &  $bc$ , ou des arcs  $ucc$  &  $bc$ ; parce que les arcs  $uec$  &  $uob$  sont égaux, comme compris entre des parallèles; par conséquent, tout angle qui a son centre dans la circonférence d'un cercle, & qui est formé par une corde & une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Si un angle, tel que  $pud$ , a son sommet à la circonférence; & si ses côtés sont, une corde  $ud$ , & le prolongement  $up$  d'une corde  $ub$ , ou la partie extérieure d'une sécante  $pb$ ; sa mesure est la moitié des arcs soustendus, soit par la corde, soit par la partie intérieure  $ub$  de la sécante. En effet, l'angle  $pud$  est le supplément de l'angle  $dub$ ; celui-ci a pour mesure la moitié de l'arc  $bd$  embrassé par ses côtés; & par conséquent, l'angle  $pud$  a pour mesure la moitié, des arcs restans de la circonférence, qui sont, l'arc  $ued$  soustendu par la corde  $ud$ , & l'arc  $utb$ , soustendu par la partie intérieure  $ub$  de la sécante.

Enfin, si l'angle à mesurer est tel que  $tnd$ , ayant son sommet hors de la circonférence, & pour côtés, deux sécantes du cercle; sa valeur est égale à la demi-différence des deux arcs  $td$  &  $ou$ , compris entre ses côtés. Car, soit menée une ligne  $ub$ , qui soit parallèle à l'un des côtés de l'angle, & qui passe par le point d'intersection, de l'autre côté & de la circonférence du cercle; alors, à cause des parallèles l'angle à mesurer  $tnd$  est égal à  $bud$ . Mais celui-ci a pour mesure la moitié de  $bd$ , ou la demi-différence des arcs  $td$  &  $tb$ , ou enfin celle des arcs  $td$  &  $ou$ , (parce que les arcs  $tb$  &  $ou$  sont égaux, comme interceptés par des parallèles); par conséquent, l'angle  $tnd$ , ou tout angle, qui, formé par deux sécantes, a son sommet hors d'un cercle, a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés. Le résultat de cette démonstration doit toujours être le même, quelque soient, la longueur des sécantes & la grandeur de l'angle; c'est pourquoi, si

l'une de celle-ci, ou si toutes deux devenoient tangentes à la circonférence, la mesure de l'angle formé par ces lignes, dans la position supposée, seroit encore la demi-différence des angles compris entre ses côtés.

105. Les propositions précédentes peuvent être utilement appliquées; elles fournissent un moyen convenable pour élever une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne qui ne peut être prolongée. En effet, nous venons de voir que si un angle, tel que  $qad$  (fig. 9), a son sommet dans la circonférence d'un cercle, & des côtés qui soient des cordes de ce même cercle; sa mesure est la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Ainsi ses côtés étant supposés passer par les extrémités d'un diamètre  $ed$ , sa mesure doit être de 90 degrés, & ses côtés  $qa$  &  $da$  sont alors perpendiculaires l'un à l'autre. C'est pourquoi, s'il est proposé d'élever, sur l'extrémité  $a$  d'une ligne  $qa$ , une perpendiculaire; l'opération consiste à tracer une circonférence, de manière qu'elle passe par le point  $a$ , & que la ligne  $qa$ , ou une partie de cette ligne, devienne une corde de cette circonférence. On doit donc prendre, pour centre de celle-ci, un point, tel que  $c$ , placé hors de cette ligne donnée; & la décrire avec un rayon égal à la distance de ce centre au point  $a$ : on doit ensuite mener un diamètre  $ed$ , par le point d'intersection  $e$  de la ligne  $qa$ , & de la demi-circonférence tracée: enfin on doit tirer une ligne  $ad$ , qui joigne le point  $a$  avec l'autre extrémité  $d$  du diamètre. Cette dernière ligne  $ad$  est alors perpendiculaire sur l'extrémité  $a$  de la ligne donnée  $qa$ ; puisqu'elle fait avec elle, un angle  $daq$  qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, & des côtés appuyés sur les extrémités d'un des diamètres de ce cercle.

Nous avons vu précédemment comment on peut mener une ligne, qui soit tangente à une circonférence, en un point désigné sur cette même circonférence; mais nous n'avons pas dit le procédé à suivre, pour diriger d'un point (fig. 18) placé hors d'un cercle, une ligne droite qui soit tangente à sa circonférence. Ce procédé est une conséquence des propositions démontrées. Soit proposé de mener, du point  $i$ , une tangente à l'arc

*dac*, dont le centre est *b*: Tout consiste à déterminer le point de contact *a*. Si ce point étoit trouvé, la ligne *ai*, qui le réuniroit au point *i*, seroit (comme tangente) perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené, du centre donné *b*, à ce même point *a*: ainsi le lieu du point *a* doit être le sommet d'un angle droit, formé par un rayon de l'arc donné, & par une ligne, menés au point *i*. On parvient à construire un tel angle de 90 degrés, en traçant une demi-circonférence, qui ait pour diamètre la distance *bi*, du centre de l'arc donné, au point *i* qui est assigné extérieurement au cercle. Car le point d'intersection des deux arcs *dac* & *bai* est alors tellement placé, que les lignes menées de ce point aux deux points donnés *b* & *i*, forment entr'elles un angle qui est de 90 degrés, comme ayant son sommet à la circonférence *bai*, & des côtés *ab* & *ai*, qui passent par les extrémités d'un de ses diamètres *bi*: par conséquent *ba* étant un rayon de l'arc donné, la ligne menée du point *i*, au point d'intersection *a*, est perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon; c'est-à-dire, qu'elle est tangente au point *a* de l'arc donné *dac*. Cette ligne satisfait ainsi à la question proposée.

106. *Des Figures planes ou des Polygones.* Si une portion de l'espace est renfermée ou terminée, par des lignes droites tracées dans un seul & même plan; on lui donne le nom de figure plane & de polygone. Tels sont (fig. 19) les espaces *abcde*, *fghil*. Dans le contour de ces polygones, on distingue des angles & des côtés, qui sont, les uns & les autres, en même nombre. Lorsqu'il y a égalité entre tous les côtés d'un polygone, ainsi qu'entre tous ses angles; on donne à un tel polygone le nom de régulier: & au contraire, il est nommé irrégulier, s'il y a inégalité, soit entre ses angles, soit entre ses côtés.

Une propriété qui est particulière aux polygones réguliers, est que toujours chacun peut être inscrit à un cercle; c'est-à-dire, qu'étant donné un polygone *abcdef* (fig. 20), dont les angles, ainsi que les côtés, soient égaux entr'eux séparément; si on fait passer une circonférence par les sommets *a*, *b*, & *c* de trois de ses

angles consécutifs (comme la possibilité en a été démontrée [102]), cette même circonférence doit aussi passer par les sommets de tous les autres angles. Imaginons en effet cette circonférence tracée par les points  $a$ ,  $b$  &  $c$  du polygone; & examinons si elle doit passer par le point  $f$ , qui est le sommet de l'angle suivant  $afe$ . Puisque les angles  $cba$  &  $baf$  sont égaux, leurs mesures sont aussi égales; c'est-à-dire, que dans la circonférence décrite  $abcdef$ , il y a égalité entre les arcs  $afedc$  &  $fedcb$ , dont les moitiés sont les mesures des angles comparés. Mais si de chacun de ces arcs on retranche la partie commune  $fecd$ , les arcs restans  $bc$  &  $af$  doivent être égaux; donc aussi les cordes  $bc$  &  $af$ , qui soutiennent ces derniers arcs, sont égales; c'est-à-dire que le point, ou la circonférence qui passe par  $c$ ,  $b$  &  $a$ , vient rencontrer le côté suivant  $af$ , est autant éloigné de  $a$ , qu'il y a de distance du point  $b$  au point  $c$ ; & par conséquent, ce point de rencontre est l'extrémité du côté  $af$  du polygone; parce que les côtés de cette figure sont tous égaux. Il est donc démontré que la circonférence supposée doit passer par le sommet de l'angle  $f$ . On démontreroit, de la même manière & successivement, qu'elle doit passer par le sommet de tout autre angle de ce polygone: donc on peut toujours imaginer qu'un polygone régulier est inscrit à un cercle.

Les côtés d'un polygone peuvent être en nombre plus ou moins grand; & si on les imagine multipliés à l'infini, autour d'un espace constant & borné, alors ils doivent être réduits à devenir des lignes droites infiniment petites, ou si petites qu'on peut les considérer comme des points. C'est pourquoi, si on suppose une infinité de côtés, à un polygone régulier qui est inscrit à un cercle; son contour doit se confondre sensiblement avec la circonférence du cercle circonscrit; & par conséquent, on doit s'éloigner peu de la vérité, en considérant, au besoin, un cercle quelconque, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

Si le nombre des côtés d'un polygone n'a, dans un sens pour, limites que l'infini; ce nombre, dans le sens

opposé, ne peut être plus petit que trois; parce que c'est le moindre nombre de lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace; & une figure de trois côtés, porte le nom de triangle (fig. 21 & 22).

Remarquons, que tout polygone (fig. 19) peut être partagé en triangles, par des lignes nommées diagonales, & menées d'un de ses angles aux autres angles; que ces triangles peuvent être considérés comme des parties intégrantes de ce polygone; & qu'en déterminant les angles & les côtés de ces triangles, on peut en conclure ceux du polygone qui les renferme; puisque les côtés de ce polygone sont au nombre de ceux des triangles, & que ses angles se trouvent par parties ou en entier parmi ceux des mêmes triangles. Il est donc à-propos & dans l'ordre des choses, de traiter des triangles, & de considérer les propositions qui leur sont relatives, pour faire ensuite, des résultats, les applications qui peuvent convenir aux polygones. c'est Par ce moyen, qu'on procède du plus simple au plus composé: puisque, comme on l'a dit, de toutes les figures planes, il n'en est aucune plus simple que le triangle.

107. Dans un polygone quelconque, on distingue des angles, des côtés, & une surface circonscrite. Nous considérerons ailleurs comment on en mesure la surface; ici, il ne doit être question que des côtés & des angles des polygones; c'est-à-dire, de leur grandeur particulière & de leurs rapports; & c'est sous ce point de vue que les triangles vont devenir l'objet des propositions suivantes.

Veut-on savoir combien vaut la somme des trois angles d'un triangle? il faut concevoir que ce triangle tel que *abc* (fig. 23), est inscrit à un cercle. Alors on reconnoît, que chacun de ses angles, ayant son sommet à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; & que la valeur de ses trois angles réunis, est égale à la moitié de la circonférence entière; & il en résulte que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne vaut toujours 180 degrés. Cette somme est celle des angles intérieurs *bac*, *ach*, *cba*,

& il reste à apprécier ceux qu'on nomme angles extérieurs, tel que  $nac$ ,  $ocb$ ,  $mba$ , ou ceux qui sont formés chacun, par un côté du triangle, & par le prolongement du côté adjacent. Chacun de ces angles, tel que  $bco$ , est le supplément de l'angle intérieur adjacent  $acb$ ; c'est-à-dire que la somme, de chaque angle intérieur & de son extérieur, vaut 180 degrés. Ainsi, tous les angles intérieurs, réunis à tous les extérieurs, forment une somme qui vaut 3 fois 180 degrés; & comme les seuls angles intérieurs valent 180 degrés, les extérieurs réunis doivent valoir deux fois 180 degrés. On peut remarquer que l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui lui sont opposés; c'est-à-dire, que  $bco$ , par exemple, est égal à la somme des angles  $bac$  &  $abc$ ; puisque cette somme & l'angle  $bco$ , ont l'un & l'autre, pour supplément commun, l'angle  $acb$ .

Ajoutons encore, qu'un triangle est nommé rectangle, lorsqu'un de ses angles est droit, ou de 90 degré. & que, dans tout autre cas, il porte le nom d'obliquangle. 2.<sup>o</sup> Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémens l'un de l'autre; puisqu'ensemble ils doivent valoir 90 degrés. 3.<sup>o</sup> Un angle d'un triangle quelconque, est toujours le supplément de la somme des autres; & par conséquent, il suffit de connoître la valeur de deux angles d'un triangle, pour juger de celle du troisième.

108. Si on applique convenablement ces idées générales aux polygones quelconques, en les supposant d'avance partagés en triangles, par des diagonales menées d'un des angles aux autres angles, on en conclut que la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone vaut autant de fois 180 degrés, qu'il y a de côtés, moins deux. En effet, si on examine avec soin un polygone, tel que  $abcde$  (fig. 19); on reconnoît que les triangles qui le composent, n'ont d'autres angles que, ceux mêmes du polygone, ou des parties de ces angles, & que la somme des angles qui appartiennent au polygone, doit être évidemment la même que celle des angles de tous les triangles ainsi formés.

Il faut donc chercher la grandeur de celle-ci, pour en conclure celle qui est demandée. Le nombre de ces triangles doit être toujours de deux unités plus petit que celui des côtés du polygone, parce qu'il y a deux points, tels que  $a$  &  $c$ , auxquels, du point  $b$ , on ne peut mener une diagonale; & comme la somme de tous les angles de chaque triangle est de 180 degrés, celle des angles de tous les triangles, ou celle de tous les angles du polygone, vaut autant de fois 180 dégr. qu'il y a de côtés, moins deux.

La valeur particulière de chaque angle d'un polygone reste ainsi indéterminée, comme dans un triangle quelconque, & la somme de tous est seule indiquée. Cependant, si le polygone est régulier, ou si ses angles sont égaux, on trouve la valeur de chacun de ses angles, ou en divisant par le nombre des côtés, le produit de 180 degrés multipliés par le nombre de ces mêmes côtés, diminué de deux unités; ou en retranchant de 180 degrés, le quotient, de 360 degrés divisés par le nombre des côtés du polygone régulier. C'est pourquoi, dans un triangle régulier, chaque angle est de 60 dégr. car alors il faut retrancher de 180 degrés, le tiers de 360 degrés, ou 120 degré; & la différence est 60 degrés. Si un polygone régulier a six côtés, chacun de ses angles intérieurs est, par le même calcul, de 120 degrés.

Des mêmes principes, on peut conclure que la somme des angles extérieurs d'un polygone, vaut toujours deux fois 180 degrés. Car la somme, de ses angles intérieurs ajoutés à ses extérieurs, vaut autant de fois 180 degrés, qu'il y a de côtés; par conséquent; celle des extérieurs étant seule égale, à 180 degrés répétés autant de fois qu'il y a de côtés, moins deux; la somme des angles extérieurs d'un polygone quelconque doit toujours valoir 360 degrés.

Ajoutons ici quelques propriétés qui sont particulières aux triangles. Si dans un triangle, tel que  $abc$  (fig. 23) qu'on suppose inscrit à un cercle, il y a égalité entre les deux côtés  $ac$  &  $ab$ , les angles  $acb$  &  $abc$ , qui sont opposés à ces côtes, sont aussi égaux



l'un à l'autre : car ces deux côtés, considérés comme étant deux cordes d'un même cercle, doivent soutenir des arcs égaux  $adb$  &  $afc$  ; & comme les moitiés de ces arcs sont les mesures des angles  $acb$  &  $abc$ , ces mêmes angles doivent être égaux, comme le sont leurs mesures ; par conséquent, dans tout triangle, les angles opposés à des côtés égaux sont égaux. La proposition inverse seroit démontrée de la même manière ; savoir, que les côtés, qui, dans un triangle, sont opposés à des angles égaux, sont aussi égaux entr'eux.

Ces principes conduisent aussi à conclure, que le plus grand angle d'un triangle est opposé au plus grand des ses côtés, & réciproquement. Car soit l'angle  $bac$  plus grand que  $acb$ , dans le même triangle  $abc$ , qui est inscrit à un cercle : l'arc  $bec$ , dont la moitié est la mesure de  $bac$ , doit être plus grand que l'arc  $adb$ , qui est double de la mesure de  $acb$ . La corde  $bc$ , qui soutient le plus grand arc, est donc plus longue que la corde  $ab$  ; c'est-à-dire, que le côté opposé au plus grand angle de ce triangle, est aussi le plus grand de ses côtés. L'inverse seroit aisée à démontrer par la même méthode.

Une des conséquences des propositions précédentes, est que le côté de l'exagone ou d'un polygone régulier de six côtés, est égal au rayon du cercle qui lui est circonscrit. Soit  $ab$  (fig. 20) le côté d'un exagone  $abcdef$ , & soient menés deux rayons  $ob$  &  $oa$ , aux deux extrémités de ce côté  $ab$ . L'angle  $boa$  a pour mesure l'arc  $ab$ , ou la sixième partie de la circonférence entière. Il est donc de 60 degrés, & les deux autres angles  $oab$  &  $oba$  doivent valoir ensemble 120 degrés ; mais ces derniers sont égaux entr'eux, puisque dans un même triangle  $abo$ , ils sont opposés à des côtés égaux, qui sont des rayons d'un même cercle. Chacun est donc de 60 degrés. Les trois angles de ce triangle sont donc de même grandeur. Ainsi, il y a égalité, entre leur côtés, & le côté  $ab$  de l'exagone doit être égal au rayon du cercle circonscrit. Le rayon d'un cercle étant donc porté comme corde sur sa circonférence, doit soutenir un arc de 60 degrés. Cette dernière conséquence

conduit à un moyen de diviser la circonférence en degrés, & par conséquent, à la préparer pour servir de mesure à des angles quelconques. En effet, soient menés deux rayons, *uo* & *oc* perpendiculaires l'un à l'autre, dans le cercle *abcdef*. L'arc *uc* est de 90 degrés; & si on porte sur cet arc, le rayon comme corde, de *c* en *b*, l'arc *cb* doit être de 60 degrés: par conséquent, *bu* est de 30 degrés. Si ce dernier arc est divisé en deux parties égales, par le moyen d'une perpendiculaire élevée sur le milieu de sa corde; si successivement on détermine le quart, le 8.<sup>e</sup>, le 16.<sup>e</sup>, &c. de ce même arc, on doit obtenir particulièrement la grandeur d'un arc de 56 minutes 15 secondes & celle d'un autre arc de 3 minutes 31 secondes (à un 16.<sup>e</sup> près). La somme de ces deux derniers arcs est de 59 minutes 46 secondes. Ainsi, par ces subdivisions faciles, on peut parvenir à découvrir un arc dont la grandeur ne diffère de celle d'un degré, que de 14 secondes. Aucun moyen géométrique ne peut conduire à trouver directement la grandeur exacte d'un arc d'un degré; mais on estime à-peu-près sa valeur, par celle de l'arc de 59 minutes 46 secondes, & on peut procéder ensuite à la division de la circonférence en 360 parties égales.

109. Il faut actuellement comparer entr'eux les polygones, qui peuvent être, ou égaux, ou semblables, ou totalement différens; & la recherche des caractères auxquels on les distingue, devient très-simple, en commençant par la considération des triangles.

Deux triangles sont égaux, lorsque toutes leur parties sont égales, c'est-à-dire, lorsqu'il y a égalité entre les côtés de l'un & les côtés de l'autre, ainsi qu'entre les angles correspondans. Lorsqu'on se propose d'établir l'égalité de deux triangles; il n'est pas toujours nécessaire de démontrer séparément que chacune des six parties du premier est égale à sa correspondante, dans les six parties du second. Car il est des cas, où trois de ces parties (au nombre desquelles un côté doit toujours se trouver placé) étant respectivement égales, l'égalité des trois autres en résulte nécessairement. Deux triangles sont égaux, non seulement lorsqu'ils ont un

angle

angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; mais aussi lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; & lorsque les trois côtés de l'un, sont respectivement égaux aux trois côtés de l'autre.

1.<sup>o</sup> Si on suppose, dans les triangles comparés  $abc$  &  $edf$  (fig. 21), que les angles  $a$  &  $e$  sont égaux & que les côtés  $ab$  &  $ac$  le sont séparément aux côtés  $de$  &  $ef$ ; les autres parties correspondantes de ces triangles sont nécessairement égales. En effet, imaginons que le triangle  $edf$  soit transporté sur le triangle  $abc$ , le point  $e$  sur le point  $a$ , & le côté  $ed$  sur  $ab$ : alors en achevant d'appliquer le premier triangle sur le second; comme  $ed=ab$ , le point  $d$  doit tomber sur  $b$ . Comme les angles  $bac$ , &  $def$  ont une égale ouverture, la ligne  $ef$  doit tomber sur  $ac$ ; & l'égalité des côtés  $ef$  &  $ac$ , fait que le point  $f$  doit s'appliquer sur le point  $c$ . Ainsi les trois sommets  $d$ ,  $e$ ,  $f$ , dans cette superposition, tombent exactement sur les trois points  $b$ ,  $a$  &  $c$ ; par conséquent, ces triangles, se confondant parfaitement dans leurs angles & leurs côtés, sont égaux dans toutes leurs parties.

2.<sup>o</sup> Ils sont égaux, si l'angle  $a$  égale l'angle  $e$ , si l'angle  $b=d$ , & si le côté  $ab$ , compris entre les angles  $a$  &  $b$ , est égal au côté correspondant  $de$ . Supposons ces triangles transportés l'un sur l'autre comme ci-dessus; le point  $d$  sur  $a$ ,  $de$  sur  $ab$ ; & examinons s'ils doivent s'appliquer parfaitement l'un sur l'autre. Le point  $d$  tombe nécessairement sur  $a$ , puisque  $ab=de$ : on doit conclure aussi, de l'égalité des angles  $a$  &  $e$ , que le côté  $ef$  doit tomber sur  $ac$ ; & de celle des deux autres angles  $b$  &  $d$ , que  $df$  doit suivre la direction de  $bc$ : par conséquent, les côtés  $ef$  &  $df$  doivent comme ceux-ci, nécessairement se rencontrer, au point  $c$ . Les trois sommets des angles du triangle  $def$ , ainsi que ses trois côtés, s'appliquent donc exactement sur les parties correspondantes du triangle  $abc$ . Ainsi deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.

3.<sup>o</sup> Enfin, si le côté  $aq=de$ , si  $ac=ef$ , & si  $bc$  est égal à  $df$ , les triangles  $abc$  &  $edf$  sont nécessaire-

ment égaux. Transportons encore le triangle *def* sur *abc*, le point *e* sur le point *a*, & *ed* sur *ab*. Le point *d* doit tomber sur *b*, à cause de l'égalité supposée des côtés *ed* & *ab*; & il reste seulement à savoir si *f* doit s'appliquer sur le point *c*, dans cette superposition. Supposons que, du point *b* comme centre, on décrive un arc, avec un rayon égal au côté *df*; le point *f* doit se trouver sur cet arc, qui d'ailleurs passe par *c*, puisque  $df = bc$ . De même, si du point *a* comme centre, & avec un rayon égal à *ef*, on trace un arc, qui, à cause de l'égalité des côtés *ef* & *ac*, doit passer aussi par *c*; le point *f* doit faire partie de ce second arc. Ce point *f* est donc celui d'intersection des deux arcs tracés; & d'ailleurs le point *c* est commun à ces mêmes arcs; par conséquent, le point *f* & le point *c* doivent se confondre l'un avec l'autre. Les deux triangles *abc* & *def*, étant donc supposés avoir les trois côtés égaux chacun à chacun; ont aussi leurs angles égaux, & sont complètement égaux entr'eux.

Les conséquences de ces propositions sont nombreuses, importantes; & nous allons les parcourir.

Deux polygones doivent être égaux, si divisés par des diagonales menées de deux angles homologues, aux autres angles, les triangles qui les composent sont égaux chacun à chacun. Il faut prouver, dans cette supposition, que leurs angles & leurs côtés respectifs sont égaux. Soient ces polygones (fig. 19); les angles *bcd* & *ghi*, qui leur appartiennent, sont égaux, comme étant ceux de deux triangles égaux *bcd* & *ghi*. L'angle suivant *cde* est aussi égal à *hil*; parce que les parties *bdc* & *bde* du premier sont séparément égales aux parties correspondantes *gih* & *gil* du second, conséquemment à l'égalité supposée des triangles comparés. En étendant cette démonstration aux autres angles homologues des polygones supposés, on en concluroit aisément leur égalité. Enfin, celle des côtés de ces polygones n'est pas douteuse, puisque ces côtés sont en même tems ceux de triangles égaux. Par conséquent, deux polygones sont égaux; lorsque partagés par des diagonales, ils sont composés de triangles égaux.

La proposition inverse est vraie & facile à démontrer par la même méthode.

D'après ces mêmes principes, on peut construire un triangle, tel, qu'il soit égal à celui dont on connoît deux côtés & l'angle compris. On mène (fig. 22) une ligne *on* qui soit égale à l'un des côtés donnés; ensuite avec un rayon égal à l'autre côté connu, & du point *o* comme centre, on décrit un arc, du nombre de degrés qui représente la valeur de l'angle donné, & dont une extrémité soit placée sur la ligne *on*. Alors si par l'autre extrémité de cet arc, & par le point *o*, on mène une ligne *om*, égale au deuxième côté donné; & si on joint les points *n* & *m*, par une troisième ligne *mn*; on forme un triangle *onm*, égal à celui qui a été proposé, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux.

Si on ne connoissoit d'un triangle qu'un seul côté, & la valeur de chacun des angles adjacens à ce côté; on pourroit faire un triangle qui lui seroit égal dans toutes ses parties. Il faut, mener une ligne *on* égale au côté connu; décrire, successivement, des deux points *o* & *n* comme centres, deux arcs qui soient chacun du nombre de degrés donné pour la valeur de chaque angle adjacent, & tirer des mêmes points par les extrémités de ces arcs, des lignes indéfinies. Ces lignes doivent se couper en un point *m* de l'espace, & achever avec *on* un triangle qui est égal à celui qu'on a supposé; parce qu'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.

Enfin, si les trois côtés d'un triangle sont connus, & qu'il s'agisse d'en faire un autre qui soit parfaitement égal au proposé. On mène une ligne *on* égale à l'un des côtés donnés; ensuite, des points *o* & *n* comme centres, on décrit deux arcs; l'un avec un rayon égal au deuxième côté connu, & l'autre avec le troisième côté. Ces arcs doivent se couper dans l'espace, en un point, tel que *m*, & les lignes menées de ce point aux deux extrémités de *on*, forment avec cette dernière ligne un triangle qui est égal au proposé. Car

par cette construction, on voit que leurs côtés sont égaux chacun à chacun.

Si deux lignes parallèles (fig. 24), sont traversées par deux autres lignes parallèles; les parties coupées intérieures & parallèles sont égales: c'est-à-dire que  $ab=cd$ , &  $ad=bc$ . Soit menée une ligne du point  $a$  au point  $c$ ; on forme ainsi deux triangles  $abc$  &  $adc$  qui sont égaux. Car ils ont un côté commun  $ac$ ; les angles  $cab$  &  $acd$  sont égaux comme alternes internes; & par la même raison, il y a égalité entre les angles  $acb$  &  $dac$ . Ces triangles ont donc un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun: donc les côtés  $ab$  &  $dc$  sont égaux: donc aussi  $ad$  égale  $bc$ ; c'est-à-dire, que les parties de parallèles coupées par d'autres parallèles, sont égales entr'elles.

Si dans un polygone régulier (fig. 20), qu'on suppose inscrit à un cercle, on mène du centre des lignes qui soient perpendiculaires sur chaque côté du polygone; ces lignes sont toutes égales. Comparons deux de ces lignes  $og$  &  $oh$ , & soit mené le rayon  $ob$ . Les deux triangles  $gob$  &  $boh$  sont égaux. Car  $ob$  est commun: l'angle  $gbo$  vaut la demi-différence de 180 degr. à l'arc  $ab$ ; & la mesure de l'angle  $obh$  est aussi la demi-différence de 180 degrés, à l'arc  $bc$ , ou à l'arc  $ba$  qui est égal à ce dernier; par conséquent, les angles  $gbo$  &  $obh$  sont égaux. D'ailleurs les angles  $gob$  &  $boh$  ont des mesures égales, qui sont chacune la moitié des arcs soutenus par les côtés égaux du polygone. Les deux triangles  $gob$  &  $boh$  sont donc égaux, comme ayant un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun; & ainsi les perpendiculaires abaissées du centre d'un polygone régulier sur ses côtés, sont toutes égales.

110 Imaginons que dans un triangle  $amq$  (fig. 25), on prenne sur un de ses côtés  $am$ , deux parties égales  $ab$ ,  $bd$ ; & que par les points de division  $b$  &  $d$ , on mène deux lignes qui soient parallèles à  $mq$ ; il doit alors y avoir égalité entre les parties  $ac$  &  $ce$ , qui sont coupées, par les parallèles, sur l'autre côté  $aq$  du même triangle. En effet, soit menée par le point de division  $c$

de ce dernier côté, une ligne  $co$  parallèle au côté  $am$ . Alors on a deux triangles  $abc$  &  $coe$  qui sont égaux l'un à l'autre. Car, à cause des parallèles, il y a égalité, soit entre les angles  $bac$  &  $oce$ , soit entre les lignes  $co$  &  $bd$ ; & comme la partie  $db$  a été faite égale à  $ba$ , les côtés  $co$  &  $ba$  sont égaux. Ces triangles comparés étant égaux, la partie coupée  $ac$  doit être égale à  $ce$ . Ainsi supposons que le côté  $am$ , soit divisé entièrement en parties égales, & en quelque nombre de parties que ce puisse être; les lignes menées par ses points de division parallèlement au côté  $mq$ , doivent aussi couper le côté  $aq$ , en un même nombre de parties égales entr'elles. Les parties du côté  $am$ , ont donc aussi entr'elles le même rapport d'égalité qui regne entre les parties correspondantes de  $aq$ ; (en supposant toujours que les unes & les autres soient comprises entre les mêmes lignes parallèles). C'est pourquoi on peut établir une suite de rapports égaux, & dire,  $ab:bd::ac:ce$ , ou  $ab:ac::bd:ce$ , & comme toute autre partie de  $am$ , est à sa correspondante sur le côté  $aq$ . Mais on fait d'ailleurs que d'une telle suite de rapports égaux, on peut conclure, que la somme des antécédens, est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; ou comme la somme d'un certain nombre d'antécédens est à celle de leurs conséquens. On peut donc dire, la somme des parties égales qui composent  $am$ , ou le côté entier  $am$ , est au côté  $aq$ , comme  $ab:ac$ , ou comme  $ad:ae$ .

Cette proposition sert à établir cette règle générale, que si dans un triangle, on mène une ligne qui soit parallèle à un de ses côtés, cette ligne divise les deux autres côtés en parties, qui sont proportionnelles les unes aux autres: c'est-à-dire que si  $de$  est une ligne menée arbitrairement, mais parallèlement à  $mq$ , on peut faire cette proportion,  $am:aq::ad:ae$ . Car on peut concevoir le côté  $am$  partagé en parties égales, dont le nombre soit tel, qu'un des points de division soit le point  $d$ . Alors, si par tous les points de division de  $am$ , on imagine des lignes parallèles à  $mq$ , la ligne  $de$  doit être au nombre de ces lignes; & le côté  $aq$  se

trouve ainsi divisé en parties qui sont égales entr'elles. Donc dans cet état ce triangle devient parfaitement semblable à celui qu'on a considéré précédemment: les conséquences doivent donc en être les mêmes; & ainsi on peut faire la proportion  $am:aq::ad:ae$ ; c'est-à-dire, qu'une ligne menée dans un triangle parallèlement à un de ses côtés, coupe les deux autres côtés en parties qui sont proportionnelles entr'elles.

La proposition inverse est également vraie; & on peut démontrer que, si dans un triangle  $amq$ , on peut faire la proportion  $am:aq::ad:ae$ , la ligne qui joint les points  $d$  &  $e$ , doit être parallèle au côté  $mq$ . Car si on pouvoit supposer que cette ligne  $de$  ne fût pas parallèle à  $mq$ , il seroit possible de mener par le point  $d$ , une telle parallèle, qui viendrait rencontrer en  $z$  le côté  $aq$ : cette construction conduiroit alors à cette proportion,  $am:aq::ad:az$ , & elle ne peut avoir lieu en même tems que la proportion supposée ( $am:aq::ad:ae$ ), sans qu'il y ait égalité entre les quatrièmes termes  $az$  &  $ae$ . Le point  $z$  & le point  $e$ , doivent donc être les mêmes, & la ligne  $dz$  doit se confondre avec  $de$ . On ne peut donc supposer, en même tems, & que les deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, & que la ligne  $de$  qui les traverse n'est pas parallèle au troisième côté  $mq$ . Donc toute ligne qui coupe proportionnellement deux côtés d'un triangle, est nécessairement parallèle au troisième côté. De-là on peut conclure un moyen de diviser une ligne en parties qui soient proportionnelles aux parties d'une ligne donnée; ou de réduire des figures quelconques, telles que celles qui sont tracées sur des plans de vaisseaux, ou sur des cartes, à d'autres figures plus ou moins grandes, en changeant convenablement les échelles qui servent de base à leur construction. Si l'échelle d'un plan de vaisseau est divisée en parties égales, dont chacune est prise pour la longueur d'un pied; & qu'il soit proposé de réduire ce plan à un plus petit, de manière que la longueur d'un pied dans le premier, soit représentée dans le nouveau, par une ligne six fois plus petite. Il faut alors, pour déterminer les parties de la nouvelle



échelle qu'on veut substituer à la première, diviser en six parties égales une seule des parties de l'échelle donnée. Soit  $ac$  (fig. 26) la longueur d'une de ces parties, qui représente un pied, & dont le 6.<sup>e</sup> cherché doit, dans le nouveau plan, être pris pour un pied. On trouve directement ce 6.<sup>e</sup> par le procédé suivant. On mène une ligne indéfinie  $ab$ , par l'extrémité  $a$ , & sous un angle quelconque; ensuite on porte sur cette dernière six ouvertures égales de compas, à partir du point  $a$ ; on réunit le dernier point  $b$  de ces divisions, avec l'extrémité  $c$  de la ligne à diviser; & enfin, on tire par le premier point  $r$  de division, une ligne parallèle à  $cb$ . par cette construction, la partie  $ao$  est la sixième partie de la ligne  $ac$ . Car, à cause des parallèles, on a la proportion,  $ab:ar::ac:ao$ ; ainsi  $ar$  étant le sixième de  $ab$ , il faut aussi que  $ao$  soit le sixième de  $ac$ . C'est donc la ligne  $ao$ , qui doit, dans le nouveau plan, représenter la longueur d'un pied, & servir à le composer parfaitement semblable à celui auquel il est comparé.

Si une ligne telle que  $ac$ , doit être partagée en trois parties qui fussent entr'elles comme les nombres 1, 2, & 3; le procédé est le même. On mène une ligne indéfinie par le point  $a$ , & on porte sur sa longueur six parties égales, afin qu'elle offre trois longueurs  $ar$ ,  $rn$  &  $nb$ , qui soient entr'elles dans les rapports prescrits. Ensuite on réunit, par une ligne  $bc$ , l'extrémité de la ligne à diviser, avec le sixième point de division de la ligne indéfinie, & on mène par le premier, ainsi que par le troisième point de division, & parallèlement à  $bc$ , deux lignes, qui prolongées coupent  $ac$ . Les trois parties  $ao$ ,  $od$  &  $dc$  de cette dernière ligne sont alors dans les rapports demandés. Car, à cause des parallèles, on peut faire cette suite de rapports égaux,  $ar:ru:ub::ao:od:dc$ ; mais la construction de la figure donne aussi cette proportion,  $ar:ru:ub::1:2:3$ . Par conséquent, en comparant ces deux proportions, qui ont des rapports communs, on peut conclure que  $ao:od:du::1:2:3$ . La ligne  $ac$  seroit donc

divisée, par ce moyen, en parties proportionnelles aux nombres indiqués.

III. La chaîne des principes précédens conduit à cette proposition importante ; que si les angles de deux triangles sont égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues doivent être proportionnels ; c'est-à-dire, que ces mêmes triangles sont nécessairement semblables. (un côté d'un triangle est homologue à celui d'un autre triangle, lorsque ces côtés sont opposés à des angles qui sont égaux). Soient (fig. 21 & 22) les triangles  $abc$  &  $omn$ , tels, que les trois angles du premier soient respectivement égaux aux trois angles du second, chacun à chacun. On peut imaginer que le triangle  $abc$  soit transporté sur le triangle  $mon$ , le point  $a$  sur le point  $m$ , & le côté  $ab$  sur  $mo$ . Le point  $b$  doit tomber en un point quelconque  $r$  du côté  $mo$  ; & à cause de l'égalité des angles  $bac$  &  $omn$ , le côté  $ac$  doit s'appliquer sur  $mn$ , de  $m$  en  $i$ . Il suit de là que le côté  $bc$  du triangle  $abc$  doit avoir, dans le triangle  $omn$ , la situation & la longueur de  $ri$  ; & que le triangle  $mri$  est égal au triangle  $abc$ . Après cette superposition, on doit reconnoître que la ligne  $ri$  est parallèle à  $on$ , parce que l'angle  $nom$  a été supposé égal à  $cba$ , qui est le même angle que  $irm$  : ainsi la sécante  $mo$  est également inclinée sur les deux lignes  $ir$  &  $on$  ; & ces lignes sont par conséquent, parallèles l'une à l'autre. C'est pourquoi elles coupent proportionnellement les lignes  $mo$  &  $mn$ , aux point  $r$  &  $i$  ; ce qui donne la proportion  $mo:mr::mn:mi$ , ou  $mo:ab::mn:ac$ . Deux côtés du triangle  $abc$  sont donc proportionnels à deux côtés homologues du triangle  $omn$  ; & le rapport des troisièmes côtés de ce triangle, est aussi égal à celui des deux premiers côtés comparés. Car si par le point  $i$ , on mène une ligne  $iz$  qui soit parallèle à  $mo$ , on peut dire  $mn:mi::no:oz$ , & comme  $oz$  &  $ri$  sont deux lignes égales, puisqu'elles sont des parallèles comprises entre des parallèles, on doit donc dire  $mn:ac::no:bc$ . Le rapport de  $no$  à  $bc$  est donc égal à celui de  $mn$  à  $ac$ , & par conséquent, à celui de  $mo$  à  $ab$ . Les trois côtés homologues, de ces deux triangles  $abc$  &  $omn$ , qui sont supposés avoir des angles égaux

chacun à chacun , sont donc proportionnels , & on peut faire cette suite de rapports  $ab:mo::ac:mn::bc:on$ .

Cette proportion fait voir que la similitude parfaite de deux triangles , dépend uniquement de l'égalité de leurs angles ; puisque d'une telle égalité , il résulte que leurs côtés homologues sont proportionnels. On ne peut pas prononcer la similitude de deux polygones de la même manière ; car il faut alors démontrer , non-seulement que les lignes qui les terminent , forment dans l'un & l'autre des angles égaux , mais aussi qu'elles sont proportionnelles entr'elles.

Si c'est une propriété particulière aux triangles d'être semblables lorsque leurs angles sont égaux , réciproquement deux triangles sont semblables , lorsque leurs côtés sont proportionnels ; c'est-à-dire , que l'égalité des rapports de leurs côtés , entraîne l'égalité de leurs angles correspondans. Soient  $abc$  &  $mon$  des triangles , dont les côtés sont tels qu'on peut dire  $mo:ab::mn:ac::no:cb$ . Si on prend sur  $mo$  , côté du triangle  $mon$  , une partie  $mr$  , qui soit égale à  $ba$  ; & que par le point  $r$  , on mène une ligne  $ri$  parallèle au côté  $on$  ; alors le triangle  $mri$  nouvellement construit , doit être semblable à  $mon$  : & il reste à le démontrer égal au triangle  $abc$  , pour en conclure l'égalité des angles des triangles  $abc$  &  $mon$ . Si on compare les cotés des triangles semblables  $mri$  &  $mon$  , on peut dire ,  $mo:mr$  ou  $ab::mn:mi$  ; & comme par supposition on a la proportion  $mo:ab::mn:ac$  , il s'ensuit que ces deux proportions doivent avoir un même quatrième terme , puisque leurs trois autres termes sont égaux chacun à chacun. Le côté  $ac$  est donc égal à  $mi$ . On prouve de même que le côté  $bc$  est égal à  $ri$ . Car la construction donne cette proportion ,  $mn:mi$  ou  $ac::no:ri$ . La supposition fournit cette seconde ,  $mn:ac::no:cb$  ; & ces deux proportions comparées prouvent , comme précédemment , que le côté  $bc$  est égal à  $ri$ . Les deux triangles  $abc$  &  $mri$  sont donc égaux , comme ayant leurs trois cotés égaux ; mais les angles du dernier sont égaux à ceux de  $mon$  ; par conséquent , les triangles  $abc$  &  $mon$  , qui sont supposés avoir leurs 3 cotés proportionnels , ont nécessaire-

ment leurs trois angles égaux, & sont par conséquent semblables.

D'après ces propositions, on peut assigner divers caractères, auxquels on doit reconnoître la similitude de deux triangles.

1.<sup>o</sup> Il suffit que deux angles d'un triangle soient égaux séparément à deux angles d'un autre triangle, pour que ces deux triangles soient semblables; parce qu'alors le troisième angle doit être de même grandeur dans l'un & l'autre triangle.

2.<sup>o</sup> Si deux triangles ont leurs côtés parallèles chacun à chacun, ils sont semblables; parce que, comparés deux à deux, leurs angles, dont les côtés sont supposés parallèles, sont nécessairement égaux.

3.<sup>o</sup> On doit prononcer aussi la similitude de deux triangles, qui sont supposés avoir des côtés perpendiculaires chacun à chacun. Car alors il suffit de faire voir qu'un angle quelconque, est toujours égal à celui qui est formé par deux lignes perpendiculaires à ses deux côtés. Soit l'angle *aof* (fig. 20). Si la ligne *oh* est supposée perpendiculaire à *oa*, & si la ligne *ou* fait un angle droit avec *of*, les angles *aof* & *uoh* sont égaux. Car ils ont l'un & l'autre pour complément, le même angle *oua*: donc des angles dont les côtés sont perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux entr'eux. Deux triangles dont les côtés sont perpendiculaires, respectivement les uns sur les autres, ont donc nécessairement des angles égaux; & par conséquent ils sont semblables.

4.<sup>o</sup> Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, leurs autres angles correspondans sont égaux, & ils sont semblables. Car soient les triangles *abc* & *omn*, dont les angles *a* & *m* sont égaux, & dans lesquels on peut dire,  $ab:mo::ac:mn$ . Soit transporté, comme précédemment, le triangle *abc* sur *mon*, en plaçant le point *a* en *m*, & *ab* sur *mo*, de *m* en *r*. Comme l'ouverture de l'angle *a* est la même que celle de *m*, le côté *ac* doit s'étendre sur *mn*, de *m* en *i*. Alors le triangle *mri* est parfaitement égal à *bac*; & comme par la supposition, on peut dire,  $mo:$

*mr::mn::mi*, les deux cotés *mo* & *mn* sont coupés proportionnellement par *ri*: par conséquent *ri* est une ligne parallèle à *no*. D'où il suit que l'angle *mon*, est égal à *cba*, puisqu'il l'est à *mri*; & par la même raison, les angles *mno* & *acb* sont égaux. Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux cotés proportionnels, ont donc nécessairement tous leurs angles égaux, & sont par conséquent semblables.

5.<sup>o</sup> Enfin, deux triangles sont semblables, lorsque leurs trois cotés sont proportionnels chacun à chacun, comme on l'a déjà démontré.

112. Les applications de ces propositions fondamentales sont intéressantes & nombreuses. Nous en verrons fréquemment, dans le reste de la géométrie, dans l'astronomie, dans la mécanique; & nous allons en donner quelques exemples.

Nous avons déjà vu comment on peut diviser une ligne connue, en plusieurs parties qui soient, ou égales, ou dans des rapports déterminés; & les dernières propositions fournissent, pour arriver au même but, un nouveau procédé. Soit une ligne *zc* (fig. 27), qu'il faut diviser en parties qui soient, & en même nombre, & dans le même rapport, que les parties d'une ligne *ab* qui est donnée. On décrit à cet effet, des extrémités *a* & *b* comme centres, & avec un même rayon égal à *ba*, deux petits arcs qui se coupent au point *q*: on mène de ce point *q*, des lignes droites *qb* & *qa*, aux extrémités *b* & *a*; & on forme ainsi un triangle *qab*, qui est équilatéral, ou dont les trois cotés sont égaux. Alors on prend sur *qa* & sur *qb*, une partie égale à *zc*, ou à la ligne à diviser. Ces parties sont *qu* & *qp*. On tire ensuite une ligne qui réunit les points *u* & *p*, & cette ligne *up* est, parallèle à *ba*, & égale à *zc*. Car les triangles *qup* & *qab* ont un angle commun en *q*; les cotés *qu* & *qp* sont égaux entr'eux, comme le sont aussi les cotés *qa* & *qb*: ce qui permet de dire, *qa:qb::qu:qp*: donc les triangles comparés sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux cotés proportionnels. La ligne *up* est donc parallèle à *ba*, à cause de l'égalité des angles *qup* & *qab*, qui appartiennent

à deux triangles démontrés semblables. Cette même ligne est d'ailleurs égale à  $zc$ , parce que les trois cotés de  $qup$  étant égaux entr'eux, comme le sont ceux du triangle  $qab$ , la ligne  $up$  doit être, comme  $qp$  &  $qu$ , égale à  $zc$ . Après cette construction préalable, si on mene du point  $q$ , des lignes droites aux points de division de la ligne  $ab$ , ces lignes doivent couper la ligne  $pu$  qu'elles traversent, en parties qui sont en même nombre, & dans un rapport égal à celui des parties données de  $ab$ . Car comparons les triangles  $qui$  &  $qat$ ; ils sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en  $q$ , & parce que les angles  $qui$  &  $qat$  sont égaux, comme formés par la ligne  $qi$  qui coupe les parallèles  $ui$  &  $at$ . On démontreroit de même, la similitude des deux triangles  $qio$  &  $qts$ ; celle de  $qor$  &  $qsm$ ; & enfin celle de  $grp$  &  $qmb$ . Les côtés de ces triangles comparés deux à deux, sont donc proportionnels: & on peut faire ces suites de rapports égaux. 1.<sup>o</sup>  $qu:qa::ui:at::qi:qt$ ; 2.<sup>o</sup>  $qi:qr::io:ts::qo:qs$ ; 3.<sup>o</sup>  $qo:qs::or:sm::qr:qm$ ; & 4.<sup>o</sup> enfin,  $qr:qm::rp:mb::qp:qb$ . La premiere de ces suites a un rapport commun avec la seconde; celle-ci en a un commun avec la troisieme, &c: donc tous les rapports qui composent ces quatre suites sont égaux. On peut donc dire particulièrement,  $ui:at::io:ts::or:sm::rp:mb$ ; par conséquent, les parties de la ligne  $pu$ , ou de la ligne donnée  $zc$ , sont proportionnelles à celles de la ligne  $ab$ ; & cette ligne  $zc$  est divisée, par ce moyen, en parties qui sont, ou égales, ou dans des rapports déterminés.

Les mêmes suites comparées ensemble, donnent encore cette suite particuliere de rapports égaux,  $qu:qa::qi:qt::qo:qs::qr:qm::qp:qb$ ; c'est-à-dire, que si d'un point  $b$ , placé hors d'une ligne  $ab$ , on mene, & aux extrémités, & à plusieurs points de cette ligne, d'autres lignes droites, telles que  $qa$ ,  $qt$ ,  $qs$ ,  $qm$  &  $qb$ , celles-ci sont toujours coupées en parties proportionnelles, lorsqu'elles sont traversées par une ligne  $up$ , qui est parallèle à la ligne donnée  $ab$ .

S'il faut déterminer une ligne qui soit quatrieme proportionnelle à trois lignes données; & si ces trois lignes

font (fig. 25)  $fg$ ,  $hi$  &  $kl$ ; le problème est de trouver le quatrième terme de cette proportion,  $fg:hi::kl:x$ . A cet effet, on mène deux lignes  $am$  &  $aq$  indéfinies, on fait  $ad$  égal à  $fg$ , &  $am$  égal à  $ih$ . Ensuite on prend sur  $aq$  une partie  $ae$  égale à  $kl$ ; on joint les points  $d$  &  $e$  par une droite; & enfin on mène, par le point  $m$ , une ligne parallèle à  $de$ . La ligne  $aq$  est alors la ligne demandée. Car par la construction de la figure, on doit dire,  $ad:am::ae:aq$ , ou,  $fg:hi::kl:aq$ ; donc  $aq$  est une quatrième proportionnelle aux 3 lignes données.

Le procédé seroit le même, s'il étoit question de trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données, telles que  $fg$  &  $hi$ ; ou s'il falloit indiquer le quatrième terme de cette proportion,  $hi:fg::fg:x$ . Alors les changemens que l'on feroit à la construction précédente, seroient, de rendre  $ae$  égal à  $fg$ , au lieu de donner à cette partie de  $aq$ , comme auparavant, la longueur d'une autre ligne  $kl$ ; ensuite de mener, par  $m$  &  $e$ , une droite  $me$ , & enfin, de faire passer par  $d$  une ligne qui, parallèle à  $me$ , couperoit sur  $ae$ , une partie égale à la ligne demandée: car on seroit alors fondé à faire cette proportion,  $hi:fg::fg$ : cette partie coupée.

Il est à propos, & c'est ici le lieu de faire connoître la base de certaines échelles ou qui accompagnent des plans de vaisseaux, ou qui sont en usage dans la société. Si une ligne  $cm$  (fig. 28) est divisée en parties égales, & s'il est nécessaire de construire une échelle, sur laquelle on puisse mesurer exactement la moitié, par exemple, de chacune de ses parties, sans qu'aucune d'elles soit partagée immédiatement en deux portions égales; on y parvient de la manière suivante. On tire, par les extrémités  $c$  &  $m$ , des lignes parallèles & égales  $ca$  &  $mr$  qui sont indéfinies. On porte sur celles-ci deux ouvertures égales de compas, à partir des deux extrémités de  $cm$ ; ensuite, par les points de division  $b$  &  $p$ ,  $a$  &  $r$ , on mène des lignes  $bp$  &  $ar$ , parallèles & nécessairement égales à  $cm$ . On partage aussi  $ar$ , en parties qui soient égales à celles de  $cm$ ; & enfin on dirige, de l'extrémité  $c$ , une ligne transversale, au premier

point *i* de division de la ligne *ar*. Une seconde transversale est aussi menée du premier point *n* de division de *cm*, au second point *s* de *ar*, & ainsi de suite. L'échelle est alors construite : & la partie *bo*, qui est comprise entre *ca* & la premiere transversale *ci*, est égale à la moitié de *cn*. Car les triangles *cui* & *bco* sont semblables, à cause des paralleles : donc on peut dire *ai:bo::ac:bc*; mais *ac* est double de *bc* : par conséquent *bo* doit être la moitié de *ai*, ou de *cn*, qui a la grandeur de *ai*.

On peut voir par cette démonstration, comment on devroit construire une échelle qui présenteroit séparément des longueurs, ou de 1 pouce, ou de 2, ou de 3, &c; en supposant que la partie *cn* représente celle d'un pied. Alors, sur les lignes indéfinies *ca* & *mr*, on porteroit douze ouvertures égales de compas; des lignes paralleles, & égales à *cm*, seroient menées par tous les points de division des lignes *ca* & *mr*; enfin des transversales tirées comme précédemment, couperoient les lignes paralleles à *cm*, de maniere, que les parties qui seroient interceptées, par *ca* & la premiere transversale, représenteroient les longueurs demandées. Par exemple, le segment de la premiere parallele, ou de celle qui seroit la plus voisine de *cm*, étant compris entre *ca* & la premiere transversale, seroit le 12.<sup>e</sup> de *cn*, ou elle représenteroit un pouce : & on le démontreroit comme précédemment, par la comparaison de deux triangles semblables. Le segment de la seconde parallele représenteroit la longueur de 2 pouces; & successivement celles, de 3 pouces, ou de 4, ou de 5.... ou de 11 pouces, seroient indiquées par les segmens semblablement placés des autres paralleles.

On doit aussi conclure du principe qui est commun à ces constructions, que lorsque les lignes *ca* & *mr*, au lieu d'être composées de 12 parties égales, le sont seulement de 10; les segmens des paralleles ne peuvent représenter qu'un nombre plus ou moins grand de dixiemes de la ligne *cn*. Par conséquent, si cette dernière étoit elle-même la dixieme partie d'une ligne donnée *cm*, ces segmens seroient connoître la lon-



gueur des centièmes de cette ligne *cm*. Telle est l'échelle qui est nommée l'échelle de dixmes.

113. Les triangles rectangles ont quelques propriétés particulières, qui sont fondées sur les principes précédens, & qui sont importantes à connoître. Soit *abc* (fig. 21) un triangle qui est supposé rectangle en *a*, ou dont l'angle *a* est de 90 degrés. Soit abaissée, du sommet *a*, une perpendiculaire sur le côté opposé *bc* (qui est nommé l'hypothénuse de ce triangle). Alors cette figure présente 3 triangles semblables, qui comparés deux à deux, conduisent à des résultats remarquables. Ces triangles sont semblables; car le triangle *abc* a un angle commun avec chacun des triangles *abo* & *aoc*; et comme eux il a un angle qui est droit. Il est donc semblable à chacun d'eux; & ces derniers sont par conséquent semblables l'un à l'autre. Si les deux petits triangles sont comparés, on peut faire la proportion *bo:oa::oa:oc*: donc une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle sur son hypothénuse, est toujours moyenne proportionnelle, entre les deux parties coupées, ou entre les deux segmens de cette même hypothénuse. Si on compare chaque petit triangle avec *abc*, on doit dire, *bo:ba::ba:bc*, & *oc:ac::ac:bc*; c'est-à-dire, que chaque côté l'angle droit d'un tel triangle est moyen proportionnel entre l'hypothénuse & le segment correspondant. D'ailleurs, en réunissant les résultats, des deux dernières proportions qui donnent ces équations séparées,  $ba^2 = bo.bc$ , &  $ac^2 = bc.oc$ : on forme cette somme  $ba^2 + ac^2 = bo.bc + bc.oc$ . on voit que dans ce second membre, la quantité *bc* multiplie en même tems, & la ligne *bo*, & la ligne *oc*: on peut donc dire qu'elle multiplie la somme de ces lignes, ou la ligne entière *bc*. Donc  $ba^2 + ac^2 = bc^2$  (parce qu'alors la ligne *bc* est multipliée par elle-même). Par conséquent, le quarré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des quarrés séparés de chaque côté de l'angle droit. On peut conclure aussi des mêmes propositions que  $ba^2:ac^2::bo.bc:oc.bc$ , & par conséquent que  $ba^2:ac^2::bo:oc$  (en divisant les deux termes du dernier rapport par la même quantité *bc*); c'est-à-dire,

que les quarrés des côtés de l'angle droit d'un triangle sont entr'eux comme les segmens de l'hypothénuse, qui sont formés par une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur ce côté. Enfin, de la dernière proposition, on peut encore tirer celle-ci,  $(ba^2+ac^2):ba^2::(bo+oc):bo$ , ou,  $bc^2:ba^2::bc:bo$ . On peut dire, aussi par la même raison,  $bc^2:ac^2::bc:co$ : par conséquent,  $bc^2:ba^2:ac^2::bc:bo:oc$ . Ce qui signifie qu'ayant abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle, une perpendiculaire sur son hypothénuse, les parties de celles-ci, & elle-même, sont entr'elles comme les quarrés, & des côtés de l'angle droit, & de l'hypothénuse.

Les propriétés des triangles rectangles fournissent un moyen de déterminer une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soient (fig. 29) les deux lignes  $or$  &  $qz$ , entre lesquelles on doit trouver une moyenne proportionnelle. Il faut, pour y parvenir, que ces deux lignes mises bout à bout, deviennent, dans un triangle rectangle, les deux segmens d'une hypothénuse coupée, par une ligne abaissée sur elle perpendiculairement, du sommet de l'angle droit. Cette dernière ligne est alors celle qui est demandée. Tout se réduit ainsi à construire un triangle rectangle sur une hypothénuse  $ac$ , qui soit la somme des lignes données  $or$  &  $qz$ ; & la propriété du cercle en présente un moyen facile. Car on sait que tout angle qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, & dont les côtés passent par les extrémités d'un de ses diamètres, est nécessairement de 90 degrés. C'est pourquoi on doit decrire, sur  $ac$  comme diamètre, une demi-circonférence  $adc$ ; & elever à cette ligne, par le point  $b$  de jonction des deux lignes données, une perpendiculaire  $db$ . Cette dernière ligne, qui est bornée par le diamètre  $ac$ , & par la circonférence, est alors la moyenne proportionnelle cherchée. Car en menant les deux cordes  $ad$  &  $dc$ , on forme un triangle  $adc$ , qui est rectangle en  $d$ , & dans lequel la ligne trouvée  $db$ , est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit de ce triangle, sur son hypothénuse.

124. Remarquons que si, sur chaque point du dia-

metre

metre  $ac$ , on élève autant de perpendiculaires, telles que  $bd$ , chacune est également moyenne proportionnelle entre les deux segmens correspondans du diametre  $ac$ ; parce que, pour chacune, on peut construire un triangle rectangle, tel que  $adc$ . Ainsi c'est une propriété qui est commune à tous les points de la circonférence d'un cercle, savoir que toute perpendiculaire, abaissée d'un point de cette circonférence sur un de ses diametres, est moyenne proportionnelle entre les deux parties coupées de ce même diametre. La propriété des triangles rectangles a conduit par conséquent à la propriété la plus essentielle des cercles. Ceux-ci ont encore quelques autres propriétés distinctives; & quoiqu'elles soient moins intéressantes, il est cependant à propos de les développer.

Si deux cordes d'un cercle se traversent, leurs parties sont entr'elles réciproquement proportionnelles. Soit un cercle  $abc$  (fig. 23) dans lequel deux cordes quelconques, telles que  $ac$  &  $bp$ , se coupent en  $q$ . Si on joint les points extrêmes  $p$  &  $c$ , par une ligne droite  $pc$ , ainsi que  $a$  &  $b$ , par une autre ligne  $ab$ ; on forme deux triangles  $pqc$  &  $aqb$ , qui sont semblables; parce que, non seulement les angles  $pqc$  &  $aqb$  sont égaux, comme opposés au sommet; mais aussi parcequ'il y a égalité entre les angles  $qpc$  &  $baq$ , comme ayant pour mesure la moitié du même arc  $bec$ : donc on peut dire, en comparant les côtés homologues,  $qp:aq::qc:qb$ ; c'est-à-dire, que les parties de la premiere corde  $ac$ , sont les moyens d'une proportion, dont les extrêmes sont les parties de l'autre corde  $pb$ . Ces deux cordes se coupent donc en parties réciproquement proportionnelles. En étendant cette démonstration à deux cordes qui seroient perpendiculaires entr'elles; il en résulteroit aussi, comme on l'a vu précédemment, la propriété distinctive du cercle.

Si on considere deux sécantes  $nb$  &  $nc$ , menées d'un point tel que  $n$ , qui est placé hors d'un cercle  $abc$ ; ces lignes sont toujours coupées par la circonférence, aux points tels que  $p$  &  $a$ , de maniere que leurs parties extérieures  $an$  &  $np$ , sont réciproquement proportion-

nelles aux sécantes entières. Car soient menées les cordes *ac* & *bp*, qui régnissent, l'extrémité d'une sécante, & le point d'intersection de l'autre sécante avec la circonférence. Alors il y a deux triangles *anc* & *nbp* qui sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en *n*, & que les angles *nca* & *qbn* sont égaux, comme ayant chacun pour mesure la moitié du même arc *ap*. On peut donc faire cette proportion  $np:na::nb:nc$ ; ce qu'il falloit démontrer.

Cette dernière vérité ne dépend, ni de la longueur des sécantes, ni de la grandeur de l'angle qu'elles forment entr'elles. C'est pourquoi, si l'une d'elles est supposée s'éloigner de l'autre, jusqu'à devenir tangente au cercle, en un point *f*; la même proportion ne peut cesser d'avoir lieu. Ainsi, considérons toujours ces lignes comme deux sécantes, ou particulièrement la ligne *nf*, comme une sécante qui est devenue égale à sa partie extérieure. On peut dire alors, dans cette nouvelle supposition,  $nb:nf::nf:na$ ; c'est-à-dire, que d'un même point placé hors d'un cercle, si on mène une sécante & une tangente à sa circonférence; la ligne qui est tangente, est toujours moyenne proportionnelle entre la sécante & sa partie extérieure. Cette proposition offre encore un nouveau moyen de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Enfin, pour terminer ce qui regarde les triangles semblables, nous disons que leurs contours sont entr'eux comme leurs côtés homologues: ou que la somme des côtés d'un triangle, est à celle des côtés d'un triangle qui est semblable au premier, comme un côté du premier, est au côté homologue du second. Car soient supposés semblables les triangles *abc* & *mon* (fig. 21), leurs côtés homologues sont tous proportionnels: on peut donc dire,  $ab:mo::ac:mn::bc:on$ ; & de cette suite de rapports, on peut conclure la proportion suivante:  $ab+ac+bc:mo+mn+on::ab:mo$ ; la proposition annoncée se trouve ainsi démontrée.

115. Deux polygones ne peuvent être réputés semblables qu'autant que leurs angles sont égaux & leurs

côtés homologues proportionnels : mais lorsque divisés par des diagonales , qu'on suppose menées de deux angles homologues aux autres angles , ces polygones sont partagés en triangles qui sont semblables , ils sont eux-mêmes semblables l'un à l'autre. Par exemple , soient (fig. 19) les polygones  $abcde$  &  $fghil$  partagés par des diagonales menées des angles homologues  $b$  &  $g$  , en triangles qui sont semblables chacun à chacun. La similitude de ces triangles conduit à conclure , & l'égalité des angles des deux polygones , & la proportionnalité de leurs côtés. En effet ,  $bcd$  étant semblable à  $ghi$  , les angles  $bcd$  &  $ghi$  sont égaux , & ces angles appartiennent aux polygones. Il y a aussi égalité entre les angles  $bdc$  &  $gih$  , par la même raison , & entre les angles  $bde$  &  $gil$  , parce que les triangles  $bde$  &  $gil$  sont semblables : par conséquent , la somme des angles  $bdc$  &  $bde$  est égale à celle des angles  $gih$  &  $gil$  ; c'est-à-dire , que l'angle total  $cde$  de l'un des polygones , est égal à l'angle  $hil$  de l'autre polygone. On démontreroit de même l'égalité des autres angles correspondans  $dea$  &  $ilf$  : donc les polygones supposés ont leurs angles égaux chacun à chacun , lorsque les triangles qui les composent sont semblables. Leurs côtés sont aussi proportionnels dans la même supposition. Les deux premiers triangles  $bcd$  &  $ghi$  étant semblables , donnent cette suite de rapports égaux ,  $bc:gh::cd:hi::bd:gi$ . En comparant les deux triangles suivans  $bed$  &  $gli$  , qui sont aussi semblables , on peut dire  $bd:gi::de:li::be:gl$  ; & enfin des deux triangles  $abe$  &  $fgl$  , on conclut que  $be:gl::ae:fl::ab:fg$ . La première suite a un rapport commun , avec la seconde qui elle-même a aussi un rapport commun avec la troisième : donc tous les rapports qui les composent sont égaux : & on peut dire  $bc:gh::cd:hi::de:il::ae:fl::ab:fg$ . En général , deux polygones sont donc semblables , lorsqu'étant partagés en un même nombre de triangles par des diagonales menées de deux angles homologues aux autres angles , ces triangles ainsi formés sont eux-mêmes semblables.

La proposition inverse est aussi vraie ; c'est-à-dire , si deux polygones sont semblables ; & s'ils sont partagés

en triangles, comme on l'a indiqué précédemment; les triangles dont ils sont composés, sont aussi semblables chacun à chacun. Soient ces deux polygones représentés (fig. 19); le triangle particulier  $bcd$  est semblable à son correspondant  $ghi$ : car les angles  $bcd$  &  $ghi$  sont égaux, comme appartenant aux deux polygones semblables, qui d'ailleurs ayant leurs côtés homologues proportionnels, permettent de faire cette proportion,  $bc:gh::cd:ih$ . Par conséquent les triangles comparés ont un angle égal, compris entre deux côtés proportionnels: ils sont donc semblables. Il en résulte, 1.<sup>o</sup> qu'il y a égalité soit entre les angles  $gih$  &  $bdc$ , soit entre  $dbc$  &  $igh$ ; & 2.<sup>o</sup> qu'on peut dire,  $dc:ih::bd:gi$ . Le triangle suivant  $bde$  est aussi semblable à son correspondant  $gli$ : car les angles  $cde$  &  $hil$  des polygones sont égaux. Ainsi, en retranchant de chacun l'angle  $bdc$ , ou son égal  $gih$ , les restes  $edb$  &  $lig$  sont égaux. Ces triangles ont donc un angle égal. D'ailleurs cet angle est compris entre deux côtés proportionnels. Car par la similitude des polygones, on doit dire,  $dc:hi::de:il$ ; & en comparant cette proportion à la dernière, on doit en conclure, à cause du rapport commun de  $dc:ih$ , que  $bdc:gi::ed:li$ ; donc les deux seconds triangles de ces polygones sont semblables. C'est en suivant la même marche, qu'il est aisé de démontrer la similitude, des autres triangles, qui se correspondent dans ces deux polygones: donc il est vrai en général, que deux polygones, étant semblables, & divisés en un même nombre de triangles, les triangles qui les composent sont aussi semblables chacun à chacun.

Les contours de deux polygones semblables, sont, comme ceux des triangles semblables, dans le rapport de deux de leurs côtés homologues. Car tous leurs côtés sont proportionnels: on peut donc dire,  $bc:gh::cd:ih::ed:li::ea:lf::ab:fg$ ; & dans cette suite de rapports égaux, si on compare la somme des antécédens à celle des conséquens; il en résulte, que le contour du premier polygone ou la somme de ses côtés, est au contour du second, comme  $ab:fg$ , ou,  $::bc:gh$ , &c.

Ces propositions s'étendent à tous les polygones, quel

que puisse être le nombre de leurs côtés; ainsi elles s'appliquent aux polygones réguliers, & même à ceux dont les côtés seroient supposés infinis en nombre, comme en petitesse; c'est-à-dire, à tous les cercles. Néanmoins il n'en est pas également des cercles comme des polygones réguliers: car ceux-ci peuvent n'être pas semblables, & les cercles le sont toujours. En effet soient inscrits deux polygones réguliers *abcde* & *iktr* (fig. 20) à deux cercles concentriques, de manière que leurs côtés correspondans soient compris entre les mêmes rayons menés du centre commun aux divisions égales des circonférences: ou bien, soient tracés deux cercles concentriques, dont les circonférences soient divisées chacune en un même nombre de parties égales entr'elles. Soient menés aussi, des rayons à tous les points de division, & des cordes à tous les arcs de ces circonférences. On forme de cette manière deux polygones réguliers qui sont inscrits aux deux cercles, & de tels polygones sont nécessairement semblables. Car le triangle *zok*, par exemple, est semblable à son correspondant *eod*; puisqu'ils ont un angle commun en *o*, & parce qu'on peut faire cette proportion,  $oi:ok::oe:od$ , à cause de l'égalité des rayons d'un d'un même cercle. Ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; & par conséquent ils sont semblables. Tous les autres triangles, qui sont partie des mêmes polygones, sont semblables, par les mêmes raisons: ainsi ces polygones sont eux-mêmes semblables, comme composés d'un même nombre de triangles semblables.

Si maintenant on suppose à ces polygones, une infinité de côtés qui soient par conséquent infiniment petits; ils doivent alors se confondre parfaitement avec les circonférences circonscrites, en restant néanmoins semblables. Par conséquent ces deux cercles, ainsi que tous les cercles possibles, sont des figures semblables. Les contours ou les circonférences des cercles, sont donc, comme ceux de tous les polygones semblables, dans le rapport de leurs côtés homologues; c'est-à-dire, dans l'exemple présent, qu'on peut faire cette propor-

tion : la circonférence *abcdef*, est à la circonférence *thkir::ed:ik* ; mais *ed:ik::oe:oi* , à cause des triangles semblables *oed* & *oik* : donc les circonférences de deux cercles quelconques, sont entr'elles comme leurs rayons ou leurs diametres.

Ce rapport est extrêmement utile : car il sert à déterminer , ou la longueur de la circonférence d'un cercle dont le diametre est donné , ou le diametre d'une circonférence connue. En effet , nous avons dit que par des mesures prises sur un cercle de 7 pieds de diametre (94), on a trouvé que sa circonférence est de 22 pieds : c'est pourquoi un tel cercle peut être employé comme terme de comparaison , pour calculer le diametre ou la circonférence de tout cercle imaginable. Ainsi demandet-on le diametre d'une circonférence qui a 35 pieds de longueur ; il faut faire cette proportion  $22:7::35:x$ , & ce quatrieme terme, qui est le diametre cherché, est de 11 pieds  $\frac{3}{2}$ .

116. Si une circonférence peut être décrite , étant donné son diametre , on peut aussi construire un polygone qui soit semblable à un autre polygone connu , étant donné un seul côté du polygone cherché. Car soit *zs* (fig. 19) le côté donné , qui est supposé homologue à *ba* (côté du polygone connu). Si par *g*, on mene *gi* parallele à *ea* ; si par *i*, on mene une ligne *il* patallele à *ed* ; & par *l*, une parallele à *dc* ; on forme alors un polygone *bgilm* qui est parfaitement semblable au polygone *bcdea*. Car ainsi qu'on peut le conclure des lignes paralleles, ils sont composés l'un & l'autre de triangle qui sont semblables chacun à chacun.

Veut-on tracer , d'après ces notions , & sur le papier, une figure semblable à celle d'une rade , ou d'une baie , ou d'une partie de côte. Comme ces objets ont peu d'étendue sur la surface du globe , on peut considérer tous les points d'un espace aussi borné , comme étant dans un même plan. Alors l'image qu'on veut en dessiner sur le papier , ne doit être qu'un polygone semblable au polygone naturel que présente la surface du globe.

Soit , par exemple , un havre *dcbafghie* (fig. 30). Son contour a des points plus ou moins apparens &



faillans, qui le rendent plus prononcé, & par conséquent plus reconnoissable. Telles sont des pointes avancées, des îles, des sinuosités, &c. Ainsi, pour tracer la figure de ce havre, ou pour en faire une image ressemblante, il faut d'abord supposer ces points principaux, comme liés l'un à l'autre par des lignes; mesurer les longueurs de ces lignes, & les angles qu'elles font entr'elles; ou il faut connoître les triangles qu'on peut former par des diagonales menées d'un des points principaux à tous les autres qui font partie de l'ensemble de ce havre. La méthode de décomposer un tel polygone naturel en triangles formés par des diagonales, & de déterminer séparément les parties de tous ces triangles, est la plus commode & la plus usitée, pour servir de fondement au tracé d'un tel plan; c'est pourquoi elle va être exposée en détail.

On choisit, d'après la supposition faite, deux points *a* & *b* sur le terrain, & placés, de manière qu'un observateur puisse voir, de chacun des points *a* & *b*, tous les objets principaux du havre, tels que les points *f*, *g*, *h*, *i*, *e*, *b*, *d*, *c*. On fait aussi en sorte que la distance particulière des points *a* & *b*, soit environ la dixième partie de celle des deux points les plus éloignés, qui doivent être marqués sur le plan. On mesure exactement la distance *ab*, ou la ligne qui joint les deux points *a* & *b*; & cette ligne reçoit le nom de base. On mesure aussi, du point *a*, les angles que forme la base avec tous les rayons visuels, dirigés, de cette extrémité *a* de la base, à chaque point principal de l'étendue du havre; & ces mesures sont faites avec les instrumens déjà décrits (99). Les valeurs des angles *cab*, *dab*, *eab*, &c. étant ainsi déterminées; l'observateur se transporte en *b*, & mesure également les angles que font avec la base *ba*, les rayons visuels dirigés, de cette extrémité *b*, aux mêmes points qui ont été observés du point *a*. Ces opérations faites sur le terrain, suffisent alors pour construire sur le papier une figure semblable à celle que présente le terrain. A cet effet, on trace sur le papier une ligne *kL*, qu'on compose d'autant de parties égales, qu'il se trouve de toises ou de pieds dans la mesure

de *ba*. Ensuite, à l'aide d'un rapporteur & d'un crayon, on mene, des points *k* & *l* successivement, des lignes qui fassent avec *kl*, des angles égaux à ceux qui ont été observés sur le terrain, en *a* & *b*. Alors les points *s*, *r*, *q*, *p*, *o*, *i*, *n*, *m* d'intersection des dernières lignes & des précédentes, deviennent les lieux de tous les points principaux du havre. Ces points sur le papier sont d'ailleurs situés respectivement, comme les objets qu'ils représentent, le sont sur le terrain; c'est-à-dire, que leurs distances réciproques marquées sur ce plan, sont proportionnelles à celles qui séparent les objets sur le terrain. En effet, qu'on suppose un instant tous ces points réunis par des lignes droites, & sur le plan, & sur le terrain; il est aisé de prouver qu'alors on a fait sur le papier un polygone semblable au polygone naturel. Les triangles *bde* & *lno*, par exemple, sont évidemment semblables: car d'après la construction qui vient d'être indiquée, le triangle *lnk* a été fait semblable au triangle *bda*, & le triangle *lok* au triangle *bea*. On a donc les proportions, *ba:kl::bd:ln*, & *ba:kl::be:lo*, qui donnent celle-ci, *bd:ln::be:lo*. D'ailleurs l'angle *nlo* a été fait égal à l'angle *dbe*: par conséquent les triangles *bde* & *lno* sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. Ce même raisonnement appliqué à tous les triangles *bdc*, *bie*, *bih*, &c. comparés aux triangles *lmn*, *lor*, *lrg*, &c. conduit à conclure leur similitude; & par conséquent celle, du dessin fait sur le papier, au polygone imaginé sur le terrain. L'égalité des angles de ces figures démontre que les objets principaux du havre sont représentés sur le papier par des points semblablement situés; & la similitude des triangles fait voir aussi, que les distances des points marqués sur le plan, sont proportionnelles aux distances réelles des objets, sur le terrain. Le plan est même tel, que, par la distance de deux points quelconques choisis sur le plan de ce havre, on peut juger de leur distance réelle dans le havre même. Car veut-on savoir la grandeur de l'ouverture *de*? on doit dire, *kl:ab::no:de*; & comme *kl* est supposé contenir autant de parties égales que *ab* contient de toises:

de même le nombre de parties égales qu'on peut compter dans la ligne *me* tracée sur le plan, indique le nombre de toises qu'on compte réellement dans l'ouverture de du havre. Enfin on acheve de rendre ce plan, parfaitement ressemblant au havre dont il doit être l'image, en réunissant tous les points principaux déjà marqués, par des lignes droites ou courbes tirées de l'un à l'autre, & dont la forme est, autant qu'il est possible, rendue conforme aux contours des parties de côté, qui separent ces objets sur le terrain. Ces contours d'ailleurs peuvent être dessinés d'après des relèvemens exacts des points soit principaux soit intermédiaires. Par ce moyen, on obtient sur le papier une figure parfaitement semblable, dans tous ses détails, à celle du havre qu'il falloit représenter: & c'est par ce moyen qu'on transmet aux navigateurs l'image fidelle de certaines parties des côtes de la mer, dont la connoissance importe à leur sûreté, ou à leur succès.

117. *Trigonométrie rectiligne.* On voit par ce qui précède, qu'étant donné un côté d'un polygone, dont les angles & les autres côtés sont inconnus & cherchés, on ne peut déterminer la grandeur de ces derniers, qu'en comparant le premier polygone à un second qui lui est semblable, & dont toutes les parties sont connues. On fait qu'il en est de même pour les triangles. Cependant lorsque les circonstances ne présentent pas un triangle, qui, connu dans toutes ses parties, soit semblable à celui dont on se propose de calculer les angles ou les côtés; dans ce cas on peut recourir à d'autres moyens, pour découvrir la grandeur de ces derniers. En effet, nous allons démontrer, qu'étant données les mesures de trois parties d'un triangle (en supposant que l'une d'elles soit un des côtés); elles suffisent pour déterminer la valeur de chacune des trois autres parties de ce même triangle. Si on établit ainsi pour condition, qu'il y ait toujours un côté parmi les trois parties connues, c'est parce que les trois angles d'un triangle, ne peuvent servir seuls à donner une idée des côtés. Car des angles de même grandeur appartiennent à tous les triangles qui sont semblables, & qui ont en même tems des côtés de diffé-

rente longueur. Ainsi, les résultats des calculs devroient alors convenir à une infinité de triangles, ce qui les rendroit indéterminés & sans objet. Il faut donc qu'un des côtés soit toujours, au nombre des trois parties connues d'un triangle, pour que la grandeur réelle de ses autres parties puisse être déterminée.

Nous avons exposé comment on mesure les angles rectilignes : nous avons vu, que les comparaisons à établir entre ces angles, étoient bornées à celles de leurs mesures ; & les rapports de leur grandeur ont été réduits uniquement à ceux des arcs qu'ils embrassent entre leurs côtés. Le besoin de multiplier les points de vue sous lesquels on peut comparer des angles, a fait encore imaginer entr'eux de nouveaux rapports ; & on les a fondés sur les sinus des arcs qui leur servent de mesure, ainsi que sur les tangentes, les sécantes, les cosinus, les cotangentes, & les cosécantes de ces mêmes arcs. Toutes ces lignes, que nous allons faire connoître, ont paru devoir être substituées, dans plusieurs circonstances, aux arcs eux-mêmes, soit parcequ'elles sont toujours de même grandeur pour un même arc, ou pour son supplément dans un même cercle, soit parce qu'elles peuvent servir à déterminer, par leur longueur particulière, le nombre des degrés des arcs auxquels elles appartiennent. Soit un angle *dgi* (fig. 31), & soit décrit de son sommet *g* comme centre, l'arc *ci* qui est sa mesure. Le sinus de cet angle, ou de l'arc *ci*, est une perpendiculaire abaissée de l'extrémité *c* de cet arc, sur l'autre côté de l'angle, ou sur le rayon *gi* qui passe par l'autre extrémité de *ci*. La tangente de l'arc *ci*, ou de l'angle *cgi*, est une ligne *ie*, qui est tangente à une extrémité *i* de cet arc, & qui est bornée, dans sa longueur, par le prolongement du rayon *gc*, mené par l'autre extrémité *c* de l'arc *ci*. Enfin la sécante de cet arc est *ge*, ou une ligne qui menée par le centre & l'extrémité *c* de l'arc *ci*, est comprise entre ce centre & le point où elle rencontre la tangente *ei* du même arc. Les autres lignes nommées, cosinus, cotangente & cosécante de l'arc *ci*, sont les sinus, tangente & sécante du complément de ce même arc. Ainsi l'arc *ai* étant de 90 degré.

l'arc *ac* est le complément de *ci*; le sinus de *ac* est *cz* ou *og*; sa tangente est *ad*; & sa sécante est *gd*: c'est-à-dire que le cosinus de *ci* est *go*, sa cotangente est *ad*, & sa cosécante est *gd*.

La longueur de chacune de ces lignes est proportionnée à la grandeur du rayon du cercle dans lequel elles sont tracées: & si la mesure de l'angle *dgi* eût été décrite avec le rayon *gu*, au lieu du rayon *gi*, les sinus & tangentes de ce même angle eussent été des lignes plus petites que *co* & *ie*, auxquelles cependant elles sont proportionnelles. Les rapports des sinus, ainsi que des tangentes, sont aussi ceux des rayons des deux circonférences: ainsi, en variant la longueur du rayon, on change la grandeur de ces lignes. C'est pourquoi l'usage utile & commode auquel elles sont destinées, a fait convenir de choisir un rayon d'une longueur déterminée, pour servir d'unité de mesure. C'est avec ce rayon, qu'est supposée décrite la circonférence dans laquelle sont tracées ces lignes, relatives à tous les arcs possibles, ou à tous les arcs imaginables. C'est dans cette circonférence qu'on a mesuré ou calculé leurs longueurs particulières; & c'est d'après ces mesures & ces calculs, qu'on a formé des tables générales, qui présentent les longueurs des sinus & des tangentes de tous les angles, ainsi que les logarithmes qui leur correspondent. Le rayon convenu qui sert de base à ces tables, est, par cette raison, nommé le rayon des tables, & il a 10 pour logarithme.

Il faudroit sans doute, avant d'indiquer comment ces tables ont pu être construites, faire connoître comment elles peuvent servir dans la recherche des parties d'un triangle; mais leur importante nécessité doit être déjà présumée. Elle sera démontrée, soit dans les propositions qui suivent, soit dans leurs applications nombreuses; & pour ne pas y revenir, nous allons présenter des détails sur leur formation.

Soit donc *gi* le rayon des tables, qu'on regarde d'ailleurs dans les calculs comme égal à l'unité. Ce rayon est aussi le sinus d'un arc de 90 degrés, tel que *ai*; tandis que le cosinus de cet arc est nul, parce que

son complément est o. Si on suppose *ci* de 30 degrés, son sinus est *co*. Le double de ce sinus, qui est *cl*, ou la corde, d'un arc double de *ci*, c'est-à-dire de 60 degrés, est égal au rayon *gi*; parce que le rayon est égal au côté de l'exagone régulier: & par conséquent, le sinus d'un arc de 30 degrés, est la moitié du rayon des tables.

Remarquons qu'il suffit de connoître le sinus d'un angle ( tant toujours donné le rayon des tables), pour déterminer son cosinus, sa tangente, sa cotangente & sa sécante. Car dans le triangle rectangle *gco* (par la propriété de ces triangles),  $go^2$ , ou le quarré du cosin. de *ci*, est égal à la différence du quarré du rayon au quarré du sinus du même arc. Les triangles *gco* & *gei*, étant semblables, donnent cette proportion, (a) *cos. ci* : *sin ci* :: 1 : *tang. ci* (en nommant le rayon 1); & celle-ci (b) *cos. ci* : 1 :: 1 : *sec. ci*. Enfin, les triangles *gei* & *agd* étant semblables, parce qu'ils ont, un angle droit, l'un en *a* & l'autre en *i*; & des angles *adg* & *dgi*, qui sont égaux comme étant alternes internes, on en conclut cette proportion, (c) 1 : *cot. ci* :: *tang. ci* : 1. Il suffit donc, comme nous l'avons énoncé, de connoître le sinus d'un arc, pour en conclure la grandeur de son cosinus, de sa tangente, de sa cotangente & de sa sécante.

Ce qui vient d'être dit pour l'arc *ci*, pourroit l'être aussi pour tout autre arc, tel que *bi*; ainsi imaginons de pareilles proportions pour cet arc *bi*, & comparons les avec celles qui sont faites pour l'arc *ci*. Il résulte des proportions, telles que (b), que *cos. ci* : *cos. bi* :: *sec. bi* : *sec. ci*; c'est-à-dire que les cosinus de deux arcs sont en raison inverse de leurs sécantes. Si on compare les proportions, telles que (c), on en conclut que *cot. ci* : *cot. bi* :: *tang. bi* : *tang. ci*, ou que les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes.

Toutes ces propositions offrent, sans doute, des moyens, pour construire des tables de sinus; mais elles ne suffisent pas. & elles concourent seulement avec les

suivantes, pour favoriser cette opération. Voici une proposition principalement utile dans ces calculs.

118. On peut déterminer le sinus de la somme de deux arcs, ou celui de leur différence, étant donnés les sinus & cosinus séparés de chacun de ces arcs. Soient (fig. 32) deux arcs  $dc$  &  $ca$ , dont la somme est  $da$ , & la différence  $ba$ . Le sinus de  $ca$  (que nous nommerons  $\sin. A$ ) est  $cn$ ; celui de  $cd$  (qui sera nommé  $\sin. B$ ) est  $dr$ . Le cosinus de  $A$  est  $ne$ ; &  $re$  est cosinus  $B$ . Le sinus de la somme de ces deux arcs, ou  $\sin. (A+B)$  est  $du$ ; & celui de leur différence, ou  $\sin. (A-B)$  est  $bs$ . Le premier  $du$  est composé de  $do$  &  $ou$ ; c'est-à-dire, de  $rm$  &  $do$  (en supposant,  $rm$  menée parallèlement à  $du$ , par le point  $r$ ; &  $ro$  parallèle à  $mu$ ). Le second  $bs$  n'est que la différence de  $ou$  ou de  $rm$  avec  $oi$ ; mais  $oi$  est une ligne égale à  $do$ , parce que la corde  $db$  étant divisée en deux parties égales en  $r$ , la ligne  $di$  doit aussi être, divisée comme elle, au point  $o$ , par les parallèles  $ro$  &  $bi$ ; par conséquent, le sinus de la différence des deux arcs donnés, est égal à la différence des deux lignes  $rm$  &  $do$ . tout le problème se réduit donc à trouver l'expression de  $rm$ , & celle de  $do$ , pour en conclure la valeur de  $\sin. (A+B)$ , & de  $\sin. (A-B)$ .

Si on compare ensemble les triangles semblables  $ecn$  &  $erm$ , on a la proportion,  $rm : \sin. A :: \cos. B : 1$ , & par conséquent,  $rm = \sin. A. \cos. B$ . En comparant ensuite au même triangle  $cne$ , le triangle  $dro$  qui lui est semblable; (parce que les côtés de celui-ci sont perpendiculaires à ceux du premier): on a aussi  $do : \cos. A :: \sin. B : 1$ , ou  $do = \cos. A. \sin. B$ . La somme des deux lignes  $rm$  &  $do$ , ou  $du$ , ou  $\sin. (A+B)$ , est donc égale à  $\sin. A. \cos. B + \sin. B. \cos. A$ . En prenant la différence de ces mêmes lignes ou de leurs valeurs, on a donc  $\sin. (A-B) = \sin. A. \cos. B - \sin. B. \cos. A$ . Il seroit superflu de calculer directement l'expression des cosinus, de la somme, & de la différence de ces mêmes arcs; puisqu'on sait qu'étant donné le sinus d'un arc, on en conclut aisément son cosinus; mais il est bon de faire remarquer quelques conséquences de ces

propositions. Si le sinus d'un arc est donné, & par conséquent son cosinus, on peut en conclure le sinus du double de cet arc, ainsi que celui de sa moitié. Car en supposant que  $A=B$ , dans les expressions précédentes, on doit avoir  $\sin. 2A=2\sin. A \cos. A$ ; c'est-à-dire, qu'étant donné le sinus & le cosinus d'un arc  $A$ , on peut déterminer  $\sin. 2A$ . On peut dire aussi, dans la même supposition,  $\cos. 2A=\cos. A^2-\sin. A^2$ , ou  $\cos. 2A=1-2\sin. A^2$ , parce que  $\cos. A^2=1-\sin. A^2$ ; & enfin  $\sin. A^2=\frac{1}{2}(1-\cos. 2A)$ ; c'est-à-dire que le cosinus d'un angle étant connu, on peut calculer le sinus de la moitié de cet angle. Cependant ce dernier résultat peut encore être obtenu d'une autre manière. Soit  $sy$  (fig. 31) un arc, dont on connoît le sinus  $sx$ , & par conséquent, son cosinus  $xg$ . Le sinus de la moitié de cet arc est  $sq$ , moitié de la corde qui soutient l'arc  $sy$ ; & comme en ajoutant le quarré du sinus  $sx$  qui est connu, avec celui de  $yx$  (qui est la différence du rayon avec le cosinus connu du même arc  $sy$ ), on obtient le quarré de la corde entière  $sy$ ; il s'ensuit que le sinus de la moitié de l'arc  $sy$ , est la racine quarrée de la moitié de la somme indiquée; c'est-à-dire, que  $\sin. A^2=\frac{1}{2}(1-\cos. 2A)$ , comme précédemment.

C'est avec ces principes qu'on a pu calculer successivement les valeurs des sinus & tangentes de tous les arcs compris, depuis 0 jusqu'à 90 degrés; en remarquant que les arcs très-petits diffèrent peu de leurs sinus, & qu'il est superflu d'étendre les tables à des angles plus grands que 90 degrés. Car le sinus d'un angle obtus est toujours celui de son supplément: c'est-à-dire, par exemple, que le sinus de l'angle  $sgi$  (fig. 31), est la ligne  $sx$ , qui est le sinus de l'angle  $sgy$ , supplément de  $sgi$ .

119. Voici actuellement comment, dans un triangle rectiligne, on peut calculer trois de ses parties (angles ou côtés), étant données les trois autres parties, dont une au moins doit être un des côtés.

Trois principes généraux servent de base à ces calculs. Le premier, est que les sinus des angles d'un triangle sont entr'eux comme les côtés opposés à ces mêmes



angles. Soit le triangle  $abc$  (fig. 23). On le suppose inscrit à un cercle. La moitié de la corde, ou du côté  $ab$ , est généralement le sinus de la moitié de l'arc  $adb$ , ou de la mesure de l'angle  $c$ . Il en est de même des autres côtés de ce triangle, relativement aux angles qui leur sont opposés; & comme les moitiés de deux quantités sont nécessairement dans le rapport des quantités entières, on peut dire,  $ab:ac:bc::\sin.acb:\sin.abc::\sin.bac$ . De tels sinus de ces angles ont une longueur qui est relative à celle du rayon du cercle circonscrit; mais on peut substituer à leurs rapports, ceux des sinus des mêmes angles qui sont calculés dans les tables.

En effet, soit décrit, intérieurement au cercle  $abcdef$  qui est supposé égal (fig. 20) à celui qui est représenté (fig. 23), & avec le rayon des tables, un nouveau cercle  $rkt$ . L'angle  $uot$ , qui a son sommet au centre commun des deux cercles, a pour sinus la ligne  $tp$  dans l'un des cercles, & la ligne  $bg$  dans l'autre. Mais ces sinus, à cause des triangles semblables  $opt$  &  $ogb$ , sont entr'eux, comme le rayon du premier cercle, qui est celui des tables, est au rayon du plus grand cercle. Par conséquent, les sinus de deux arcs, considérés dans un cercle quelconque, sont dans un rapport égal à celui des sinus des tables. Ainsi, dans la proportion précédente, au lieu des rapports des sinus des angles du triangle  $abc$ , on peut substituer les rapports des sinus de ces mêmes angles, tels qu'ils sont calculés dans les tables. On peut donc faire cette proportion,  $\sin.c:\sin.b:\sin.a::ab:ac:bc$ ; c'est-à-dire que les sinus (calculés dans les tables) des angles d'un triangle, sont entr'eux comme les côtés opposés à ces mêmes angles.

Cette proportion sert dans tous les cas, excepté deux qui sont, 1.<sup>o</sup> le cas où les trois côtés d'un triangle sont donnés; & 2.<sup>o</sup> celui où deux de ses côtés & l'angle qu'ils forment entr'eux sont connus. C'est pour ces deux derniers cas qu'on a imaginé deux autres principes qui vont être démontrés successivement. Avant de nous en occuper, il est à propos de faire remarquer les proportions qui résultent du premier principe, & qu'il convient de faire pour la résolution particulière

des triangles qui sont rectangles. Soit considéré le triangle *fde* (fig. 21) dans lequel l'angle *e* est supposé de 90 degrés. on fait que le sinus d'un angle droit est égal au rayon, & que le rayon des tables est représenté par l'unité: ainsi, en appliquant le premier principe déjà démontré, à ce triangle *edf*, on peut dire  $1:df::\sin. d:ef::\sin. f:ed$ . Ce qui exprime que le rayon des tables est à l'hypothénuse d'un triangle rectangle, comme le sinus d'un des angles aigus est au côté qui lui est opposé: & la dénomination des termes qui composent cette analogie, annonce qu'elle ne peut être employée que dans les cas où l'hypothénuse est donnée ou cherchée. Si dans cette même suite de rapports, on ne considère que les deux derniers, en se rappelant que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémens l'un de l'autre; on peut dire  $\sin. d:\cos. d::ef:ed$ ; ensuite si on divise les deux termes du premier rapport, par *cos. d* (comme  $\sin. d:\cos. d::\tan. d:1$ ), on doit dire ( $\tan. d:1::ef:ed$ , ou  $1:\tan. d::ed:ef$ ). Cette proportion est particulière aux seuls triangles qui sont rectangles: & elle exprime que le rayon des tables est à la tangente d'un des angles aigus d'un triangle rectangle, comme le côté de l'angle droit, adjacent à cet angle aigu, est au côté qui est opposé à ce même angle. Cette analogie, comme on voit, n'est applicable que lorsqu'il n'est pas question de l'hypothénuse, parmi les parties données ou cherchées du triangle. C'est donc à ce caractère, & à celui que nous avons désigné précédemment, qu'on distingue facilement les cas où l'application de l'une ou de l'autre proportion, devient nécessaire pour la résolution d'un triangle rectangle. Ces analogies serviroient sans doute à déterminer un côté, d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés seroient donnés: mais alors il est plus commode & plus expéditif de faire usage de la propriété reconnue des triangles rectangles; savoir, que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit; ou que le carré d'un côté de l'angle droit, est la différence du carré de l'autre côté, à celui de l'hypothénuse. C'est avec tous ces moyens, appliqués convenablement, qu'on parvient;

dans

dans tous les cas, à la résolution des triangles rectangles.

Le second principe qu'on emploie dans la résolution de tout triangle rectiligne, ne sert que dans le seul cas où les trois côtés d'un triangle étant connus, on cherche la grandeur d'un des angles, tel que  $c$  (fig. 33) dans le triangle  $bce$ , ou tel que  $g$  dans le triangle  $bge$ .

Il suppose une perpendiculaire  $bd$ , abaissée du sommet d'un angle  $b$ , qui n'est pas cherché, sur le côté opposé  $ce$  du triangle  $bce$ , par exemple; & il ne fait connoître directement que la différence des deux segmens  $dc$  &  $de$  du côté  $be$ . C'est avec ces données que la longueur de l'un des segmens est déterminée, & c'est ensuite avec ce segment qu'on calcule l'angle qu'on se propose de connoître.

Soit demandé l'angle  $c$  dans le triangle  $bce$ . La proportion qui donne la différence des segmens est celle-ci: la somme des deux segmens, est à la somme des deux autres côtés du triangle, comme la différence de ceux-ci, est à celle des deux segmens; & voici la démonstration de cette analogie. Soit tracée, du point  $b$  comme centre, & avec un rayon égal au petit côté de l'angle  $b$ , la circonférence d'un cercle. Si on prolonge le côté  $eb$ , jusqu'à cette circonférence, on doit remarquer deux sécantes qui partent d'un même point hors du cercle. La première  $ea$ , est la somme des deux côtés  $be$  &  $bc$  du triangle  $ebc$ ; & sa partie extérieure  $ef$  est la différence de ces mêmes côtés. La seconde sécante  $ec$ , est la somme des segmens  $cd$  &  $de$  du côté  $ce$  dans le triangle  $bce$ ; & sa partie extérieure  $ge$  est la différence de ces mêmes segmens. Après ces préliminaires, appliquons une proposition démontrée ailleurs (114), relativement à deux sécantes placées comme celles que nous considérons ici, & faisons cette proportion,  $ec:ea:ef:eg$ ; c'est-à-dire, la somme des deux segmens est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces mêmes côtés est à celle des deux segmens.

Cette proportion, qui est démontrée pour le triangle  $bce$ , convient aussi au triangle  $bge$ , quoique la perpen-

diculaire  $bd$ , qui est abaissée, de  $b$ , sur le prolongement de  $ge$ , tombe en dehors de ce triangle. Car les segmens, sont alors  $de$  &  $dg$ , ou les distances de la perpendiculaire aux sommets des angles  $g$  &  $e$  du triangle  $bge$ . Leur somme est  $ec$ , & leur différence est  $eg$ . C'est pourquoi, lorsque les trois côtés d'un triangle sont donnés, le principe indiqué sert à déterminer, dans le triangle  $bce$ , la différence de deux segmens; & dans le triangle  $bge$ , la somme de deux segmens. Car dans le premier, la somme des segmens, qui est le côté  $ce$ , est connue; & dans le second, c'est la différence  $ge$  des deux segmens qui est donnée.

Lorsqu'on a calculé le terme inconnu de la proportion générale qui vient d'être énoncée, c'est-à-dire, la somme ou la différence des deux segmens; on réunit avec cette somme; cette différence, & la moitié du résultat devient la valeur du plus grand des deux segmens; tandis que le plus petit est égal à la moitié de la somme de ces segmens, moins la moitié de leur différence. Car deux quantités inégales sont-elles ajoutées ensemble? leur somme, si elle est augmentée de la différence de ces quantités, devient équivalente au double de la plus grande de ces quantités. C'est pourquoi, celle-ci est égale à la moitié de la somme des deux quantités, plus à la moitié de leur différence. Le même raisonnement conduit à fixer la valeur de la plus petite de ces quantités. Ainsi, après avoir calculé le terme inconnu de l'analogie générale qui constitue le second principe, on peut déterminer la grandeur du segment qui, dans le triangle proposé, est adjacent à l'angle cherché. Comme ici c'est l'angle  $c$  qui est demandé; le segment  $cd$  est celui dont on doit chercher la longueur. Ensuite, dans le triangle  $bcd$ , qui est rectangle, & qui présente deux côtés connus  $bc$  &  $cd$ , on fait cette proportion,  $1:\cos. c::bc:cd$ , dans laquelle on calcule aisément le terme  $\cosin. c$ , qui seul est inconnu.

120. C'est par un tel procédé assez tortueux qu'on parvient à connoître géométriquement un des angles d'un triangle dont les trois côtés sont connus; mais

l'algebre offre un moyen plus simple & plus direct pour arriver au même but. En effet, représentons, le côté *ce* par *d*, *cb* par *b*, *be* par *a*, le segment *dc* par *x*, & l'angle *bce*, qui est cherché, par *2e*. Le triangle *bcd* étant rectangle, on peut dire, *cos. 2e:1::x:b*, ou  $x = b \cos. 2e = b(1 - 2 \sin. e^2)$  [118]. La propriété commune des triangles rectangles, donne aussi, pour les triangles *bde* & *bdc*, les équations suivantes,  $bd^2 = a^2 - (d-x)^2$ , &  $bd^2 = b^2 - x^2$ . Donc en égalant les valeurs de  $bd^2$ , & en reduisant, on a,  $b^2 = a^2 - d^2 + 2dx$ ; & par conséquent,  $x = \frac{b^2 - a^2 + d^2}{2d}$ . Cette dernière valeur de *x*

étant égale à celle qu'on a déjà trouvée, on a  $2bd - 4bd \sin. e^2 = b^2 - a^2 + d^2$ ; équation qui revient à celle-ci  $2bd - b^2 - d^2 + a^2 = 4bd \sin. e^2$ , & par conséquent  $4bd \sin. e^2 = a^2 - (b-d)^2 = (a+b-d)(a-b+d)$ ; d'où on conclut cette proportion,  $\sin. e^2:1::(a+b-d)(a-b+d):4bd$ . Si on nomme *2s* la somme des trois côtés connus, la dernière proportion se transforme en celle-ci,  $\sin. e^2:1::(s-d)(s-b):bd$ , dans laquelle il n'y a d'inconnu que le terme  $\sin. e^2$ , & qui est composée de manière, qu'à l'aide des logarithmes, on parvient facilement à déterminer la grandeur de *e*, ou celle de l'angle cherché. L'algebre ne présente ainsi, pour cette recherche, qu'une proportion unique.

121. Le 3.<sup>e</sup> principe qui sert à la résolution des triangles rectilignes, n'a d'application que dans le seul cas, où deux côtés d'un triangle sont donnés, ainsi que l'angle formé par ces côtés. Ce principe ne conduit directement qu'à déterminer la différence des deux angles inconnus, afin qu'elle serve, avec leur somme qui est toujours le supplément de l'angle donné, à déterminer la grandeur de chacun de ces deux angles. Ensuite si le troisième côté est la partie cherchée du triangle proposé; ces derniers angles servent à les calculer à l'aide du premier principe. L'analogie qui constitue le troisième principe est celle-ci: la somme des deux côtés donnés, est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles opposés à ces côtés, est à la

tangente de la moitié de leur différence : & voici comment on la démontre. Dans le triangle  $abc$  (fig. 21), on peut dire, conformément au premier principe,  $ac:bc::\sin. b:\sin. a$ ; & par conséquent,  $(bc+ac):(bc-ac)::(\sin. a+\sin. b):(\sin. a-\sin. b)$ . Supposons actuellement que la somme des deux angles  $a$  &  $b$  soit représentée par  $2m$ , & leur différence par  $2x$ ; alors, comme  $a+b=2m$ , &  $a-b=2x$ , on en conclut que  $a=m+x$ , &  $b=m-x$ . La proposition précédente peut donc se changer en celle-ci  $(bc+ac):(bc-ac)::\sin. (m+x):\sin. (m-x)$ . Si on développe les sinus de  $(m+x)$  & de  $(m-x)$ , comme on l'a exposé précédemment [118], on parvient à cette proportion,  $(bc+ac):(bc-ac)::\sin m \cos x:\sin x \cos m$ ; & en divisant chacun des termes du dernier rapport par  $\cos m \cos x$ , ce rapport devient celui de  $\tan m:\tan x$ . En substituant, à la place de  $m$  &  $x$ , leurs valeurs, on a  $\tan m=\tan \frac{1}{2}[a+b]$ , &  $\tan x=\tan \frac{1}{2}[a-b]$ ; par conséquent enfin, on a cette proportion, qu'il falloit démontrer,  $[bc+ac]:[bc-ac]::\tan \frac{1}{2}[a+b]:\tan \frac{1}{2}[a-b]$ ; c'est-à-dire que la somme de deux cotés d'un triangle, est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles opposés à ces cotés, est à la tangente de la moitié de leur différence.

On voit par la nature des termes qui composent cette analogie, que deux cotés d'un triangle étant connus, ainsi que l'angle qu'ils forment entr'eux; on peut déterminer la demi-différence des 2 angles inconnus. Ensuite si on ajoute cette demi-différence avec la demi-somme des mêmes angles, on obtient la valeur du plus grand angle, comme en les retranchant l'une de l'autre, on détermine le plus petit de ces angles. Enfin, si aucun de ces angles n'est la quantité cherchée; & si on se propose de trouver le troisième côté de ce triangle; on y parvient en appliquant le premier principe à ce même triangle, dont on connoît alors tous les angles & deux cotés.

122. L'algebre fournit aussi, pour le même cas, une formule qui ne paroît pas plus simple, mais qui permet de déterminer un coté ou un angle, indépendamment l'un de l'autre. Soit cherché l'angle  $b$ , dans le

triangle  $acb$ , étant connus les deux cotés  $ac$ ,  $cb$ , & l'angle  $c$ . Représentons  $ac$  par  $a$ ,  $bc$  par  $p$ ,  $ba$  par  $q$ ,  $ao$  par  $y$ ,  $oc$  par  $x$ , & enfin l'angle  $c$  par  $2e$ . On peut dire, dans le triangle rectangle  $aco$ ,  $1:a::\cos.2e:x::\sin.2e:y$ ; donc  $a \cos.2e = x$ , &  $a \sin.2e = y$ . Dans le triangle rectangle  $abo$ , on peut faire cette proportion, d'après le premier principe,  $y$  ou  $a \sin.2e : [p-x]$  ou  $[p-a \cos.2e]::\tan. b:1$ ; par conséquent, toutes les quantités  $a$ ,  $p$  &  $2e$  étant données, on peut déterminer la tangente de  $b$ , comme étant un terme d'une proportion, dont les trois autres termes sont connus.

Si le côté  $ba$ , que nous nommons  $q$ , est la quantité cherchée, alors on considère le triangle rectangle  $abo$ , dont la propriété est que  $q^2 = y^2 + [p-x]^2 = a^2 \sin.2e^2 + p^2 - 2pa \cos.2e + a^2 \cos.2e^2$ , donc  $q^2 = a^2 + p^2 - 2pa \cos.2e = [a-p]^2 + 4pa \sin.e^2$ ; c'est-à-dire que pour déterminer le carré du côté cherché, il faut prendre le carré de la différence des deux côtés connus, & l'ajouter au produit du double de ces mêmes côtés, multiplié par le carré du sinus de la moitié de l'angle donné. La racine carrée de cette somme est alors le côté cherché.

Tels sont les principes qui seuls sont nécessaires pour la résolution des triangles rectilignes quelconques. Les applications à la marine en sont fréquentes, & quoique nous nous réservions de présenter, dans le cours de cet ouvrage, toutes celles qui seront amenées par la succession des matières, nous allons néanmoins en donner quelques exemples.

123. Nous observerons à cet égard, qu'ayant déjà fait connoître comment on doit calculer, soit par des nombres, soit par des logarithmes, un terme d'une proportion, dont les trois autres termes sont donnés, nous ne ferons qu'indiquer, dans les exemples suivans, les proportions qui conviennent à la solution des questions proposées, sans nous appesantir sur les détails matériels des opérations.

123. Nous avons exposé (116), que pour tracer sur le papier le plan d'une portion de côte, on doit mesurer une base  $ab$ , ainsi que les angles formés par cette

base, avec les rayons visuels menés, de ses deux extrémités, aux divers points qui doivent être représentés sur ce plan. Ces mêmes mesures, qui toujours doivent être faites avec exactitude, peuvent aussi servir à calculer, soit les distances de ces mêmes points principaux à chaque extrémité de la base  $ab$ , soit encore leurs distances respectives..

Demande-t-on, par exemple, la distance du point  $b$ , à l'île B, qui est placée à l'entrée du havre? comme on connoît, dans le triangle  $abB$ , par des mesures prises sur les lieux, & le côté  $ab$ , & les angles  $abB$ ,  $baB$ , on en conclut  $bBa$ . Alors on applique le premier principe à ce triangle, en disant  $\sin. B : ab :: \sin. a : bB$ , & on détermine aisément le seul terme  $bB$ , qui dans cette proportion est inconnu, ou la distance de  $b$  à l'île B. On calcule aussi, par une analogie pareille, la distance de B au point  $a$ .

Si on demande la grandeur de l'ouverture de ce havre, on calcule, dans les triangles  $bca$  &  $bda$ , successivement [& comme on vient de l'exposer] les distances  $bd$  &  $be$ . On détermine aussi la mesure de l'angle  $dbe$ , en cherchant la différence des angles mesurés  $dba$  &  $eba$ . Alors, connoissant, dans le triangle  $bde$ , les deux côtés  $bd$ ,  $be$ , & l'angle compris  $dbe$ ; on cherche  $de$  en appliquant le troisieme principe, & les regles indiquées, du calcul qui convient à la circonstance. Ainsi on fait d'abord cette proportion; la somme des deux distances calculées  $db$  &  $be$ , est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles  $d$  &  $e$ , est à la tangente de la moitié de leur différence. Ayant trouvé cette demi-différence des angles  $d$  &  $e$ , on l'ajoute à leur demi-somme; & ce résultat est la valeur de l'angle  $d$  [si le côté  $be$  est plus grand que  $bd$ ]. Enfin on fait cette proportion,  $\sin. d : be :: \sin. b : de$ , dans laquelle l'ouverture  $de$  est le seul terme inconnu.

Quelquefois, privé d'instrumens propres à mesurer des angles avec précision, on ne peut qu'apprécier exactement la longueur des trois côtés  $bd$ ,  $de$  &  $be$ , & prendre, du seul point  $b$ , des angles de relevemens. Alors si on se propose de savoir quel est l'angle formé par les côtés



*bd* & *de*, pour en conclure le gissement de *de*: on imagine une perpendiculaire abaissée de *e* sur *db*, dans le triangle *bde*. On applique le second principe, & on trouve la différence des segmens du côté *bd*, en cherchant le 4.<sup>e</sup> terme de cette proportion; la somme des deux segmens *bt* & *td*, est à la somme des deux côtés *be* & *ed*, comme la différence de ceux-ci, est à celle des segmens. On retranche ensuite la moitié de la différence de ces segmens de la moitié de leur somme; & on obtient le segment qui est adjacent à l'angle *d*, s'il est le plus petit; c'est-à-dire, si *de* est inférieur à *be*. Enfin, dans le triangle rectangle *tde*, la proportion (*de*:1::*dt*:*cos. tde*) fait connoître l'angle *bde* qui est cherché. Alors une simple soustraction ou une addition suffit pour déterminer le gissement de *de*, en supposant, qu'on ait fait, du point *b*, le relèvement du point *d*, ou qu'on ait mesuré l'angle que forme la lig. *bd*, avec la direction de l'aimant. En effet, supposons l'angle *bde* de 68 degr. & les points *b* & *d* relevés NE & SO; ou supposons que l'air de vent, dirigé de *b* en *d*, soit le NE, & fasse par conséquent un angle de 45 degrés, avec la ligne nord & sud: la ligne *de* doit faire nécessairement un angle de 23 degrés, du côté du sud, avec la direction de l'aimant; c'est-à-dire que le gissement des points *d* & *e*, ou de la ligne *de*, est le SSE 45 minutes E.

C'est sur le terrain qu'ont été prises les mesures, & de *ab*, & des angles que forment avec cette base, les rayons visuels menés des extrémités de cette base à divers points éloignés: mais les circonstances ne permettent pas toujours aux navigateurs de descendre sur le rivage, pour faire des observations. C'est pourquoi, dans les occasions fréquentes, où il devient nécessaire, pour les besoins du moment, comme pour la perfection & l'extension des cartes marines, de déterminer des positions, des gissemens & des distances, il faut employer des moyens qui soient propres à remplir ces vues, & qu'on puisse même appliquer sans que les navigateurs cessent de suivre une route, qui est commencée & dirigée nécessairement vers d'autres lieux.

Supposons qu'un navigateur, étant en mer, sur un

vaisseau qui s'avance dans l'espace avec une vitesse uniforme, se propose de déterminer sa distance instantanée à un objet fixe  $z$ , qui est sous ses yeux [fig. 88. G]. Au moment où il est parvenu au point  $b$  de la route  $abcm$ , il doit mesurer l'angle  $zbc$ , qui est formé par le rayon visuel  $bz$ , & par la direction de la route  $abm$ ; ou bien il doit relever à la boussole l'objet  $z$ . Ensuite, pendant la marche continuée du vaisseau depuis le point  $b$  jusqu'au point  $c$ , il doit mesurer avec soin la longueur du chemin  $bc$ : & enfin, arrivé en un point  $c$ , il doit relever de nouveau le même point  $z$ , ou mesurer l'angle  $zcb$ . [Remarquons que la grandeur de  $bc$  doit être à-peu-près le dixième de la distance qui est à déterminer]. Après ces opérations, il considère le triangle  $bzc$ , dans lequel il connoît le côté  $bc$  & les angles  $zbc, zcb$ . Il peut donc conclure de ces données, la valeur de  $bz$  (parce que d'ailleurs la grandeur de l'angle  $z$  doit être connue, comme étant le supplément des deux angles mesurés  $b$  &  $c$ ), en faisant cette proportion  $bz:\sin.c::bc:\sin.z$ , qui n'offre d'autre terme inconnu que  $bz$ . Il détermine ainsi la distance cherchée, à laquelle le vaisseau étoit éloigné du point  $z$ , lorsque sa vitesse l'avoit porté au point  $b$  de sa route.

Ces mesures & ces calculs, qu'on exécute facilement à l'aide des logarithmes, peuvent ainsi conduire à connoître la distance d'un vaisseau qui fait route, à un objet qui est sur son horizon. Mais si les mesures des angles sont prises à la boussole, par des relevemens; les résultats des calculs ne sont pas susceptibles d'une grande précision, parce que la rose a des divisions bien petites sur sa circonférence, & parce qu'elle est sans cesse en agitation. C'est pourquoi lorsqu'on désire apporter une grande exactitude dans ces opérations, il faut mesurer les angles, à l'aide des autres instrumens dont on a parlé (99), ou dont nous parlerons ci-après, en traitant de l'astronomie de l'homme de mer.

S'agit-il de déterminer en mer, soit la distance de deux îles, ou de deux caps, soit la longueur d'une île, ou l'étendue d'une cote; pendant qu'on fait route sur un vaisseau, qui passe à la vue de ces objets? Soit  $acb$

(fig. 34) la direction de la route du vaisseau, & *ad* la distance cherchée des points *a* & *d*. arrivé en *c*, l'observateur doit relever ces deux points à la boussole, ou mesurer les angles *acb* & *dcb*. Parvenu en *b*, il doit relever de nouveau les mêmes points, ou mesurer les angles *abc* & *dbc*. Le chemin *cb*, qui est fait par le bâtiment, & avec une vitesse supposée uniforme, pendant l'intervalle des observations, doit aussi être estimé avec le plus grand soin. Alors, dans le triangle *abc*, connoissant les deux angles *b* & *c*, ainsi que le côté compris *bc*, on peut calculer, comme dans l'exemple qui précède, le côté *ac*. De même, dans le triangle *dbc* (dont un côté *bc* est connu & les angles adjacens), on peut calculer le côté *cd* par un pareil procédé. Ainsi, par ce moyen, on peut déterminer, dans le triangle *acd*, les deux côtés *ac* & *cd*. On y connoît d'ailleurs l'angle *acd*, qui est la différence des angles observés *dcb* & *acb*. On applique alors à ce triangle le troisieme principe; on fait les proportions & les calculs qui ont été présentés dans le premier des exemples précédens; & on parvient enfin à conclure la valeur du côté *ad*; c'est-à-dire, la distance de deux points, qui peuvent être, ou deux îles, ou deux caps, ou les extrémités d'une côte, ou celles d'une île, &c.

Remarquons que la solution d'une telle question, qui embrasse, & celle de mesurer la distance d'un vaisseau à une pointe de terre, dont les relevemens ont été observés; & celle de déterminer, non seulement la distance de deux objets éloignés, mais aussi leur gissement respectif; est aussi utile que nécessaire, pour déterminer fréquemment, ou vérifier la position de certains points de la surface des mers, lorsqu'on connoît d'ailleurs celle du vaisseau sur lequel sont faites les opérations indiquées.

Supposons qu'en faisant route, à la vue par exemple, du Pic-de-Ténériffe, qui se montre aux limites de l'horizon; on veuille déterminer, & la hauteur & la distance de cette montagne. Avant de résoudre ce problème, il devient à-propos de présenter quelques idées accessoires & utiles. Représentons par *ABD* (fig. 35) une

portion de la circonférence d'un grand cercle du globe, qu'on suppose passer par le centre  $q$  de la base du Pic  $zux$ , & par le point  $b$ , qu'on suppose être le lieu du vaisseau, ou de l'observateur: & imaginons une ligne  $sbc$ , qui soit tangente à cet arc au point  $b$ . Cette tangente est nommée une ligne horizontale, parce qu'elle est perpendiculaire à l'extrémité, du rayon de la terre mené au même point  $b$ . La direction de cette ligne est aussi celle du niveau des eaux de la mer en  $b$ . Si enfin, de ce dernier point, on suppose plusieurs autres lignes dirigées de divers côtés, qui soient toutes perpendiculaires à l'extrémité du même rayon  $db$ ; & qu'on imagine un plan qui passe par toutes ces tangentes: un tel plan, qui est alors lui même tangent à la surface de la mer en  $b$ , reçoit le nom de plan horizontal; & il est l'horison du point  $b$ . Il sépare tous les objets qui sont visibles pour le point  $b$ , de tous ceux qui ne peuvent être apperçus de ce même point. Car on juge aisément que la rondeur de la terre doit cacher aux yeux de l'observateur, tout ce qui est placé au dessous d'un tel plan.

Après avoir présenté les définitions nécessaires, & d'une ligne horizontale, & de l'horison d'un lieu; examinons comment on peut résoudre la question proposée, ou comment on peut mesurer en mer la hauteur & la distance d'une montagne, vue dans le lointain, & telle, par exemple, que le Pic de Ténériffe.

On détermine la distance, du sommet du Pic, au lieu de l'observation, en suivant le même procédé auquel on s'est conformé dans l'exemple précédent. Pendant que le vaisseau fait la route  $cb$ , (fig. 34) dont la longueur doit être mesurée avec soin, on prend, aux points  $b$  &  $c$ , des relevemens du sommet  $P$  du Pic; ou on mesure directement, avec un bon instrument, les angles  $Pcb$  &  $Pbc$ . On doit aussi, lorsque le vaisseau est au point  $b$ , mesurer avec un instrument convenable, (en supposant que la ligne  $ca$  soit horizontale), la grandeur de l'angle  $Pca$ , c'est-à-dire, la hauteur apparente & angulaire du sommet du Pic au-dessus de l'horison de l'observateur. Alors, dans le triangle  $Pbc$ , on connoît deux angles & le côté compris: on

peut donc calculer la distance  $bP$ , en faisant cette proportion,  $\sin.P:bc::\sin.c:Pb$ , où le seul terme inconnu est la distance cherchée du sommet du Pic au point  $b$ .

Après avoir isolé les objets de ces opérations; il est à-propos de les présenter dans leur lieu naturel. Il faut les voir sur le contour du globe. Ainsi, considérons l'observateur au point  $b$  de cette surface, & le Pic occupant par sa base l'espace  $zn$ , en même tems qu'il s'élève de la hauteur  $iu$ , au-dessus de l'horizon  $sbc$  de l'observateur.

Dans le triangle  $ubd$ , on connoît le côté  $ub$  (qui a été calculé [fig. 34], puisqu'il est le même que  $Pb$ ), & le côté  $bd$ , qui est le rayon de la terre dont  $d$  est supposé le centre. L'angle compris  $ubd$  est connu aussi, car il est la somme de la hauteur mesurée  $ubs$ , & de l'angle  $sbd$  qui est droit. Alors, dans ce triangle  $ubd$ , on peut calculer le côté  $du$ , en faisant l'application, & d'un principe, & des opérations subséquentes, qui ont été exposés précédemment. Enfin, la différence du côté  $ud$  au rayon de la terre, est la hauteur  $uq$  du Pic, au-dessus du niveau de la mer.

Si en outre de la distance directe & déjà trouvée du vaisseau en  $b$  au sommet du Pic, on désiroit connoître le chemin réel  $qb$ , qui sépare le point  $b$ , du centre de la base du Pic; ce chemin a pour longueur celle de l'arc  $qb$ , ou de la mesure de l'angle  $udb$ . C'est pourquoi, on doit, pour la déterminer, calculer l'angle  $bdu$ , dans le même triangle  $ubd$ , & avec les mêmes données. On convertit ensuite en lieues, les degrés qui lui servent de mesure [à raison de 20 lieues au degré], parce que l'arc  $bq$  est une partie de la circonférence d'un grand cercle du globe; & par ce moyen, la distance circulaire  $bq$  est évaluée en lieues marines.

Le tableau de ces opérations, présente également celles qui seroient à faire sur le terrain; si d'un lieu fixe, on se proposoit de juger, la hauteur d'une montagne  $P$ , & sa distance. Il faudroit mesurer à terre une base  $bc$  (fig. 34), qui seroit dirigée à-peu-près perpendiculairement, au rayon visuel mené d'un point de cette base, au sommet  $P$  de la montagne. Il faudroit

aussi mesurer les angles  $Pbc$  &  $Pcb$ , ainsi que la hauteur angulaire  $Pba$ . Ensuite on calculeroit, comme ci-dessus, la distance directe  $Pb$ , & on concluroit enfin, de toutes ces données, la hauteur  $uq$  (fig. 35) de cette montagne, en cherchant le côté  $ud$ , dans le triangle  $ubd$ .

Remarquons actuellement que jamais en mer, un navigateur qui observe des angles, ou qui fait des relevemens, ne peut avoir l'œil au niveau de l'eau en  $b$ ; & que, sur un vaisseau, il est toujours placé au-dessus de la ligne horizontale  $bs$ , à une hauteur  $ba$ , qui varie avec celle des lieux d'observation tels que, le pont, ou le gaillard, ou la dunette, ou les mâts, ou les œuvres mortes au-dessus de la surface de la mer. Alors ce n'est plus le plan tangent en  $b$ , ou  $sbc$ , qui est l'horizon de l'observateur; c'est la ligne  $af$ , tangente en  $y$ , qui représente la ligne suivant laquelle il vise à l'extrémité de son horizon. La hauteur angulaire & apparente de  $P$ , ne doit donc être pour lui que la mesure de l'angle  $uaf$ . Il reste donc à chercher l'angle  $fad$  ou  $yad$ , pour calculer  $ud$  dans le triangle  $uad$ , par le même procédé employé précédemment. Dans le triangle rectangle  $yad$ , on peut déterminer la grandeur de l'angle  $fad$ : car on y connoît le côté  $yd$ , qui est le rayon de la terre; & le côté  $ad$ , qui est la somme de ce même rayon & de l'élévation de l'œil au dessus du niveau de la mer: & on trouve cet angle en faisant cette proportion,  $\sin.fad:yd::1:abd$ , dont le terme  $\sin.fad$  est seul inconnu.

Si ce dernier angle est ajouté avec la hauteur angulaire du pic, ou à l'angle  $uaf$ ; la somme, est la valeur de l'angle  $uad$ . On voit aussi que la distance  $ua$  peut, dans cette nouvelle situation de l'observateur, être calculée comme  $ub$  l'a été précédemment. Par conséquent, avec ces données, on peut, par un même calcul déjà indiqué, obtenir la grandeur de  $ud$ , dans le triangle  $uad$ , & en conclure sa différence avec le rayon de la terre, c'est-à-dire, la hauteur cherchée de la montagne.

Si on désiroit savoir, d'après la hauteur connue de  $P$ , ou d'une terre quelconque, quelle est la distance

à laquelle son sommet doit commencer à paroître sur un horifon; les mêmes triangles feroient à répondre à cette question. Soit fupposé que l'obfervateur eft en  $a$ , & que son horifon eft  $af$ . Si le prolongement  $Af$  du rayon  $dA$ , eft égal à la hauteur du pic; la longueur de la ligne  $af$  eft la diftance directe du point  $a$ , au point où le sommet de ce pic fe montre fur l'horifon du point  $a$ ; & il faut la chercher dans le triangle  $adf$ . Les deux côtés  $ad$  &  $fd$  font connus; puifque l'un eft la fomme du rayon de la terre, ajouté à l'élévation de l'œil au-deffus du niveau de la mer; & l'autre eft la fomme du même rayon ajouté à la hauteur connue  $fA$  de la montagne fupposée. L'angle  $fad$  peut d'ailleurs être calculé, comme on l'a dit plus haut, dans le triangle  $yad$ : c'eft pourquoi on doit, pour trouver  $fa$ , faire d'abord cette proportion,  $fd:\sin.a::ad:\sin.f$ . Elle fert à déterminer l'angle  $f$ , & en faifant enfuite celle-ci,  $fa:\sin.d::fd:\sin.a$ , on détermine  $fa$  qui en eft le feul terme inconnu. C'eft ainfi qu'on peut calculer la diftance directe de laquelle le sommet P doit être éloigné du point  $a$ , pour paroître à l'horifon de ce même point  $a$ . Si l'arc  $bA$  eft cherché, comme exprimant le chemin qu'il faudroit faire du point  $b$ , pour arriver au centre de la bafe de P; alors il ne s'agit plus de calculer  $fa$ , mais la mefure de l'angle  $adf$ , qu'on peut calculer dans la triangle  $adf$ . Cette mefure étant connue en degrés, on la réduit en lieues, à raifon de 20 lieues au degré, & on obtient enfin la longueur de l'arc  $byA$ , qui eft la diftance de  $b$  au centre de P, mefurée fur la furface du globe.

Remarquons que le complément de l'angle  $yad$  (de ce triangle qui eft formé par  $ad$ , & par une ligne menée du point  $a$ , où eft fupposé l'œil de l'obfervateur, tangentielllement au globe en  $y$ ) eft nommé l'inclinaifon de l'horifon de la mer. Il eft égal à l'angle  $ady$ : fa grandeur dépend de l'élévation de l'œil de l'obfervateur; & on le calcule par cette proportion;  $ad:1::yd:\sin.a$ ; dans laquelle  $\sin.a$ , ou le cofinus de l'inclinaifon de l'horifon de la mer, eft le feul terme qui foit inconnu. C'eft en fupposant à  $ba$  différentes valeurs, de-

puis un pied jusqu'à 225, qu'on a formé une table qui présente la grandeur de l'angle d'inclinaison de l'horizon, pour les positions les plus ordinaires, dans lesquelles sont placés les navigateurs qui observent en mer.

Remarquons aussi que si on compare, par exemple, le point *b* qui est à la surface de la mer, avec un objet *o* qui est placé comme lui sur une même ligne horizontale *cbos*; la distance du premier au centre de la terre *d*, est plus petite que celle du second; & la différence *qo* est nommée la différence de niveau de ces deux objets: parce que deux points ne sont de niveau, que lorsqu'ils sont tous deux à égale distance du centre de la terre. Cette différence *oq* peut aisément être calculée, en supposant que la distance, des deux points comparés *o* & *q*, ait été mesurée, & soit exactement connue. En effet, dans le triangle rectangle *obd*, on connoît *bd*, qui est le rayon de la terre, & *bo* qui est la distance donnée du point *b* au point *o*. La somme des quarrés de ces deux côtés vaut donc le quarré de *od*, & sa racine diminuée du rayon de la terre, est la différence de niveau *oq*. Cette même ligne *oq* peut être aussi déterminée d'une autre manière. On peut supposer la ligne *od* prolongée jusqu'à la circonférence au-delà du centre *d*; alors on auroit une sécante (*oq*+*2qd*) & une tangente *ob*, qui seroient menées d'un point commun *o*, à une même circonférence. C'est pourquoi, en appliquant ici ce qui a été démontré (114) relativement à des lignes ainsi placées, on peut faire la proportion  $oq+2qd:ob::ob:oq$ ; c'est-à-dire que  $oq^2+2oq.qd=ob^2$ . Si on ajoute le quarré  $qd^2$  aux deux membres, on a  $(oq+qd)^2=ob^2+qd^2$ ; par conséquent  $oq=(ob^2+qd^2)^{\frac{1}{2}}-qd$ . Il faut donc, pour déterminer *oq* ou la différence de niveau de des points *a* & *b*, prendre la somme des quarrés séparés, de la distance du point *b* au point *o*, & du rayon de la terre; extraire la racine de cette somme, en retrancher le rayon de la terre, & le reste est alors la quantité cherchée *oq*. C'est ainsi que *oq* doit être calculé à la rigueur; mais des considérations fondées permettent de simplifier cette opération. Car on



peut juger , par la grandeur du diametre de la terre , qui est de 39223000 pieds , combien il est supérieur à une ligne telle que  $oq$  (en supposant que  $oq$  soit un objet visible sur l'horison de  $b$ ) ; & combien la somme de ces deux quantités doit peu différer du diametre de la terre. C'est pourquoi on peut , sans erreur sensible , changer la proportion précédente en celle-ci , [ $2qd:ob::ob:oq$ ] , qui ne présente qu'un seul terme inconnu dans  $oq$  , ou dans la différence de niveau qui est cherchée.

L'application de ces dernieres idées est fréquente , & on peut en juger par l'exemple suivant. si on a observé du point  $b$  , la hauteur angulaire du point  $u$  , & qu'on soit parvenu à déterminer la partie  $uo$  de la hauteur totale  $uq$  d'une montagne  $zux$  , qui n'est pas , dans son entier , visible du point  $b$  ; alors la ligne  $oq$  est celle dont il faut connoître la longueur pour en composer avec  $uo$  la hauteur totale de la montagne ; & cette hauteur  $oq$  , est le résultat du calcul précédent. La différence de niveau est donc toujours utile à connoître , pour que la hauteur réelle des objets , au-dessus de la surface du globe , puisse être conclue de la hauteur qu'ils paroissent avoir au-dessus d'une ligne qui est horizontale & tangente au globe.

## ARTICLE SECON D.

### *Des plans & des surfaces planes.*

124. UN plan , comme on l'a déjà dit (91) , est une portion de l'espace , dont l'étendue , soit en longueur , soit en largeur est indéfinie ; dont l'épaisseur est infiniment petite , & qu'une ligne droite doit toucher par tous ses points , lorsqu'elle lui est appliquée , dans quelque sens que ce puisse être. Tel est  $dabc$  (fig. 2). Si dans ce plan , on mène des lignes droites , qui embrassent , terminent , ou circonserivent un espace  $obp$  : cet espace ainsi limité , est une surface plane , dont la grandeur ou l'étendue n'est sensible que dans deux sens , c'est-à-dire , en longueur & en largeur. Car son

épaisseur, ainsi que celle du plan  $db$ , est considérée comme nulle, ou comme infiniment petite.

C'est dans ce dernier état, que sont considérées toutes les surfaces dont il est question dans la section présente; & ces portions de l'espace, que l'esprit semble isoler, & détacher des contours extérieurs des corps, pour les analyser, les mesurer, & les comparer plus aisément, sont imaginées étendues sur des plans. Ainsi, la position de ces surfaces, soit à l'égard d'autres surfaces, soit à l'égard des lignes droites qui les rencontrent ou qui les traversent, doit être déterminée par les situations respectives des plans dans lesquels elles sont placées, ou par celles des lignes droites à l'égard de ces mêmes plans. C'est pourquoi, du point  $i$ , placé au-dessus du plan  $db$ , si on imagine une ligne  $iu$ , qui vienne rencontrer la surface  $opq$  en  $u$ , l'angle qu'elle forme avec cette surface, est le même que celui de son inclination sur le plan  $db$ . Une ligne droite est-elle appliquée; dans tous les sens, sur la figure  $oqp$ , & touche-t-elle sa surface par plusieurs points de sa longueur? la figure supposée est nécessairement plane.

Ainsi, dans un chantier de construction, les charpentiers veulent-ils établir dans un même plan les faces latérales des pièces qui composent un membre de vaisseau? ils placent ces pièces horizontalement & à la suite les unes des autres (fig. 52. G). Soient ces pièces représentées par  $duc$ ,  $ag$ ,  $fi$ ,  $hl$ ,  $kq$ ,  $ps$ ,  $ru$ . Après avoir mis parfaitement de niveau la face  $dznca$  de la varangue, ils tendent des cordeaux en différens sens sur les faces, soit de cette varangue, soit des diverses alonges; & lorsque ces cordeaux paroissent s'appliquer exactement sur elles, ils regardent toutes les faces de ces parties d'un même couple, comme étant dans un seul & même plan.

Veulent-ils aussi marquer, sur les lisses d'un vaisseau (fig. 37), dont les couples de levée sont déjà établis, le lieu de plusieurs points du contour d'un couple de remplissage? ils tendent des cordeaux, par des points indiqués d'avance sur la lisse du fort & sur la quille,

comme

comme devant appartenir au contour de ce couple ; alors ils font glisser ces cordeaux les uns sur les autres, de manière qu'ils ne cessent de toucher deux cordeaux qui passent par les points donnés ; & ils obtiennent ainsi sur chaque lifse, les points où chacune est coupée par le contour du couple de remplissage proposé.

125. Nous avons développé précédemment, toutes les situations que des lignes sont susceptibles d'avoir entr'elles : nous avons présenté la mesure de tous les angles rectilignes ; & pour compléter tout ce qui est relatif à ces mêmes lignes, il faut actuellement considérer les angles qu'elles peuvent former avec des plans, ou avec des surfaces planes. Nous examinerons ensuite comment on doit mesurer les angles qu'un plan fait avec un autre plan ; c'est-à-dire, les angles plans : & enfin nous nous occupons de la mesure, ainsi que des rapports, de toutes les surfaces planes.

126. *Angles des lignes droites avec des plans.* Les définitions précédentes annoncent assez, qu'une ligne droite qui n'est pas appliquée ou couchée sur un plan, ne peut avoir avec lui qu'un seul point commun ; & une telle ligne est alors, ou oblique, ou perpendiculaire à ce même plan. Elle lui est perpendiculaire, si de tous côtés elle lui est également inclinée. Soit  $ao$  (fig. 36) une ligne droite perpendiculaire au plan  $BCDE$  : elle est placée de manière que si on prend pour centre le point  $o$ , où elle rencontre le plan ; & qu'on décrive une circonférence sur ce plan ; tous les points de cette ligne  $ao$ , sont également éloignés de ceux de la circonférence tracée. Car comparons le point  $a$  avec deux points  $i$  &  $z$  de cette circonférence, & soient menés les rayons  $oi$  &  $oz$  ; ainsi que les lignes  $ai$  &  $az$ . On forme par cette construction, des triangles  $aoi$  &  $aoz$  qui sont égaux, comme avant 1° un côté commun  $ao$  ; 2° deux côtés  $oi$  &  $oz$ , qui sont égaux comme rayons d'un même cercle ; & 3° enfin, l'angle compris  $aoi$  égal à l'angle compris  $aoz$ , parce que la ligne  $ao$  se suppose n'être pas plus inclinée vers  $oi$  que vers  $oz$ . L'égalité ainsi démontrée de ces triangles, entraîne celle des côtés  $ai$  &  $az$  : donc le point  $a$  de cette ligne  $ao$  est

également éloigné des deux points de la circonférence  $izm$  : & le même raisonnement conduiroit à conclure qu'il est également distant de tous les points de cette courbe.

Une conséquence qui résulte de cette proposition est que cette ligne  $ao$  a tous ses points également éloignés des extrémités d'un diamètre quelconque  $im$  de ce cercle ; ou qu'elle est perpendiculaire à toutes les lignes qui peuvent être menées sur ce plan , par le point  $o$  qui est le pied de cette perpendiculaire.

Si une ligne, telle que  $ai$  (fig. 36), est oblique à un plan  $BC$  ; on doit remarquer qu'elle n'est pas également inclinée , à l'égard de diverses parties de ce plan , c'est-à-dire qu'elle fait des angles différemment grands , avec les diverses lignes qui peuvent être tracées par le point  $i$  sur ce plan. En effet , du sommet  $a$  de cette oblique, soit abaissée sur le plan  $BC$  une perpendiculaire  $ao$  ; soit décrite , du point  $o$  comme centre , & sur ce plan , une circonférence qui passe par le point  $i$  ; soit mené le rayon  $oi$  , ou une ligne qui réunisse , sur le plan , le pied de l'oblique  $ai$  & celui de la perpendiculaire  $ao$  ; enfin soit menée en  $i$  une ligne  $bc$  , qui soit perpendiculaire au rayon  $oi$  ; alors cette ligne  $ai$  , qui est oblique au plan , est cependant perpendiculaire à la ligne  $bc$ . Car si on fait la partie  $ib$  égale à la partie  $ic$  , & qu'on mène les lignes  $bo$  ,  $ba$  ,  $co$  ,  $ca$  ; on forme des triangles  $abo$  &  $aco$  qui sont égaux : parce que les côtés  $ob$  &  $oc$  sont égaux , comme des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire  $oi$  ; parce que le côté  $oa$  , est commun ; & parce que les angles  $aob$  &  $aoc$  sont chacun de 90 degrés. Les côtés  $ab$  &  $ac$  de ces deux triangles sont donc égaux ; & comme le point  $i$  est supposé à même distance des points  $b$  &  $c$  ; la ligne  $ia$  a deux points  $i$  &  $a$  également éloignés des points  $b$  &  $c$ . Elle est donc perpendiculaire à  $bc$ . Elle est donc , comme on l'a annoncé , différemment inclinée aux divers côtés du plan  $BC$ .

On vient de démontrer que la ligne  $bc$  étant perpendiculaire sur  $io$  , l'est aussi sur  $ia$  ; & on démontreroit de même que si la ligne  $bc$  fait des angles droits avec

*ia*, elle est aussi perpendiculaire sur *io*. Car dans cette supposition, le point *a* est également éloigné des points *b* & *c*, & ceux-ci doivent être à égale distance du point *o*, à cause de l'égalité des triangles *aco* & *abo*: ainsi la ligne *ic* étant égale à *bi* & perpendiculaire à *ia*, la ligne *io* doit être perpendiculaire sur *bc*.

Tous les angles que l'oblique *ai* fait avec diverses lignes menées par le point *i* dans le plan *BC*, étant différens les uns des autres; quel peut donc être celui qui représente l'inclinaison de la ligne *ai* sur le plan *BC*. C'est sans doute celui de tous ces angles qui est le plus petit; & c'est *aio*, ou celui que forme cette oblique avec la ligne qui, tracée dans le plan, réunit le pied de l'oblique avec celui d'une perpendiculaire abaissée d'un point de *ai*, sur le plan *BC*. On peut présumer d'avance que cet angle *aio* est le plus petit de ces angles, puisque la ligne *ai*, qui est supposée faire avec *io* un angle aigu, doit former avec des lignes (menées de *i* dans l'ouverture des angles *cio* ou *bio*), des angles dont la grandeur augmente progressivement, à mesure que ces lignes sont plus rapprochées de *bc*, pour devenir de 90 degrés, lorsque ces mêmes lignes se confondent avec *bc*. On peut cependant le démontrer directement. Comparons l'angle *aim* avec l'angle *iaz*, en supposant une corde *iz* menée du point *i*, dans le cercle tracé du point *o* comme centre. Si d'un autre point *a* comme centre, & avec un rayon *az*, on trace la mesure de l'angle *iaz*, elle seroit évidemment plus petite que celle de l'angle *iam*, tracée du même point pour centre, & avec le même rayon *am* ou *az*; puisque les cordes *iz* & *im* des arcs qui serviroient de mesures à ces angles, ont entr'elles une inégalité qui annonce l'infériorité de l'angle *iaz*, à l'égard de *iam*. Les cordes sont chacune le double du sinus de la moitié de l'angle, qui a son sommet en *a*: par conséquent les angles *iaz* & *azi*, qui sont égaux entr'eux, comme opposés à des côtés égaux, sont plus grands que les angles *aim* & *ami*, dont l'égalité est aussi fondée sur celle des côtés opposés. Il est donc démontré que de tous les angles que forme la ligne *ai*, avec les lignes

qu'on peut mener dans le plan  $bc$  par le point  $i$ , le plus petit est celui qu'elle fait, avec la ligne  $io$  qui réunit le pied  $i$  de cette oblique, & celui d'une ligne abaissée perpendiculairement sur ce plan, d'un point quelconque de cette même oblique. La mesure de l'inclinaison d'une ligne à l'égard d'un plan, doit donc être prise comme celle d'un angle rectiligne.

Il résulte des mêmes considérations, que si la ligne  $ai$  étoit couchée sur le plan  $BC$ , & sur la ligne  $io$ , les angles intermédiaires, qui sont formés par cette lig. & par toutes celles qu'on peut supposer menées, du point  $i$ , dans ce plan, entre les lignes  $io$  &  $ic$ , varieroient depuis 90 degrés jusqu'à 0 degré. Mais la ligne  $ai$  étant supposée se relever au-dessus du plan, pour prendre la position que présente la figure, tous ces angles intermédiaires ne peuvent plus varier, que depuis 90 degrés jusqu'à la différence qui regne entre la valeur de l'angle  $aio$  & 90 degrés : de sorte que l'angle  $aio$  étant supposé de 90 degrés, tous les angles intermédiaires doivent avoir la même valeur, & être autant d'angles d'angles droits. Il suffit donc que la ligne  $ai$  soit perpendiculaire à deux lignes  $bc$  &  $io$ , tracées par son pied  $i$ , dans un plan, pour qu'elle soit en même tems perpendiculaire à toute autre ligne menée par son pied dans ce même plan; c'est-à-dire, pour qu'elle soit perpendiculaire au plan. Donc, si on propose d'élever au point  $i$  une ligne qui soit perpendiculaire au plan  $BC$ ; il faut mener deux lignes telles que  $bc$  &  $im$ , par le point  $i$  donné dans ce même plan : & une ligne élevée en  $i$  perpendiculairement aux deux lignes dernières, est la perpendiculaire demandée.

Supposons qu'un plan, tel que  $BC$ , traverse une ligne  $ax$ , & la coupe au point  $o$ . Supposons aussi qu'on demande qu'un tel plan soit placé de manière, que la ligne  $ax$  lui soit perpendiculaire; voici le procédé qu'on doit suivre. On prend, au-dessous de ce plan, sur la ligne donnée, un portion  $ox$  égale à la partie  $oa$ , qui est au-dessus de ce même plan. On décrit du point  $o$  comme centre, dans le plan donné, un cercle  $ixmq$ ; & rendant égales entr'elles les distances des deux points

$a$  &  $x$  à deux points  $i$  &  $z$  de ce cercle, la ligne  $ax$  doit devenir, par cette opération, perpendiculaire au plan  $BC$ . On le démontre, en faisant voir qu'elle est perpendiculaire en même tems, aux deux lignes  $oi$  &  $oz$ , ou aux diamètres  $im$  &  $qz$ . En menant des points  $a$  &  $x$ , des lignes droites dirigées aux points  $i$ ,  $z$ ,  $m$ ,  $q$ , on forme des triangles  $qox$  &  $aoz$ , qui sont égaux, parce qu'il y a égalité, entre  $ao$  &  $ox$ , ainsi qu'entre  $oq$  &  $oz$ , & entre les angles  $aoz$  &  $qoz$  qui sont opposés au sommet. La distance  $az$  est donc égale à  $qx$ . On démontreroit de même l'égalité de  $mx$  & de  $ia$ . D'ailleurs, les lignes  $az$  &  $ai$  étant égales, il faut que  $qx$  &  $mx$  soient égales entr'elles, ainsi qu'aux lignes  $xi$  &  $xz$ ; c'est-à-dire que la ligne  $aox$  est perpendiculaire sur les deux lignes  $im$  &  $qz$ , puisque deux de ses points  $o$  &  $z$  sont également éloignés de leurs extrémités. La ligne  $ax$  est donc perpendiculaire au plan  $BC$ , lorsque ce plan est placé avec les précautions annoncées.

C'est sur cette démonstration qu'est fondée une opération pratiquée par des charpentiers, lorsque dans la construction d'un vaisseau, ils se proposent d'établir un couple sur sa quille, de manière que la direction de celle-ci soit perpendiculaire au plan du même couple. Ils choisissent sur la longueur de la quille, deux points tels que  $n$  &  $q$  (fig. 29. G) qui soient également éloignés du lieu  $f$  de ce couple. Ils marquent sur le contour du dernier, deux points  $z$  &  $e$ , ou les extrémités de sa varangue, qui sont à égale distance du lieu  $f$ . Ensuite ils mesurent, à l'aide d'un compas à verge, les distances des points  $q$  &  $n$ , aux deux points  $z$  &  $e$  du gabariage: & lorsque l'égalité de ces distances est parfaitement établie, ils jugent avec raison & comme on l'a prouvé ci-dessus, que la direction de la quille est perpendiculaire au plan du couple établi.

127. *Angles plans.* Examinons actuellement un plan qui en rencontre une autre, sous une inclinaison quelconque. Rappelons d'abord, que si deux points marqués dans l'espace (91), indiquent la direction d'une ligne droite qui réunit ces points; de même, trois points

qui ne sont pas sur une même ligne, désignent la direction d'un plan où ils sont placés. Il en résulte que deux lignes droites ne peuvent avoir deux points communs sans se confondre: & il est également vrai, d'après ces principes, que deux plans doivent être couchés l'un sur l'autre; lorsque dans l'espace, on peut assigner trois points, qui n'étant pas en ligne droite, appartiennent à l'un & à l'autre plan.

Si un plan *anmc* (fig. 38) rencontre, ou coupe un autre plan *bani*; ces deux plans, qui ne sont pas appliqués l'un sur l'autre, ne peuvent avoir de communs que deux seuls points. Ainsi imaginons qu'on ait tracé, sur un de ces plans, une ligne droite qui passe par ces deux points; cette même ligne doit incontestablement être appliquée toute entière sur l'autre plan, puisqu'elle a avec lui deux points communs. Cette ligne appartient donc totalement aux deux plans supposés, & par conséquent elle est leur intersection commune; c'est-à-dire qu'en général, l'intersection de deux plans est toujours une ligne droite. C'est ainsi que les plans *bani* & *canm* ont pour intersection commune la ligne droite *na*.

Le premier de ces plans est-il oblique au second? Il s'agit de savoir comment leur inclinaison doit être mesurée. Supposons que le plan *bani*, d'abord couché sur *canm*, ne soit parvenu à former avec celui-ci un angle quelconque, qu'en tournant autour de l'intersection commune & constante *an*, comme autour d'un axe. Considérons aussi le plan *bani* comme formé & composé d'une infinité de lignes droites, telles que *ro*, & qui soient toutes perpendiculaires à *na* (91). On juge qu'en conséquence de la rotation supposée du plan *bani* autour de *an*, toutes les lignes élémentaires de ce plan, & qui d'abord étoient couchées sur *canm*, prennent toutes, & en même tems, une égale inclinaison à l'égard du dernier plan: l'inclinaison de l'assemblage de toutes ces lignes, ou celle du plan *bani*, à l'égard du plan *canm*, doit donc être la même que celle d'une seule de ces lignes élémentaires *or*. Ainsi la mesure de cet angle plan, se réduit à celle de l'inclinaison, à l'é-



gard du plan *canm*, d'une ligne *or*, qui dans le plan *bani*, est menée perpendiculairement à l'intersection commune de ces plans. Nous venons de voir que pour désigner l'angle de la ligne *or* avec le plan *canm*, il faut, d'un point *o* de cette ligne, abaisser sur ce plan une perpendiculaire *ox*; & que si, par une ligne *rx* menée dans ce même plan, on joint le pied *r* de l'oblique *or*, & le pied *x* de la perpendiculaire, l'angle *orx* est alors l'angle cherché: par conséquent, ce même angle *orx* est égal à l'angle plan. Si on remarque enfin que *or* étant perpendiculaire à la ligne *an*, cette dernière ligne doit l'être aussi à *rx*; On peut établir pour règle générale, qu'un angle formé par deux plans, est égal à l'angle rectiligne que font entr'elles deux lignes qui tracées dans chaque plan, sont perpendiculaires à leur intersection commune, & en un même point.

Lorsque le plan *bani*, en tournant autour de *an*, s'avance vers la position *sanq*; le pied *x* de la ligne *or*, perpendiculaire au plan *canm*, se rapproche graduellement du point *r*: & dès que l'angle des deux plans est de 90° degrés, la ligne *or* devient *ur*, ou se confond avec la ligne *or*, qui est la même chose que *ur*. Par conséquent, cette dernière est, comme *or*, perpendiculaire au plan *canm*. Donc aussi toute ligne, qu'on peut supposer menée dans le plan *sanq*, & perpendiculairement à la section commune *an*, ou parallèlement à *ur*, est nécessairement perpendiculaire au plan *canm*.

Une autre conséquence est, que si deux plans *sanq* & *urd*, qui se traversent réciproquement, sont l'un & l'autre perpendiculaires à un plan *canm*, leur intersection commune doit l'être aussi au même plan. Car pour mesurer l'angle des plans *sn* & *cn*, il suffit de mener par le point *r*, dans le plan *sn*, une ligne qui soit perpendiculaire au plan *cn*. De même, pour mesurer l'angle des plans *cn* & *urd*, il faut, par un point *r*, tracer dans le plan *urd*, une ligne qui soit perpendiculaire au plan *cn*. Or, par un point donné sur un plan, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire:

la ligne *ur* est donc commune nécessairement aux deux plans supposés : elle est donc leur intersection ; & par conséquent, l'intersection de deux plans, qui tous deux sont perpendiculaires à un troisieme, est elle-même perpendiculaire à ce dernier.

Si deux plans sont perpendiculaires chacun à un autre plan ; c'est-à-dire, si (fig. 38) le plan *cn* est perpendiculaire au plan *sn* ; & si le plan *bn* l'est aussi au plan *nf*, l'angle des plans *nc* & *nb*, doit être égal à celui des plans *ag* & *aq*. Car les lignes *ro* & *rd*, qui, dans les deux premiers plans, sont perpendiculaires à leur section commune, forment un angle *ord*, qui est égal évidemment à celui des deux lignes *er* & *ru*, qui sont perpendiculaires à la section commune des deux autres plans comparés.

On peut conclure aussi des mêmes principes, que deux plans *sn* & *cn* tant perpendiculaires l'un à l'autre, toute ligne qui est menée, par un des points de leur intersection *an*, perpendiculairement au plan *cn*, doit être dans le premier plan *sn*. Car pour mesurer l'angle formé par ces deux plans, il faut mener, par un point *r* & dans le plan *sn*, une perpendiculaire au plan *cn* ; & comme la perpendiculaire supposée passe par le point *r* ; comme par un même point *r* appartenant à un plan *cn*, on ne peut élever à ce plan qu'une seule perpendiculaire ; il s'ensuit que ces deux perpendiculaires que nous avons considérées isolément, ne peuvent être que la même ligne. Ainsi une ligne est-elle menée perpendiculairement à un plan, & par un point de l'intersection de ce plan avec un second qui lui est perpendiculaire ? elle doit être appliquée dans ce second plan. Il en résulte que si deux lignes *as* & *rn* sont toutes deux perpendiculaires au plan *cn*, elles sont nécessairement parallèles. En effet, soient réunis les pieds *r* & *a* de ces lignes, par une troisieme *ar* tracée dans le plan *cn* : on peut imaginer que par *ur* & *ra*, on a fait passer un plan qui, par cette raison, doit être lui-même perpendiculaire au plan *cn*. comme ce plan passe aussi par le pied *a* de la seconde ligne *as*, celle-ci doit se trouver entièrement appliquée sur le plan *saru* ; & par consé-

quent, les deux lignes supposées *as* & *ru*, étant dans un même plan, & formant toutes deux un même angle de 90 degrés, avec une sécante *ar*, qui est aussi dans le plan commun, doivent être parallèles l'une à l'autre (98). Si trois lignes droites *as*, *rn* & *xo* étoient supposées perpendiculaires à un même plan *cn*, on démontreroit de la même manière qu'elles sont toutes parallèles entr'elles. On les compareroit successivement deux à deux, comme on vient de le dire; & il en résulteroit que deux quelconques sont l'une & l'autre parallèles à une troisième, ou que toutes trois doivent être parallèles.

La mesure des angles plans est ainsi réduite à celle des angles rectilignes qui sont formés par des lignes, menées dans les plans, perpendiculairement à leur section commune & au même point. On doit donc en conclure qu'il doit y avoir autant d'angles plans qu'on peut concevoir d'angles rectilignes, & que les rapports des premiers sont les mêmes que ceux des seconds. C'est pourquoi on peut dire, que les angles plans qui sont opposés au sommet sont égaux; que les deux angles qu'un plan forme avec un autre qu'il rencontre, valent ensemble 180 degrés; que des plans parallèles ont tous leurs points correspondans à égale distance les uns des autres; & que si ces derniers plans sont traversés par un troisième, les angles alternes internes sont égaux entr'eux, ainsi que les alternes externes, &c., comme on l'a démontré pour des lignes parallèles (98). Les charpentiers de vaisseaux font une application utile de ces dernières idées. Obligés, dans la construction d'un bâtiment, d'établir les couples parallèlement au maître couple (fig. 37), ils mesurent sur la quille l'intervalle qui s'y pare, & le lieu de la varangue du maître, & celui du couple à établir, ensuite ils font regner la même distance entre tous les points correspondans des gabariages de ces deux couples: & par cette opération, qu'ils nomment perpignage, ils rendent parallèles tous les couples de levée qui entrent dans la carasse d'un vaisseau.

128. Les principes précédens conduisent à un résultat

important qu'il est à-propos de faire remarquer. Si deux plans *kigmn* & *aoudc* (fig. 39) sont parallèles, & si on les fait traverser par un plan triangulaire, tel que *rakno*; ce dernier plan a pour section commune, avec *aoud*, une ligne *ao*; & avec *knmq*, une ligne *kn*. Ensuite, d'après la supposition, ces sections ou ces lignes *ao* & *kn* doivent être parallèles; & par conséquent, les triangles *rao* & *rkn* sont nécessairement semblables. On peut donc faire cette suite de rapports égaux,  $ra:rk::ao:kn::ro:rn$ . Si les mêmes plans parallèles sont supposés être traversés par un second plan triangulaire *rnrm*, qui ait avec le premier *rkn*, une section commune *rn*; on doit dire, & par les mêmes raisons,  $ro:rn::ou:nm::ru:rm$ . Si on imagine enfin d'autres plans triangulaires disposés les uns à côté des autres, comme le sont les deux premiers, on est fondé à en conclure des nouvelles suites de rapports égaux. Toutes ces suites comparées entr'elles, deux à deux, présentent des rapports égaux qui les lient toutes ensemble, & qui démontrent l'égalité de tous les rapports dont elles sont composées. Si parmi ces rapports, on choisit ceux-ci  $ra:rk::ro:rn::ru:rm::rd:rq::rc:ri$ , il en résulte que toutes les sections communes des plans triangulaires supposés, sont coupées proportionnellement par les deux plans parallèles qui les traversent. On peut aussi transformer l'expression de ce résultat en celle-ci: si des lignes droites sont menées d'un point *r*, placé hors d'un plan, à divers points de ce même plan; & si elles sont traversées par un second plan parallèle au premier; elles sont coupées en parties qui sont proportionnelles entr'elles. D'autres rapports des mêmes suites étant comparés, on peut dire,  $ao:kn::ou:nm::ud:mq::cd:ig::ac:ki$ ; c'est-à-dire que les deux figures *aodc* & *knqi*, tracées sur ces deux plans, ont leurs côtés proportionnels. Il n'en résulte pas encor que ces figures soient semblables; Cependant cette similitude est susceptible d'être démontrée, comme on va le voir. Soient menés, par les lignes *rk* & *rq*, un plan *krq*; & par les lignes *rk* & *rm*, un autre plan *rkrm*; les résultats de cette nouvelle construction doivent être pareils aux précédens; c'est-à-dire

que les sections de ces nouveaux plans avec les plans paralleles, sont des lignes paralleles; & que les triangles *rad*, *rkq* sont semblables. On en diroit de même des triangles *rau* & *rkm*, qui sont formés par les nouveaux plans *rau* & *rkm*. Ainsi on peut faire les proportions suivantes, après avoir comparé avec les précédentes, les nouvelles suites des rapports entre les côtés des triangles qui viennent d'être indiqués; 1.<sup>o</sup> *ao:kn::ou:nm::au:km*; 2.<sup>o</sup> *au:km::ud:mq::ad:kq*; & 3.<sup>o</sup> enfin, *ad:kq::cd:ig::ac:ki*. Les deux figures *aoudc* & *knmqi* sont donc semblables. Car les triangles qui les composent sont semblables, chacun à chacun, comme ayant leurs trois côtés proportionnels. On peut aussi exprimer ce résultat d'une autre maniere, en disant, que si d'un point *r* élevé au-dessus d'un plan, on mene des lignes aux sommets des angles d'un polygone quelconque *knmqi* tracé dans ce plan; & si après avoir fait traverser toutes ces lignes par un plan parallele au premier, on réunit par de nouvelles droites, menées dans le second plan, les points où il coupe les premières lignes, la figure qui se trouve ainsi formée dans le second plan, est semblable à celle qui est tracée sur le premier.

129. *Projections des lignes & des surfaces sur des plans.* Les principes précédens sont les fondemens de l'art de la perspective & des projections. On en fait des applications directes dans l'architecture navale, & cette raison nous impose l'obligation de traiter cette matiere, dans ses rapports avec la marine.

Faire un plan perspectif, c'est tracer la figure d'un objet, telle qu'elle paroît à un œil, qui plus ou moins éloigné, est supposé sur une ligne perpendiculaire au plan sur lequel l'apparence de l'objet est projetée ou dessinée. C'est ainsi qu'un œil qui est en *r* (fig. 39) perpendiculairement au-dessus du plan *knmqi*, & qui rapporte à ce plan, la figure *aoudc*, voit le point *o* sur le point *n* du plan perspectif, dans la direction prolongée du rayon visuel mené de *r* en *o*. Il rapporte de même aux points *k*, *m*, *q*, *i*, conséquemment à la position des autres rayons visuels, les points *a*, *u*, *d*, *c*: & ces

points de projection étant réunis par des lignes droites; la figure donnée *aoudc* paroît à l'œil qui est en *r*, être dessinée sous la forme *kmnqi* sur le plan de projection. Cette dernière figure est aussi nommée la projection de *aoudc*, sur le plan *knmqi*.

Si l'œil qui a été supposé en *r*, & à une distance bornée du plan perspectif, est placé dans un éloignement infini de ce même plan; alors les rayons visuels *rk*, *rn*, *rm*, &c; ne se rencontrent qu'à une distance incommensurable; & ils peuvent alors être considérés comme étant, tous parallèles les uns aux autres, ou tous perpendiculaires au plan de projection. Les objets, qui dans ce cas, sont rapportés sur ce dernier plan, sont alors représentés sous des formes, qu'on nomme leur projections orthographiques. Telles sont les projections qui sont en usage dans l'architecture navale, ainsi elles vont seules fixer notre attention.

Considérons une ligne droite *ab* (fig. 43 G) qui doit être projetée sur le plan *fa*. Si on imagine que de tous ses points, on abaisse des perpendiculaires sur le plan *fn*, & qu'on réunisse par une ligne *cb*, tous les points de ce plan, auxquels aboutissent ces perpendiculaires, cette ligne est la projection de *ab*. Alors dans le triangle rectangle *acb*, on peut faire cette proportion;  $ab:cb::1:\cos. abc$ ; c'est-à-dire que  $cb=ab \cos. abc$ . On voit par ce résultat, que la projection *cb* est d'autant plus inférieure à la ligne projetée *ab*, que l'inclinaison de celle-ci, à l'égard du plan perspectif, est plus considérable; de sorte que cette inclinaison étant nulle, ou la ligne *ab* étant parallèle au plan *fa*, alors le  $\cos.$  de *abc* est égal au rayon, ou *ab* devient parfaitement égale à sa projection. Mais si cet angle *cba* est de 90 degrés, alors la projection de *ab* est nulle; ou plutôt elle n'est représentée que par un seul point *b*.

On trouve par un procédé semblable, la projection d'une ligne courbe, telle que *ei*, sur le même plan *fn*. On abaisse de divers points de son contour, des perpendiculaires sur ce plan; & si ces lignes peuvent être bornées au nombre de deux, pour déterminer la projection d'une ligne droite, elles doivent être plus nombreuses.

pour indiquer avec exactitude celle d'une ligne courbe. Elles doivent même être d'autant plus multipliées que la courbure de *ei* est plus grande: & leur nombre dépend de celui des lignes droites infiniment petites, qu'on peut considérer comme les élémens qui composent la longueur de la courbe *ei*. D'ailleurs ces lignes élémentaires ont avec leurs projections particulières & correspondantes des rapports qu'on peut calculer comme celui de *ab* à *bc*.

Si actuellement on considère une figure plane ou une surface *lrkm*, sa projection sur le plan *fn* doit être déterminée par des perpendiculaires, abaissées de tous les points de cette surface, sur ce même plan. Bornons-nous à indiquer celles qui sont abaissées des sommets des angles de cette figure, & qui doivent assigner les limites de la projection demandée. On voit que la figure *kmxo* est la projection orthographique de *krlm*. La projection particulière du côté *kr* est *ko*; & si on imagine que cette figure entière *krlm* soit formée d'une infinité de lignes droites pressées & parallèles à *kr*, chacune de ces lignes élémentaires seroit à sa projection, comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison du plan de projection. On peut même présumer, sans avoir recours à la mesure directe des surfaces, que la somme de ces lignes élémentaires, ou la surface entière *krlm*, doit être à la somme de leurs projections particulières, ou à la projection de cette surface, comme le rayon, est au cosinus de l'inclinaison du plan projeté.

On peut donc conclure, comme on l'a fait pour des lignes droites, que la projection d'une surface plane est égale à cette figure elle-même, lorsqu'elle est parallèle au plan de projection; & si le plan d'une telle surface étoit perpendiculaire au plan *fn*, l'intersection commune de ces plans seroit la projection de cette figure, quel que puisse être son contour ou sa grandeur.

En rassemblant tous ces résultats, on doit voir (fig. 36), que si *BC* est un plan de projection, les lignes *ao*, *ru* & *pt* doivent avoir pour projections les seuls points *o*, *u* & *t*, si elles sont perpendiculaires à ce plan; que les lignes *ab*, *ai*, *ac* ont pour projections les lignes *bo*, *io*, *co* qui sont tracées sur le plan auquel elles sont

inclinées ; que la surface *abc* a pour projection le triangle *cob* ; & que celles des triangles *abo*, *aio*, *aco*, *aoz*, dont les plans sont supposés perpendiculaires au plan *BC*, sont les seules lignes *bo*, *io*, *co*, *oz*, qui sont leurs intersections avec le plan de projection. De même (fig. 38), les surfaces *urd*, *sanq* étant projetées sur le plan *cn* auquel elles sont perpendiculaires, ont pour projections les lignes *rd* & *an*, qui sont les intersections communes de ces surfaces avec le plan de projection *nc*.

130. Dans l'architecture navale, on ne projette pas sur des plans le corps entier d'un vaisseau qu'on se propose de construire ; mais on y trace les projections de plusieurs sections principales d'un tel corps. Ces sections sont faciles à imaginer. En effet, supposons qu'un vaisseau représenté par *defg* (fig. 75. G), soit coupé & traversé par un plan tranchant, dirigé suivant les lignes *ab* & *ic* ; il doit en résulter, dans ce vaisseau, une section dont la figure est *acbi*. Si ce plan est dirigé suivant les lignes *ab* & *dg*, la section est alors *dbga* ; & ainsi des autres.

Les plans qu'on a choisis pour servir aux projections annoncées, des couples, des lisses, & des lignes d'eau, sont au nombre de trois. Ils sont perpendiculaires les uns aux autres ; & si, comme on doit le faire, on les considère dans un même vaisseau, on voit l'un de ces plans dans *dagb* qui est horizontal : les deux autres plans sont *abc* & *defg*, qui sont verticaux & perpendiculaires, soit entr'eux, soit à l'égard du premier plan. L'un *acb* est le plan du maître couple du vaisseau, & il est placé de manière que la direction de la quille lui est perpendiculaire. comme il est supposé vertical, il porte le nom de vertical. Le second *defg* est nommé le plan d'élévation. Il est dirigé par la quille *ef*, l'étrave *gf*, & l'étambot *de*. Il partage le vaisseau en deux parties égales, & par cette dernière raison, on le distingue sous le nom de plan diamétral. Il est supposé vertical, comme le premier, et ces deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre. Enfin le troisième plan de projection *dgba* est aussi perpendiculaire aux deux premiers : mais sa position lui a fait donner le nom de plan horizontal.



Il est aussi quelques autres plans particuliers , qui sont situés obliquement aux précédens, & qui ne servent à présenter les figures que des seules lisses d'un bâtiment ; mais nous nous réservons d'en parler , après les détails généraux qui naturellement doivent précéder ces développemens accessloires.

Examinons 1.<sup>o</sup> les projections qui sont faites sur le plan vertical *acb*. Ce plan est celui du maître couple , ou d'une section , au plan de laquelle la quille est perpendiculaire. On peut reconnoître (fig. 37) une telle section, dans la ligne courbe *iodc* (qui est la séparation des pieces de bois qu'on accole ensemble , pour composer le couple solide d'un vaisseau). Tous les autres couples que présente la même figure , annoncent la forme & le lieu de plusieurs autres sections , qu'on imagine être faites , dans le corps d'un vaisseau , par des plans tranchans & dirigés parallèlement à celui du maître couple. La position particuliere des couples qui sont en avant ou en arriere du maître , conduit à conclure que leurs projections sur le plan de ce dernier , doivent être parfaitement égales aux couples projetés (129), soit dans leur contour , soit dans leur étendue. Ainsi (fig. 47. G), dans le plan *SHRQdts* (qui est celui du maître , dont le demi-contour réel est représenté par *stdQ*), les projections , telles que *himQ*, *yoQ*, *zTxD*, sont celles des demi-contours de trois couples particuliers d'un vaisseau. Elles sont égales aux couples mêmes , & les courbes qui les représentent , embrassent entre leurs branches un espace égal à celui qui est compris entre les branches réelles des gabariages d'autant de couples solides du bâtiment. Cette égalité vient de ce que les plans de ces sections sont paralleles au plan de projection.

Considérons aussi les contours des lisses d'un vaisseau ; c'est-à-dire , de ces larges ceintures telles que *eqpsz* qui l'entourent (fig. 37), pendant sa construction. Imaginons , comme on le fait dans l'architecture navale , que la partie *dpsz* d'une lisse , & qui embrasse l'avant du bâtiment , soit placée dans un plan différent de celui qui passe par la partie arriere *dqe* de la même lisse (en supposant

cependant ces deux plans tous deux perpendiculaires à celui du maître, ou au vertical). Alors on doit juger que les projections des deux parties de cette lifse, sur le vertical, ne peuvent être que les intersections de leurs plans particuliers, avec celui de projection. C'est ainsi que la projection de la partie arriere de cette lifse, doit être représentée (fig. 47. G) par une ligne  $dB$  inclinée à l'horison, comme le plan de cette section partielle. Les autres lisses, soit supérieures, soit inférieures à celle-ci, ont aussi pour projections, des lignes droites qui sont placées comme ces sections, dans le vaisseau supposé; ou des lignes telles que  $aD$ ,  $br$ ,  $dB$ ,  $pA$ ,  $gK$ ,  $sH$ .

Si on imagine dans un vaisseau des nouvelles sections qui soient faites horizontalement, elles sont alors perpendiculaires au plan vertical; & leurs projections sur ce dernier, ne peuvent être que les intersections qui leur sont communes avec ce plan. On voit (fig. 47. G) dans les lignes  $3l$ ,  $3r$ ,  $3f$ ,  $3e$ ,  $3c$ , les projections d'autant de sections, qui, par leur position, reçoivent le nom de lignes d'eau. Enfin, dans ce plan, on voit encor la projection du plan diametral du vaisseau. Ce plan est  $defg$  (fig. 75. G), & son intersection avec le plan vertical est  $ic$ ; c'est pourquoi sa projection (fig. 47. G) sur le vertical est une portion de la ligne  $QH$ . Telles sont les projections de diverses sections d'un vaisseau sur le plan, qui est nommé vertical, & qui est celui du maître couple.

Considérons 2.<sup>o</sup> celles qui sont faites sur le plan diametral d'un vaisseau, ou sur le plan d'élévation Soit  $agfrAD$  le plan indiqué (fig. 73. G). Il est perpendiculaire au plan du maître couple; ainsi ce couple, & tous les autres couples de levée qui lui sont parallèles, ne peuvent avoir d'autres projections sur le plan d'élévation, que des lignes droites, qui sont égales aux intersections de ces plans avec celui de projection. C'est pourquoi les projections de deux couples qui correspondent aux points  $e$  &  $d$  de la quille d'un vaisseau, sont les lignes  $eor$  &  $dxn$  perpendiculaires à la quille. De même, les lignes d'eau, dont les plans sont horizontaux, & par conséquent perpendiculaires au plan  
fondé

diamétral, ont pour projections des lignes droites. On voit dans les droites *pq* & *ty*, celles de deux lignes d'eau particulières. Quant aux lisses, comme leurs plans sont obliques au plan diamétral, leurs projections sur ce dernier ne peuvent être égales à ces mêmes lisses, & elles consistent dans des courbes, telles que *ucn*, *aoxr*, qui sont peu ressemblantes aux lisses réelles d'un vaisseau. Dans ce plan d'ailleurs, on voit la forme réelle de l'étrave & de l'étambot, parce que ces lignes courbes sont placées entièrement dans le plan diamétral. On voit dans la figure 57. G, une portion *obyq* du plan diamétral ou d'élévation, sur lequel sont représentées les projections *qy*, *tp*, & *x* des demi-couples, qui, vus obliquement sur un vaisseau, présentent l'apparence de *my*, *ap*, & *sx*. On voit aussi dans des lignes ponctuées, telles que *ogn*, la forme des projections des lisses, sur le plan d'élévation d'un vaisseau.

Soit 3<sup>o</sup> le plan horizontal représenté par *ArBs* (fig. 46. G). le plan des couples est perpendiculaire à celui-ci, & leurs projections y sont nécessairement des lignes droites, telles que *rs*, *iz*, &c. Les lignes d'eau seules dont les plans sont parallèles à ce plan de projection, sont représentées sur ce dernier, dans toute leur grandeur réelle. Ainsi les courbes *AmB*, *AuC*, *AiB*, &c. sont égales aux demi-lignes d'eau du vaisseau auxquelles elles sont relatives. Les projections entières de deux de ces lignes d'eau sont représentées séparément (fig. 24 & 44. G). On trace quelquefois sur ce même plan horizontal, les projections des lisses, & on voit (fig. 68. G) la projection *afi* d'une portion de lisse dont la forme réelle est *adh*. La dissemblance des lisses avec leurs projections horizontales & le peu d'utilité des dernières, ont fait souvent négliger de les tracer. Mais on dessine le vrai contour de chacune, sur le plan même de la section qui est supposée faite dans un vaisseau suivant leur contour & obliquement au plan diamétral. Ces derniers plans, nommés obliques sont ajoutés aux trois principaux dans l'architecture navale.

Nous avons déjà remarqué que les deux parties d'une même lisse, l'une de l'avant & l'autre de l'ar-

riere , ne sont pas dans un même plan ; & nous devons ajouter que si on les considère , si on les examine sur un vaisseau ; on reconnoît que le contour de l'une *ui* est dans un plan tel que *uih* (fig. 49. G) ; tandis que l'autre *ku* paroît dans un plan *akud*. Ces deux plans se joignent au point *u* ; ils sont inclinés l'un à l'autre ; & réunis , ils présentent le cours entier d'une même lifse.

Malgré cette distinction des plans , des deux branches d'une lifse ; on trace souvent dans l'architecture navale , le contour d'une même lifse , sur un seul & même plan *rdnuq* (fig. 48. G) ; en observant , de donner à la partie de l'avant *nduA* les ordonnées qu'elle a sur le vaisseau dans son propre plan , & de représenter le contour de l'arrière de la même lifse *rdq* avec les mêmes précautions. Cette manière assez singulière & peu vraie , de tracer les lisses d'un vaisseau , n'est pas susceptible de conséquences dangereuses , & ces lignes peuvent être employées , comme elles y sont destinées , à faire connoître les équerrages des couples , à indiquer le lieu de toutes les alonges , & par conséquent à diriger convenablement les charpentiers , soit dans le travail des pièces de bois qui composent ces couples , soit dans l'établissement de ces pièces à leurs places respectives. Quant aux rapports de leurs contours avec les qualités essentielles que doivent avoir des bâtimens de mer , ils ne sont , ni assez immédiats , ni assez déterminés , pour faire servir ces courbes , ou leurs projections (ainsi qu'on le pratique quelquefois) , comme des bases propres à indiquer la forme qu'on doit donner à la carene d'un bâtiment. Elles ne peuvent même pas être regardées comme des ceintures d'un vaisseau , (fig. 37) ; & par conséquent comme propres à faire connoître la direction des bordages. Car , comme nous le verrons ailleurs , de telles ceintures sur la surface de la carene d'un vaisseau , sont des courbes à double courbure , dont les points par conséquent , & à plus forte raison une branche entière , ne peuvent être supposés , comme le sont les branches des lisses , dans un seul & même plan.

Comme l'extrémité de l'arrière d'un vaisseau présente

par sa courbure variée & rapide, quelques difficultés dans l'exécution ou dans le travail des pièces qui la composent; on imagine des plans tranchans, qui, dans cette partie, font diverses sections, tant horizontales que verticales. Parmi les sections verticales, il en est une *rg* qui est dirigée obliquement au plan diamétral. On la voit (fig. 57. G): on la nomme estain, & son plan *rzg* n'est pas parallèle à ceux *zsr*, *tap* & *qmy* des autres couples dont on a parlé précédemment. Conséquemment à la position annoncée de l'estain, sa projection (fig. 66. G) sur le plan diamétral *uas*, est *zmx*. Sur le plan horizontal elle ne peut être qu'une ligne droite, & elle est représentée par *ag* (fig. 59. G) ou par *efd* (fig. 68. G). Enfin sa projection sur le plan du maître couple ou du vertical, est AQR TU (fig. 67. G). On voit par conséquent que sur aucun des trois plans principaux, l'estain n'est présenté sous sa forme réelle. Les sections horizontales qu'on imagine être faites dans cette extrémité d'un vaisseau, sont placées à la hauteur de chaque barre de l'arcaste, afin que les contours extérieurs de celles-ci soient tracés sur le plan horizontal, dans leur véritable grandeur, & que leur gabaris puissent être facilement formés pour la commodité des charpentiers. Les contours des barres sont représentés par les lignes courbes *ug*, *ub*, *up*, *uq*, *ur*, *us* (fig. 59. G). Et la ligne ponctuée *ag*, où se terminent toutes ces courbes, est comme on l'a dit, la projection de l'estain; puisque ce demi-couple dans le vaisseau, passe par les extrémités des barres, & se trouve dans un plan vertical. C'est par le moyen de ces projections, qu'on parvient à tracer le contour réel de l'estain, & qu'on indique aux charpentiers comment ils doivent conformer le gabari de cette pièce de l'arcaste. Car les lignes *as*, *ar*, *aq*, *ap*, *ab*, *ag* sont les projections des diverses largeurs, qui, sur le contour de l'estain, correspondent à la hauteur de chaque barre. C'est pourquoi les mesures de ces lignes étant portées (fig. 61. G) en *dl*, *pb*, *nf*, *ca*, perpendiculairement à la ligne *Fl*, & placées à des distances *bf*, *bl*, *fa*, qui soient égales à celles des barres correspondantes de l'arcaste, la courbe *cnpd* qu'on fait passer

par les extrémités  $c$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $d$ , devient le contour extérieur de l'estain solide qui doit faire partie de l'arrière du vaisseau. D'autres demi-couples, sous le nom de devoyés ou d'elancés, & placés, ainsi que l'estain, obliquement au plan diamétral, quoique dans des plans verticaux, sont aussi projetés sur les mêmes plans principaux. Leur contour réel est conclu de leurs projections, par le même procédé qui vient d'être indiqué pour déterminer le gabari de l'estain.

Les projections des barres de l'arcaste, qui sont horizontales, sont sur le plan diamétral, ou sur le plan du maître couple, des lignes droites. Des lignes telles que  $rm$ , & ses parallèles représentent, dans le plan diamétral (fig. 66. G), les projections de ces barres.

On imagine aussi, pour diriger certaines parties du travail des charpentiers, ou pour leur faire connoître la grandeur de certains équerrages, d'autres sections verticales qui sont faites dans cette extrémité du vaisseau, & parallèlement au plan diamétral. Les lignes  $cd$ ,  $hi$ ,  $fl$ ,  $mn$ ,  $ua$  (fig. 59. G) annoncent, & la position, & les distances de ces sections, ainsi que leurs projections sur le plan horizontal. Sur le plan vertical, leurs projections sont représentées par les lignes menées des points  $d$ ,  $c$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $a$ , (fig. 65. G) parallèlement à la ligne  $ab$ , qui est la projection du plan diamétral. Ces mêmes sections projetées sur le dernier plan (fig. 66. G), y paroissent dans leur grandeur réelle; & les lignes courbes, qui, des points  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$ , s'élèvent pour se rendre à la ligne  $az$ , ou à la projection de la lisse d'hourdy, représentent les véritables contours de ces nouvelles sections. C'est par cette construction, qu'on détermine les équerrages des pièces qui composent l'arrière. Par exemple, la ligne  $rm$  est la projection d'une barre sur le plan diamétral, & les angles que forme cette ligne avec toutes les courbes ponctuées qu'elle traverse, annoncent les équerrages de ces barres, dans tous les points qui leur sont communs avec ces sections imaginaires.

131. *Mesure des surfaces planes.* Après avoir indiqué toutes ces applications utiles des principes précédens : après avoir donné , dans la première section , l'idée d'une figure plane , de la mesure de ses côtés , de la grandeur de ses angles : & enfin , après avoir exposé comment le contour , d'une telle figure tracée dans l'espace , peut être rapporté à différens plans déterminés ; comment elle y est projetée sous une forme qui la déguise , mais qui est telle que toujours des rapports distincts & simples lient son contour réel à celui de ses projections : il faut actuellement considérer la grandeur de l'espace même qu'elle embrasse par ses côtés ; ou il faut chercher à évaluer l'étendue de sa surface.

Nous avons vu qu'on mesure une ligne droite , en portant sur sa longueur celle d'une petite ligne , qui est prise pour unité , & qui est , ou la toise , ou une de ses divisions , telles qu'un pied , un pouce , &c. De même , mesurer une surface , c'est déterminer combien de fois elle contient , une petite surface connue qu'on est convenu d'adopter pour unité de surface. Cette unité principale , qui est employée dans la société , & qui est représentée (fig. 40) par *abcd* , est une toise quarrée , c'est un parallélogramme dont les angles sont droits , & dont chaque côté est égal à une toise. On estime aussi l'étendue des surfaces , suivant les circonstances , en pieds quarrés , ou en pouces quarrés , ou , &c. ; mais ces dernières mesures ne sont alors considérées que comme des fractions ou des parties de l'unité principale. Bientôt nous verrons que ces dénominations peignent parfaitement les objets qu'elles désignent.

Lorsqu'il a été question de chercher à connoître la valeur des angles des figures planes quelconques , & les rapports de de leurs contours , nous avons vu que la question a été réduite à considérer ces mêmes objets dans les seules figures triangulaires ; parce qu'on peut en conclure tout ce qui regarde des polygones d'un nombre quelconque de côtés. Ainsi , pour suivre un ordre uniforme , il faut actuellement chercher à juger de la surface de tout polygone , par celle des triangles dont on peut supposer que chacun est composé. Il faut

donc examiner quelle est la mesure de la surface d'un triangle quelconque.

Soit un triangle rectiligne  $abc$  (fig. 21). Sa surface est l'espace renfermé ou circonscrit par ses trois côtés. Si du sommet  $a$  d'un de ses angles, une perpendiculaire  $ao$  est abaissée sur le côté opposé  $bc$ , la ligne  $ao$  reçoit le nom de hauteur du triangle, & alors le côté  $bc$  est nommé la base de ce même triangle.

Comme il seroit difficile d'arranger dans l'espace triangulaire  $abc$ , plusieurs figures telles que  $abcd$  (fig. 40), & qui couvrirent exactement son étendue, afin de faire connoître le nombre de fois qu'une telle unité y seroit contenue : comme cet arrangement peut se faire plus commodément dans la surface d'un parallélogramme rectangle  $DABE$ , qui par sa forme, a plus d'analogie avec celle de l'unité de mesure  $abcd$ , & qui peut être aisément partagé en petits quarrés, tous égaux à cette unité : il faut déterminer la mesure de la surface d'un parallélogramme rectangle. Cette recherche est non-seulement d'une utilité directe, puisqu'il est toujours nécessaire de connoître la surface d'une telle figure; mais elle est d'une utilité générale, puisqu'on peut en conclure quelle doit être l'expression de la surface, soit de tout triangle rectiligne, soit de tout parallélogramme.

En effet, soit un triangle  $CBD$  (fig. 41) rectangle en  $D$ ; & soient menées, 1<sup>o</sup> par le point  $B$  une ligne  $BA$  parallèle au côté  $CD$ ; & par le point  $C$ , une parallèle au côté  $BD$  : il résulte alors de cette construction un parallélogramme rectangle  $ABCD$ , dont la moitié est évidemment égale au triangle  $CBD$ ; puisque ce triangle &  $BAC$  sont égaux comme ayant, à cause des parallèles, les trois côtés égaux chacun à chacun. Ces triangles & ce parallélogramme ont d'ailleurs une même base  $CD$  ou  $AB$ , & une même hauteur  $DB$  ou  $AC$ . Ainsi un triangle rectangle est toujours la moitié d'un parallélogramme rectangle, lorsque ces figures ont même base & même hauteur.

Si sur le triangle obliquangle  $CDI$ , on forme, par des parallèles menées comme précédemment, un parallélogramme obliquangle  $OCDI$ , on démontreroit de



même 1<sup>o</sup> que les triangles ICD & ICO, 1<sup>o</sup> ont la base CD, & la hauteur BD du parallélogramme OCDI; 2<sup>o</sup> qu'ils sont égaux entr'eux; & 3<sup>o</sup> que chacun par conséquent a une surface qui est la moitié de celle du parallélogramme. On peut donc conclure en général qu'un triangle quelconque est toujours la moitié d'un parallélogramme, lorsque ces figures ont même base & même hauteur.

Si on compare les deux parallélogrammes BDCA & OCDI, qui ont même base CD, & même hauteur BD; on conclut facilement leur égalité. En effet ces deux figures sont composées chacune de deux parties, l'une de OCDB & AOC, l'autre de OCDB & DBI. Elles ne peuvent donc différer que par l'inégalité des triangles AOC & DBI, puisque l'espace OCDB est commun à l'une & à l'autre. Mais ces triangles sont égaux, parce que, conséquemment aux parallèles, les côtés AC & BD sont égaux; ainsi que les côtés CO & DI, & parce que les angles ACO & BDI, sont compris chacun entre des côtés parallèles. Donc deux parallélogrammes qui ont même base & même hauteur sont égaux en surface: donc aussi il y a égalité entre les surfaces de leurs moitiés; c'est-à-dire entre les triangles qui, comme eux, ont même base & même hauteur. Un tel raisonnement peut ainsi s'étendre à tous les triangles, comme à tous les parallélogrammes possibles; & on doit dire en général que tous les triangles qui ont même base & même hauteur, sont égaux en surface. On doit le dire de même de tous les parallélogrammes. Un triangle quelconque est donc la moitié d'un parallélogramme rectangle dont il a la base & la hauteur; C'est pourquoi il suffit de déterminer quelle est la surface du dernier, pour en conclure celle d'un triangle quelconque.

Considérons le rectangle ADEB (fig. 40) dont la base est AB, & la hauteur DA. Soient partagés, le côté AB en parties qui soient égales à la base *ab* de l'unité de mesure, & le côté DA en parties qui soient aussi égales à la hauteur *ca* de cette même unité. Soient ensuite menées, par les points de division de AB, des parallèles à la hauteur DA, & par ceux de la hauteur des

parallèles à la base. Alors le rectangle se trouve partagé en petits quarrés qui sont tous égaux à l'unité de mesure : & il ne s'agit plus que de déterminer leur nombre, pour désigner, suivant les conventions, la surface du rectangle. Si on n'examine qu'une seule tranche  $AomB$  de cette figure, on voit qu'elle contient autant de quarrés qu'il y a de divisions dans la base  $AB$ . On voit aussi que dans toute la figure, il y a autant de tranches égales à  $AomB$ , qu'on compte de parties égales dans la hauteur  $AD$ ; par conséquent le nombre des parties contenues dans une de ces tranches, (ou le nombre des parties de la base), étant répété autant de fois qu'il y a de parties égales dans la hauteur, le produit doit être le nombre total des quarrés, ou des unités de mesure, renfermés dans l'étendue de ce rectangle. Telle est donc l'expression de sa surface: mais au-lieu de dire, pour indiquer cette surface, qu'il faut multiplier, par le nombre des parties égales de la hauteur, le nombre des quarrés renfermés dans une tranche; on exprime brièvement la surface de ce rectangle, en disant qu'elle est égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur. La surface d'un triangle quelconque est la moitié d'un tel produit; ainsi elle est égale à la moitié de sa base multipliée par sa hauteur. Celle d'un parallélogramme quelconque est donc aussi égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur; puisqu'on peut toujours imaginer un parallélogramme rectangle, qui auroit même base & même hauteur que celui qui seroit à mesurer. La surface d'un parallélogramme dont les côtés sont égaux & les angles de 90 degrés, est donc exprimée par le carré d'un des côtés de cette figure; & c'est par cette raison qu'on a donné, soit à l'unité de mesure, le nom de toise carrée; soit aux divisions de cette unité principale, les dénominations de pied carré, de pouce carré, &c.

Si on demande quelle est la surface d'un polygone quelconque, & tel, par exemple, que *flhig* (fig. 19), il faut le supposer partagé en triangles qui soient formés par des diagonales menées d'un des angles aux autres

angles. Sa surface est alors la somme des surfaces partielles de tous les triangles dont il est composé.

Parmi ces polygones, nous devons remarquer ceux qui étant des quadrilatères, ont deux côtés parallèles. On les nomme des trapezes, &  $ACDI$  (fig. 41) est de cette forme. Ces polygones ne sont ici distingués de tout autre, que parce que leur figure est celle de plusieurs voiles employées dans le gréement des vaisseaux, & parce que d'ailleurs l'expression de leur surface est facile à indiquer généralement. Considérons  $ACDI$ ; ses côtés parallèles sont  $CD$  &  $AI$ , & ils sont nommés les bases supérieure & inférieure, du trapeze dont la hauteur est une ligne  $BD$  ou  $CA$ , perpendiculaire à ces bases. La surface de cette figure, lorsqu'elle a été partagée par une diagonale  $CI$ , est la somme des surfaces particulières des deux triangles  $ACI$  &  $CID$ ; & comme ces triangles ont une hauteur commune  $DB$ , en supposant qu'ils ont pour base, l'un  $CD$ , & l'autre  $AI$ ; la somme de leurs surfaces, ou la surface du trapeze proposé, est égale au produit de la hauteur commune  $BD$ , multipliée par la moitié de la somme des deux bases parallèles. Cette surface peut aussi être exprimée d'une autre manière. Car supposons une ligne  $rq$ , menée à égale distance des deux bases du trapeze, ou par le milieu des côtés  $CA$  &  $DI$ , alors on forme des triangles  $ACI$  &  $rcu$ , qui sont semblables à cause des parallèles; & par conséquent la ligne  $ru$  est la moitié de  $AI$ , comme  $cr$  est la moitié de  $CA$ . On démontre de même par la similitude des triangles  $CID$  &  $uiq$ , que  $uq$  est la moitié de  $CD$ , comme  $iq$  est la moitié de  $ID$ . la ligne  $rq$  toute entière vaut donc la moitié de la somme des deux bases du trapeze: donc la surface de cette figure, qui a été démontrée être égale au produit de la demi somme des bases parallèles, multipliée par la hauteur du trapeze, peut être dite égale au produit de cette hauteur multipliée par un ligne menée à égale distance des deux bases.

Si un polygone est régulier, sa surface est aussi égale à celle des triangles qui peuvent y être formés, par le moyen de diagonales menées d'un des angles aux autres

angles ; mais sa régularité conduit à une expression simple de l'espace qu'elle renferme. On peut supposer un tel polygone inscrit à un cercle (fig. 20), & partagé en triangles, par des rayons tirés du centre de ce cercle aux divers angles du contour. Ces triangles, dont les surfaces ajoutées ensemble composent celle du polygone, ont une même hauteur (109), telle que *og* ou *oh*, en prenant pour base de chacun, le côté du polygone qui lui correspond : par conséquent la somme des surfaces de tous ces triangles, doit être égale au produit de la moitié de la hauteur commune, multipliée par la somme des côtés du polygone. La surface d'un polygone régulier est donc toujours exprimée par le produit de son contour, multiplié par une perpendiculaire abaissée du centre du cercle qui lui est circonscrit, sur un de ses côtés. De-là on peut conclure l'expression de la surface d'un cercle quelconque ; puisqu'on peut regarder un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés. Considérée sous ce rapport, la surface d'un cercle est donc égale au produit de sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon.

Si dans un cercle on ne considère qu'un secteur, tel que *aubo*, ou l'espace renfermé entre un arc *aub* & les deux rayons *oa* & *ob* qui passent par ses extrémités ; sa surface est égale au produit de la moitié du rayon, multipliée par la longueur de l'arc qui sert de base à ce secteur. Car si un secteur est une certaine partie de la surface d'un cercle, l'arc qu'il embrasse doit être la même partie de la circonférence. On peut dire aussi plus directement, qu'un secteur considéré comme une portion d'un polygone régulier d'une infinité de côtés, est composé de triangles, qui sont formés par des rayons menés du centre aux extrémités des lignes élémentaires, qu'on peut supposer dans la longueur de l'arc. Tous ces triangles ont chacun dans le rayon une même hauteur : ainsi, la somme de leurs surfaces, ou la surface du secteur, est égale au produit de la moitié du rayon multipliée, par la somme des bases de ces triangles élémentaires, ou par la longueur de l'arc entier qui sert de base au secteur proposé.

L'espace *agbu* qui est renfermé entre l'arc *aub* & sa corde *agb*, porte le nom de segment; & comme il est la différence du secteur entier *aubo*, au triangle *abo*, sa surface doit être la différence des surfaces des deux figures indiquées. Nous venons de voir comment on mesure la surface d'un tel secteur *aob*. Quant à celle du triangle *aob*, elle est égale, comme on fait, à la moitié de sa base *ba* multipliée par la hauteur *go*. Lorsqu'on ne connoît, pour ce calcul, que le rayon du cercle, & le nombre de degrés de l'arc du secteur; il faut avec ces données, déterminer, & la base, & la hauteur d'un tel triangle. On fait donc, dans le triangle rectangle *og*, la proportion suivante,  $1:ao::\sin.\frac{1}{2}aub:\frac{1}{2}ab$ ; & le terme  $\frac{1}{2}ab$  étant seul inconnu, on calcule sa valeur, qui est celle de la moitié de la base cherchée du triangle *aob*. On détermine aussi la hauteur de ce dernier par cette proportion,  $1:ao::\cos.\frac{1}{2}aub:og$ . Ensuite, après les calculs indiqués, on retranche la surface de ce triangle de celle du secteur, pour parvenir à la surface du segment proposé.

Il est souvent question de mesurer des espaces qui sont terminés par une courbe différente de la circonférence d'un cercle; & parmi ces surfaces toujours supposées planes, on doit citer les couples d'un vaisseau, sa flottaison, ses lignes d'eau, &c. Voici le procédé qu'il faut suivre pour déterminer la surface de pareilles courbes.

Soit *abdc* (fig. 24. G) la moitié d'une ligne d'eau *abde*, ou d'une section faite horizontalement dans le corps d'un vaisseau; & soit demandée l'étendue de sa surface. On peut imaginer son contour *abd* partagé en un très-grand nombre d'arcs, & qui soient si petits que leur courbure soit insensible, ou qu'on puisse les regarder comme autant de petites lignes droites. Alors, si des extrémités de ces arcs, on mène des lignes qui soient perpendiculaires sur une ligne *ad* qui traverse cette ligne d'eau diamétralement, la partie *abdc* de cette surface se trouve partagée en un grand nombre de petites trapezes, dont les surfaces partielles réunies, composent sa surface totale. Si d'ailleurs cette division du

contour  $abd$  est dirigée de manière qu'il y ait une même distance entre chaque perpendiculaire & sa voisine, on obtient ainsi des trapezes qui ont tous une même hauteur  $qs$ . La surface d'un trapeze, comme on l'a vu précédemment, est égale à sa hauteur multipliée par la moitié de ses deux bases parallèles; ainsi la somme des surfaces de tous les trapezes qui composent l'espace  $abdc$ , ou la surface d'une demi-ligne d'eau, est égale au produit de la hauteur  $qs$  (qui est commune à tous ces trapezes) multipliée par la somme des moitiés des bases de tous ces trapezes. Donnons à toutes les perpendiculaires abaissées des divers points du contour de cette demi-ligne d'eau sur son diamètre, le nom d'ordonnées de cette courbe; & remarquons que dans cette figure, chaque ordonnée est en même tems la base supérieure d'un trapeze, & la base inférieure du trapeze adjacent: par conséquent, la somme des demi-bases de tous les trapezes est celle de toutes les ordonnées, lorsque la courbe, telle que  $abd$ , est supposée rencontrer l'axe  $ad$  en deux points  $a$  &  $d$ . la surface  $acdb$  est donc égale alors au produit de la somme des ordonnées de cette courbe, multipliée par leur distance commune. Si la courbe (comme dans la fig. 44. G) ne rencontre l'axe  $cd$  qu'en un seul point  $d$ ; & que la surface demandée  $crado$  soit terminée à une de ses extrémités, par une ligne  $ac$ ; alors l'ordonnée  $ac$  n'est base que d'un seul trapeze. Sa moitié seule doit donc entrer dans la somme des demi-bases de tous les trapezes; & par conséquent la surface d'une courbe, telle que  $cad$ , ou  $qobdc$  (fig. 24. G) est égale au produit de la distance commune des ordonnées, multipliée par la somme de la moitié de la dernière ordonnée  $ca$  ou  $oq$ , & de toutes les autres ordonnées entières, qui sont comprises dans l'espace proposé. Enfin s'il est question de mesurer un espace  $oqcb$ , qui soit terminé à ses deux extrémités par deux lignes droites, telles que  $oq$  &  $bc$ , sa surface est évidemment égale à la distance commune des ordonnées, multipliée par la somme, & de la moitié des deux ordonnées extrêmes, & des ordonnées totales qui sont intermédiaires.

On juge aisément d'après cet exposé; comment on doit mesurer la surface, soit d'un demi-couple *brfa* (fig. 27. G), soit d'un plan diamétral *obdi* (fig. 34. G), soit d'une figure plane & curviligne, telle que *mez* (fig. 26. G), soit enfin de toutes celles qu'on a annoncées comme projetées sur les plans des trois sections principales d'un vaisseau.

132. *Rapports des surfaces planes.* Deux triangles peuvent être, ou égaux, ou semblables, ou différens. Dans le premier cas, il y a égalité entre les produits qui représentent leurs surfaces. Ainsi le produit de la base du premier multipliée par sa hauteur; est égal au produit de la base du second multipliée par sa hauteur; & de ces deux produits, on peut par conséquent conclure une proportion, en regardant les deux facteurs du premier, comme les extrêmes, de cette proportion dont les moyens seroient les deux facteurs du second. On peut donc dire que les bases de ces deux triangles sont en raison inverse de leurs hauteurs.

Remarquons que si deux parallélogrammes sont égaux en surface, on peut établir les mêmes rapports par les mêmes raisons. Ainsi leurs bases sont, dans ce cas, en raison inverse de leurs hauteurs.

Si deux triangles ont une même hauteur, leurs surfaces sont entr'elles comme les bases. Car on peut faire cette proportion (en représentant par *abc* & *edf* [fig. 21] les surfaces de deux triangles dont les hauteurs sont *ao*, *ei*, & les bases *bc*, *df*),  $abc:edf::bc:ao:df:ei$ ; mais les lignes *ao* & *ei* sont supposées égales; & comme le second rapport de cette proportion ne peut pas changer, lorsqu'on divise ses deux termes par la même quantité *ao* ou *ei*; comme d'ailleurs le quotient de la division d'un produit par l'un de ses deux facteurs est l'autre facteur; on peut donc faire cette nouvelle proportion,  $abc:edf::bc:df$ . Deux triangles de même hauteur ont donc des surfaces qui sont entr'elles comme leurs bases. S'ils étoient supposés avoir des bases égales, on démontreroit de même que leurs surfaces sont entr'elles comme leurs hauteurs: & ce qui vient d'être dit pour les triangles, s'applique complètement à deux

parallélogrammes qui sont supposés avoir, ou des bases égales, ou une même hauteur.

133. Si deux triangles sont semblables, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car soient représentés par  $abc$  &  $edf$ , de tels triangles : leurs surfaces en général sont entr'elles comme les produits de leur base par leur hauteur. On a donc cette proportion fondamentale,  $abc:edf::bc.ao:df.ei$ . Mais la similitude, & des triangles comparés, & de ceux qui sont formés par les hauteurs  $ao$  &  $ei$ , rend leurs côtés homologues proportionnels : on peut donc dire,  $ao:ei::ab:ed::bc:df$ ; ou seulement  $ao:ei::bc:df$ , ou enfin  $ao:bc::ei:df$ . Comme un rapport ne change pas en multipliant ses deux termes par une même quantité. Supposons les termes du premier rapport multipliés par  $bc$ , & les deux termes du second par  $df$ ; alors on peut mettre ces produits en proportion, & dire  $ao.bc:ei.df::bc^2:df^2$ . Comparant enfin cette dernière avec la proportion fondamentale, on en conclura celle-ci,  $abc:edf::bc^2:df^2$  (à cause du rapport commun des produits  $ao.bc$  &  $ei.df$ .) Les surfaces des triangles semblables sont donc entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Celles de deux parallelogrammes, ainsi que de deux polygones quelconques, qui sont semblables, ont aussi un rapport égal à celui des quarrés de leurs côtés homologues. Car supposons qu'on ait partagé en triangles par des diagonales tirées d'un des angles aux autres angles, des polygones qu'on peut représenter par  $bcdea$  &  $fghilf$  (fig. 19). Ces triangles comparés deux à deux ont des surfaces qui sont entr'elles comme les quarrés de deux côtés homologues de ces polygones. On peut dire par conséquent, que chaque triangle de  $bcdea$  est à son correspondant dans le polygone  $ghilf$ , comme un de ces triangles est à son correspondant. Dans une telle suite de rapports égaux, on peut dire aussi, la somme des surfaces de tous les triangles du premier polygone, ou la surface de celui-ci, est à la surface du second, comme un triangle du premier est à son correspondant dans le second; ou comme le quarré



d'un côté du premier, est au carré du côté homologue du second polygone. Les surfaces des polygones qui sont semblables, sont donc entr'elles comme les carrés des côtés homologues.

Deux cercles, qui sont des figures semblables, doivent donc avoir des surfaces qui sont entr'elles dans le rapport des carrés des rayons ou des diamètres; & on doit en dire autant de deux secteurs, ou de deux segments, qui ont pour base des arcs d'un même nombre de degrés.

C'est de ces propositions qu'on pourroit encore conclure la propriété déjà prouvée des triangles rectangles; savoir, que le carré de leur hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de leur angle droit. Car soit *bac* (fig. 21) un triangle dont l'angle *bac*, est de 90 degrés; & soit abaissée de *a*, sur l'hypoténuse *bc*, la perpendiculaire *ao*, qui est en même tems la hauteur commune des trois triangles rectangles *abc*, *abo*, *aoc*; tandis qu'ils ont pour base, le premier *bc*, le second *bo*, & le troisieme *oc*. Sous ce rapport, les surfaces de ces triangles sont entrelles comme les bases; & comme d'ailleurs ces figures sont semblables, elles sont aussi comme les carrés de leurs hypoténuses. C'est pourquoi, à cause du rapport des surfaces qui est commun à ces deux proportions indiquées, on peut dire, que les carrés des hypoténuses de ces triangles sont entr'eux comme leurs bases, ou  $ab^2:bo::ac^2:oc$ . on en conclut que  $ab^2+ac^2:bo+oc$  ou  $bc::ab^2:bo$ ; mais comme on peut dire aussi que  $ab^2:bo::bc^2:bc$ , il en résulte que  $ab^2+ac^2:bc::bc^2:bc$ : proportion qui par l'identité de ses conséquens, démontre l'égalité de ses antécédens; c'est-à-dire que le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle *abc*, est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Si un triangle rectangle, tel que *adc* (fig. 29), est considéré, comme on peut toujours le faire, dans un cercle dont le diamètre est son hypoténuse; alors les côtés de l'angle droit *ad* & *dc*, deviennent deux cordes; & par conséquent, les carrés de ces cordes qui passent par les extrémités d'un diamètre, tel que *ac*, sont en-

tr'eux comme les segmens de ce diametre, qui leur correspondent, & qui sont formés par des perpendiculaires abaissées des extrémités de ces cordes, sur le même diametre. Un semblable rapport a lieu entre les quarrés de deux cordes qui dans un cercle, sont menées d'une même extrémité d'un de ses diametres. En effet, soient les cordes  $ao$  &  $ad$ ; & soient abaissées, des extrémités  $o$  &  $d$ , sur le diametre  $ac$ , deux perpendiculaires  $oe$  &  $db$ ; ces cordes deviennent les côtés d'un angle droit dans deux triangles rectangles, en menant les lignes  $oc$ , &  $dc$ : ainsi on peut dire (conséquemment à ce qui vient d'être démontré) dans le premier triangle  $aoc$ ,  $ao^2:ae::ac^2:ac$ ; & dans le 2.<sup>e</sup>  $adc$ ,  $ad^2:ab::ac^2:ac$ : d'où on conclut que  $ao^2:ad^2::ae:ab$ ; c'est-à-dire que les quarrés de deux cordes, qui, dans un cercle, partent des extrémités d'un même diametre, sont entr'eux comme les segmens correspondans de ce diametre sur lequel des perpendiculaires sont abaissées des extrémités des cordes.

134. On peut faire dans la marine plusieurs applications des résultats qui précèdent. Les voiles des vaisseaux, par exemple, sont, ou des triangles, ou des trapezes, ou des quadrilateres. Celles qui sont triangulaires, telles que les focs, & plusieurs voiles d'étai, doivent donc être égales en surfaces, ou lorsque leurs côtés sont égaux, ou lorsqu'elles ont même chute & même bordure, ou lorsque leurs bordures sont en raison inverse de leur chute. Si, telles que les voiles qu'on nomme quarrées, elles ont la forme de trapezes, leurs surfaces sont entr'elles comme les produits de leur chute, par la somme de l'envergure & de la bordure; de sorte que lorsque leur chute est la même, leurs surfaces suivent le rapport des sommes de l'envergure & de la bordure de chacune. Si les formes des voiles comparées sont semblables, leurs surfaces sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; & par conséquent comme ceux de leur chute ou de leur bordure, &c.

Le rapport de la surface du gouvernail d'un vaisseau, à celle du gouvernail d'un autre vaisseau, est fondé

fondé sur les mêmes bases & exprimé de la même manière; puisque (fig. 35. G), dans un gouvernail *eubdea*, qui est attaché à un vaisseau flottant, la partie *abdc*, qui seule est plongée dans l'eau, peut être considérée comme ayant pour face un trapeze, dont la hauteur est *bd*. Ainsi les tirans d'eau de deux vaisseaux étant les mêmes, les surfaces de leur gouvernail sont entr'elles comme les sommes des deux largeurs, mesurées au niveau, de l'eau & de la quille. Si ces machines ont des faces semblables, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou des tirans d'eau des vaisseaux.

C'est ainsi qu'on peut calculer le rapport des surfaces, ou des pales B de deux aviroirs (fig. 74. G), ou de celles de deux pagaies (fig. 76. G), ou des pattes R & B de deux ancres (fig. 80. G).

Si une ligne d'eau, telle que *abde* (fig. 24. G), est semblable à une autre section horizontale d'un vaisseau, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs longueurs, telles que *ad*, ou de leurs largeurs principales, telles que *bce*. Si deux couples, tels que *bme* & *tnr* (fig. 22 & 23. G) sont semblables; on peut dire que leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs largeurs principales *be* & *tr*, ou de leurs creux *cm* & *en*. Ces principes fournissent donc des moyens de comparer des figures données, & de conclure aisément les rapports de leurs surfaces.

135. Il peut être question, dans certaines circonstances, de construire une figure qui soit semblable à une autre figure connue; en supposant d'ailleurs un rapport déterminé entre les surfaces de l'une & de l'autre. Ainsi il est à propos d'indiquer comment on doit s'y prendre pour trouver la figure demandée. Soit proposé, par exemple, de faire une voile qui ne présente que les trois quarts de la surface d'une autre voile donnée, & qui soit d'ailleurs semblable à celle-ci. Nous avons vu (116) qu'il est toujours facile de tracer le contour d'un polygone qui doit être semblable à un autre connu, lorsqu'on fait quelles sont & la longueur & la position d'un des côtés du polygone cherché. Ainsi la

solution de la question proposée exige seulement de déterminer la grandeur, par exemple, de l'envergure de la voile dont on demande la figure. Cette voile & celle à laquelle elle est comparée sont entr'elles, d'après les conditions énoncées dans la question, & comme les quarrés de leurs côtés homologues, & comme 3 est à 4. C'est pourquoi le rapport de 3 à 4 est égal à celui des quarrés des envergures de ces deux voiles. Soit  $acdb$  (fig. 42) la forme de la voile connue, & nommons  $x$  l'envergure cherchée: on doit faire cette proportion (B)  $4:3::cd^2:x^2$ . On voit que ce 4.<sup>e</sup> terme ou le quarré de l'envergure de la nouvelle voile, peut être calculé arithmétiquement. Il faut, à cet effet, élever au quarré la longueur de l'envergure  $cd$  (estimée en toises ou pieds), & multiplier ce quarré par  $\frac{3}{4}$ , alors la racine quarrée du résultat est la longueur de l'envergure demandée. Mais cette recherche du même objet peut être faite géométriquement, à l'aide des propositions précédentes, & le procédé est utile à connoître. Soient portées sur une ligne indéfinie (fig. 29) sept ouvertures égales de compas, & soit  $ae$  la somme de leurs longueurs; de manière que dans  $ae$ , il y ait quatre de ces parties égales, & trois dans  $ec$ . Soit décrite sur cette ligne  $ac$ , comme diamètre, une demi-circonférence: Soient menées deux cordes, des deux extrémités du diamètre, à l'extrémité  $o$  d'une perpendiculaire élevée sur  $ac$ , au point de séparation des deux parties  $ae$  &  $ec$ . si ensuite on porte sur  $ao$  (à compter du point  $o$ ) la longueur de l'envergure  $cd$  de la voile donnée, & que par le point  $r$  son extrémité, on tire une ligne  $rz$  parallèle au diamètre  $ac$ ; cette parallèle doit couper sur la seconde corde  $oc$ , une partie  $oi$ , dont la longueur est celle d'une voile qui doit être semblable, à la voile dont l'envergure est égale à  $ot$ , & qui doit n'avoir que les  $\frac{3}{4}$  de la surface de celle-ci. En effet, les cordes  $ao$  &  $oc$  sont, à cause des parallèles, proportionnelles aux parties  $ot$  &  $oi$ ; c'est-à-dire qu'on peut faire cette proportion,  $oa:oc::ot:oi$ ; & en prenant les quarrés de ces termes,  $oa^2:oc^2::ot^2:oi^2$ . mais il est démontré, par la construction & par les démonstrations

antérieures, que  $oa^2:oc^2::ae:ec::4:3$ : donc aussi on peut dire  $4:3::oi^2:oi^2$ . Ainsi comparant cette dernière proportion avec celle (B) qui a été démontrée devoir donner la longueur de l'envergure cherchée; on conclut de l'identité des trois premiers termes, l'égalité des quatrièmes; c'est-à-dire que la partie *oi* de la corde *oc* est réellement la longueur de l'envergure cherchée. Si on propose ensuite de tracer, d'après cette nouvelle envergure, la figure de la voile demandée; on porte la grandeur de *oi* sur *cd* (fig. 42). Soit cette longueur *ci*, & soit menée, du point *c*, une diagonale *cb* sur la surface de la voile donnée. Soient aussi tirées, par le point *i*, une parallèle à *db*, & par le point *b* (où la précédente rencontre la diagonale *cb*), une parallèle à la bordure *ab*: la figure ainsi formée est celle d'une voile telle, que sa surface est les trois quarts de celle de la voile *cdba*, à laquelle elle est d'ailleurs semblable. ces rapports indiqués sont faciles à vérifier. Car d'après la construction, les triangles formés dans ces voiles sont semblables, & par conséquent ces voiles sont semblables. Ensuite leurs surfaces sont entr'elles comme les carrés de leurs envergures; & ces carrés ont été faits dans le rapport de 4 à 3: donc toutes les conditions de la question se trouvent parfaitement remplies par une telle construction.

On pourroit varier de tels problèmes; & les procédés à suivre pour les résoudre, resteroient toujours les mêmes.

136. Lorsqu'on se propose de calculer la surface d'un cercle dont le diamètre est donné, on peut le faire directement, en cherchant la grandeur de sa circonférence (115), & en la multipliant par le quart de son diamètre. Mais on peut aussi la déterminer, par les rapports indiqués; c'est-à-dire, en la comparant à la surface d'un cercle qui ayant 7 pieds de diamètre, a 22 pieds de circonférence, & en établissant, par une proportion, que ces surfaces sont entr'elles comme les carrés de leurs diamètres. Si, par exemple, on demande quelle est la surface de la bouche d'un canon, dont le diamètre est de 6 pouces. On sait que le cercle qui a 7 pieds de diamètre & 22 pieds de circonférence,

doit avoir (22. $\frac{7}{4}$ ) pieds de surface ; & le rapport simplifié, de cette surface au quarré de son diametre, est celui de 11 à 14 : on doit donc, pour satisfaire à la question proposée, faire cette proportion, 11:14::36: $x$  (parce que le quarré de 6 pouces est de 36 pouces quarrés). La surface cherchée du cercle proposé, qui est le quatrieme terme (seul inconnu dans cette proportion), est donc de 28 $\frac{2}{7}$  pouces, & telle est la grandeur de la bouche du canon désigné.

Si on demande la surface d'un secteur pris dans le même cercle, & en supposant que l'arc qui lui sert de base est de 45 degrés, on doit la chercher en considérant que le rapport de cette surface à celle du cercle entier, est celui de 45 à 360, ou de 1 à 8. Le calcul le donneroit ainsi de 3 $\frac{1}{2}$  pouces. Mais il est à-propos de présenter un autre moyen de déterminer cette étendue, en la regardant comme le produit de la longueur de l'arc qui lui sert de base, multipliée par le quart du diametre. La longueur de cet arc est proportionnée à celle de la circonférence entière, & on trouve cette dernière par l'égalité du rapport de deux circonférences à celui de leurs diametres, ou en disant, 7:22::6: $x$ . Ainsi la circonférence cherchée, qui est ici représentée par  $x$ , a en longueur  $\frac{132}{7}$  pouces. Telle est donc la longueur des 360 degrés ; & on en conclut celle de 45 degrés, par cette proportion, 360:45:: $\frac{132}{7}$ : $y$ . La longueur de l'arc de 45 degrés dans cette circonférence, & qui est représentée par  $y$ , est donc de  $\frac{132}{56}$  de pouces ; & en la multipliant par  $\frac{6}{4}$  ou  $\frac{3}{2}$  pouces, on trouve que la surface du secteur proposée est, comme précédemment, de 3 pouces  $\frac{1}{2}$ .

Les surfaces des figures planes ne peuvent pas être toujours déterminées, ou par des calculs aussi faciles, ou à l'aide de certains rapports simples, tels que ceux qui viennent d'être employés : & pour prévoir tous les cas, nous allons faire connoître comment on calcule ces surfaces, par des combinaisons directes de leurs dimensions, conformément aux principes exposés précédemment.

Soit proposé, par exemple, de déterminer la surface

d'une voile telle qu'un hunier *cdab* (fig. 42) qu'on doit considérer comme un trapeze. Soit suppose que sa chute ou sa hauteur est de 9 toises 4 pieds 5 pouces, & la somme de son envergure & de sa bordure, de 23 tois. 5 pieds 2 pouces, alors sa surface est égale au produit de 11 toises 5 pieds 7 pouces, par 9 toises 4 pieds 5 pouces (on prend ici la toise pour l'unité de mesure de la longueur des lignes, & la toise quarrée pour l'unité de mesure des surfaces). Cette multiplication peut être faite par le procédé qui a été indiqué pour celle des nombres complexes; mais un tel calcul ne se rapporte pas assez à l'esprit & à l'intention des démonstrations précédentes. En effet nous avons vu que la surface d'un parallélogramme rectangle n'est autre chose que la répétition d'une surface ou d'une tranche (fig. 40) [qui a pour hauteur l'unité de mesure], prise autant de fois qu'il y a de tranches; ainsi la surface d'une figure quelconque ne peut être aussi que la répétition d'une surface déterminée & connue. C'est pourquoi, considérons la surface cherchée du hunier proposé, comme celle d'un parallélogramme qui auroit pour base 11 toises 5 pieds 7 pouces, & pour hauteur 9 toises 4 pieds 5 pouces; & qui par conséquent doit contenir dans sa surface un parallélogramme de 11 tois. 5 pieds 7 pouces de base & 1 toise de hauteur, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 9 tois. 4 pieds 5 pouces.

On pourroit comparer aussi cette surface cherchée à celle d'un parallélogramme qui auroit la même base & une toise de hauteur. Ces deux surfaces sont entr'elles comme leurs hauteurs: on peut donc faire cette proportion, la surface cherchée ou  $x$ : (11 t. 5 p. 7 p.). 1 toise:: 9 tois. 4 pieds 5 pouces: 1 toise; c'est-à-dire que pour calculer cette surface, il faut répéter la surface d'un parallélogramme qui a 11 tois. 5 pieds 7 pouces de base sur une toise de hauteur, autant de fois qu'il y a d'unités dans 9 toises 4 pieds 5 pouces, & cette dernière dimension faisant fonction de multiplicateur, est regardée comme un nombre abstrait. Ces deux manières d'envisager le même objet, indiquent donc le même

procédé à suivre pour parvenir à trouver la surface demandée ; & il en résulte qu'il faut multiplier 11 toises 33 pieds 72 pouces (ou la surface d'un parallélogramme qui a une toise de hauteur sur 11 toises 5 pieds 7 pouc. de base), par 9 tois. 4 pieds 5 pouc. Cette multiplication doit être faite suivant les règles ordinaires de la multiplication des nombres complexes, par parties aliquotes ; mais il faut, dans l'exécution, avoir toujours présentes quelques valeurs relatives, soit des unités & de ses parties, soit de certains produits dont la connoissance facilite les opérations. Il faut savoir que la toise quarrée étant un parallélogramme rectangle de 6 pieds de hauteur, sur 6 pieds de base, a 36 pieds de surface ; que le pied quarré vaut, par une raison semblable, 144 pouces quarrés ; que le produit d'une toise par un pied, ou que la surface d'un parallélogramme qui a une toise de hauteur, sur un pied de base, est de 6 ppi. ; que le produit d'une toise par un pouce doit être douze fois plus petit que celui qui exprime la surface du précédent parallélogramme, & que par conséquent il vaut un demi-pied quarré, ou 72 po. quarrés, &c.

Après ces préliminaires, voici les détails généraux de la multiplication proposée. Le multiplicande doit être 11 tt 33 pp 72 ppo, & le multiplicateur 9 t 4 p 5 p. Ces deux facteurs étant écrits, le premier au-dessus du second, on commence par répéter 11 tt neuf fois, & le produit est 99 tt. Comme une toise quarrée répétée neuf fois, donne un produit de 9 tt, la partie aliquote 18 ppi. étant multipliée par 9, doit être la moitié de ce produit, c'est-à-dire 4 tt 18 ppi. on trouveroit ainsi le résultat de la multiplication par 9, & des autres pieds quarrés, & des 72 ppo. du multiplicande. Après ces premières opérations, le

11 <sup>tt</sup>	33 <sup>ppi</sup>	72 <sup>ppo</sup>
9 <sup>to</sup>	4 <sup>pi</sup>	5 <sup>po</sup>
99 <sup>tt</sup>	0 <sup>ppi</sup>	0 <sup>ppo</sup>
4	18	
3	0	
0	27	
0	4	72
5	34	108
1	35	84
0	23	124
0	5	139
116 <sup>tt</sup>	5 <sup>ppi</sup>	95 <sup>ppo</sup>



le multiplicande entier doit être multiplié d'abord par la partie 3 pi. du multiplicateur; & il en doit résulter un produit qui est la moitié du multiplicande, puisque le produit de celui-ci multiplié par une toise, ou répété une fois, ne peut pas différer du multiplicande même. Ensuite le multiplicateur étant un pied, le produit doit être le tiers du précédent qu'on vient d'indiquer, & ainsi de suite. Par ce moyen, ou plutôt par ces raisonnemens, on parvient, en ajoutant les produits partiels, ou les toises quarrées, les pieds & les pouces quarrés qui les composent, à obtenir pour produit total 116 tt. 5 ppi. 95 ppo.

Il peut quelque fois être proposé, (étant données, par exemple, l'envergure & la bordure d'un hunier, ainsi que sa surface totale); de déterminer la chute qu'une telle voile doit avoir; & il faut indiquer les regles qu'on doit suivre pour connoître cette dimension. Soit cette surface donnée de 116 tt. 5 ppi. 95 ppo. Elle est le produit de deux facteurs; & sans doute il faut la diviser par l'un des deux pour obtenir l'autre au quotient. Mais quel doit être ce facteur? On sait qu'une surface, telle que le dividende supposé, ne peut contenir qu'une autre surface; ainsi, dans la division indiquée, le diviseur ne peut être qu'une surface: & elle est facile à assigner, puisque la surface proposée n'est que la répétition de celle d'un parallélogramme dont la hauteur est d'une toise, & dont la base est égale à la demi-somme de l'envergure & de la bordure de la voile proposée. (Cette demi-somme est dans cette question, de 11 tois. 5 piéds 7 pouc.). Ce raisonnement est encore confirmé dans son résultat, par celui d'un autre principe. On sait que les parallélogrammes de même base ont des surfaces qui sont entr'elles comme leur hauteur: ainsi, comparant la surface proposée (qu'on peut regarder comme celle d'un parallélogramme qui a pour base 11 t. 5 pi. 7 po. & une hauteur cherchée), à la surface d'un autre parallélogramme qui a la même base & une toise pour hauteur: on doit faire cette proportion, 11 tt. 33 ppi. 72 ppo : 116 tt. 5 ppi. 95 ppo. :: 1 : x. (le premier terme exprime la surface d'un parallélogramme qui a une toise

de hauteur, sur 11 to. 5 pi. 7 pouces de base). Le 4.<sup>e</sup> terme de cette proportion, qui est la dimension cherchée, est donc, comme on l'a dit auparavant, le quotient de la division de la surface donnée, par celle que nous avons indiquée. Cette opération est facile à faire en réduisant le dividende & le diviseur en pouces carrés, & en se conformant aux règles ordinaires de la division. le résultat est 9 to. 4 pi. 5 po.; c'est-à-dire que la chute d'un tel hunier proposé doit avoir cette longueur. Ce qui se trouve d'accord avec les calculs précédens.

On pourroit cependant parvenir au même résultat, en divisant une ligne seulement par une ligne, au-lieu de diviser, comme on vient de le faire, une surface par une surface. Car les deux termes du premier rapport de la proportion précédente, peuvent être regardés l'un & l'autre comme exprimant les surfaces de deux parallélogrammes, qui auroient, l'un 11 toises 5 pieds 7 pouces de base, sur une toise de hauteur, & l'autre la même hauteur, sur une base de 116 toises 0 pieds 11  $\frac{2}{3}$  pouces. D'après une telle considération, si on substitue à la place de ce premier rapport, celui des surfaces des deux parallélogrammes qui ont tous deux une même hauteur d'une toise; ou celui de leurs bases, qui est un rapport équivalent, la première proportion se change en celle-ci, 11 toif. 5 pieds 7 pouces: 116 toif. 0 pieds 11  $\frac{2}{3}$  pouces:: 1: x. On doit donc trouver x, ou la chute cherchée du hunier, en regardant la surface donnée, comme celle d'un parallélogramme, qui n'a qu'une toise de hauteur; & en divisant la base que doit avoir un tel parallélogramme, par la dimension donnée de la voile proposée. Le quotient est alors, comme précédemment, 9 to. 4 pi. 5 po.

## ARTICLE TROISIEME.

*Des solides.*

137. Tous les corps que présente la nature sont autant de solides ; parce que le lieu qu'ils occupent dans l'univers est étendu dans tous les sens. Leur forme est prononcée par des faces planes ou courbes , qui embrassent plus ou moins de surface , & cette portion de l'espace qui est comprise & terminée par ces faces est nommée leur solidité.

Jusqu'ici nous avons considéré, comme séparés, détachés, isolés des corps, & les lignes qui forment leurs arrêtes ou leurs dimensions; & les faces qui circonscrivent leur grandeur; & les plans de ces faces; ainsi que ceux de toutes les sections qu'on peut imaginer dans ces corps. Les surfaces ont été aussi supposées sans épaisseur: on n'a vu dans les lignes que leur longueur; & les points ont été imaginés sans étendue. C'est dans cet état idéal, qu'on a mesuré, soit des lignes droites & circulaires, soit des surfaces, soit des angles plans & rectilignes; & qu'on a déterminé leurs rapports généraux ou particuliers. Ainsi tous les objets des démonstrations qui ont été présentées depuis le commencement de ce traité de géométrie, n'ont pas été envisagés dans l'ordre naturel des choses, mais dans un ordre absolument imaginaire. Actuellement il convient de sortir de cette sphere de fictions, pour entrer dans celle du monde physique; mais il faut apporter dans celle-ci, toutes les lumières qui peuvent avoir été acquises par les premières recherches, qui d'ailleurs n'ont été faites que parce qu'elles s'appliquent & entièrement & immédiatement aux formes de tous les corps connus.

Déjà nous avons annoncé (90) quels sont les solides qui sont directement des objets de la géométrie élémentaire. Nous avons cité, les prismes, les pyramides, les cylindres, les cônes, les spheres. C'est donc à ces corps qu'il faut d'abord faire l'application de toutes les pro-

positions précédentes, & il faut démontrer aussi l'extension de cette application à tout autre solide.

Les arrêtes rectilignes & les dimensions des corps, peuvent être mesurées, comme on l'a dit de toutes les lignes droites (93), en les considérant comme étendues & appliquées sur des plans, qu'on imagine, ou sur le contour, ou dans l'intérieur de ces corps. C'est ainsi que, dans une pyramide  $adbc$  [fig. 5] (& qui est nommée triangulaire, parce que sa base  $dbc$  est un triangle), si on abaisse du sommet  $a$ , une perpendiculaire  $au$  sur le plan de sa base; cette ligne  $au$ , qui est nommée la hauteur de cette pyramide, peut être supposée & mesurée dans un plan quelconque qui passe par cette même ligne. On doit en dire de même, & des arrêtes  $ad$ ,  $ab$ ,  $ac$ , qui sont les intersections communes des faces planes de cette pyramide; & des côtés quelconques de la base  $bdc$ ; & de toutes les lignes droites qu'on peut imaginer ou qui sont visibles, dans les prismes ainsi que dans tous les corps naturels.

L'application de ce qui a été dit sur les circonférences des cercles doit aussi être faite dans toute son étendue, aux bases, des cylindres (fig. 4), & des cônes (fig. 6), ainsi que toutes les sections circulaires qu'on peut supposer faites dans des sphères (fig. 7). Quelles que soient enfin les lignes droites, menées dans un espace occupé par des corps, on peut toujours les considérer & les comparer successivement deux à deux, dans un même plan; alors la forme de calcul, indiquée précédemment, doit être adoptée pour déterminer, & les angles, & les côtés ou les contours, soit des triangles, soit des polygones de toute sorte, qui dans les corps sont tracés, sur leurs surfaces planes, ou sur les plans de certaines sections supposées. Les angles que des faces planes ou des sections diverses des corps peuvent faire entr'elles, sont soumis aussi aux mêmes mesures que les angles plans dont on a appris à estimer la grandeur; & comme ceux-ci, ils trouvent leurs mesures dans celles de certains angles rectilignes.

138. *Surfaces des solides.* La surface d'un corps est la somme des surfaces de ses faces; comme le contour

d'un polygone est la somme des côtés qui le terminent. Ces faces peuvent être planes ou courbes. Les surfaces des premières doivent être mesurées comme celles des polygones; & les cercles, par des considérations particulières, ayant été compris dans la classe générale des polygones rectilignes, on peut en conclure des préceptes, sur les mesures des surfaces courbes des corps, tels que des cônes, des cylindres & des sphères, puisque, par leur forme, ils présentent des analogies avec la figure circulaire.

Soit une pyramide quelconque *adbc* (fig. 5). Sa surface est composée de celles de toutes ses faces triangulaires (car on est convenu de ne pas compter l'étendue de la base *bdc* comme une portion de cette surface). La base peut être un polygone quelconque, & le nombre de ses côtés est celui des faces latérales de la pyramide. Lorsqu'une perpendiculaire *au* est abaissée du sommet *a* sur le plan de la base *bdc*, pour représenter la hauteur de cette pyramide, & lorsque cette ligne *au* passe par le centre de la base, dans le cas où cette base est un polygone régulier; une telle pyramide est distinguée sous le titre de pyramide droite & régulière. Ses faces, ainsi que ses arrêtes, sont alors parfaitement égales; mais il n'en est pas de même, si la base n'est pas un polygone régulier, ou si la hauteur de la pyramide ne passe pas par le centre de sa base supposée régulière; alors la pyramide est nommée irrégulière.

On obtient la surface de cette dernière, en prenant séparément celle de chacune de ses faces, & en les ajoutant toutes ensemble. La surface de la face *abc* est le produit du côté *bc* de la base de la pyramide, multiplié par la moitié de la hauteur *az* de cette face. (cette ligne *az* est abaissée perpendiculairement du sommet *a* de la pyramide, sur le côté *bc* de la base). Si on prend ainsi successivement le produit de chaque côté de la base de cette pyramide, par la demi-hauteur de la face correspondante; la somme de ces produits doit exprimer la surface entière de la pyramide supposée irrégulière. dans le cas où elle seroit régulière, sa surface seroit plus facile, soit à mesurer, soit à exprimer; car

alors la hauteur de chaque face est nécessairement une même ligne, telle que  $az$ . Ainsi la somme des surfaces de toutes les faces, est égale au produit du contour de la base, multiplié par la moitié de la hauteur d'une des faces.

Si une pyramide est tronquée parallèlement à sa base, ou si d'une pyramide entière  $adbc$ , on a soustrait une partie pyramidale  $ariq$ , dont la base particulière  $riq$  est parallèle à  $dbc$ ; la surface de ce tronc  $rdbcqi$ , est composée de celle, de toutes ses faces qui sont devenues autant de trapezes. Lorsqu'un tel tronc appartient à une pyramide droite & régulière, sa surface est alors égale au produit de la longueur  $iz$  (hauteur d'une des faces), multipliée par la demi-somme des contours des deux bases parallèles  $riq$  &  $dbc$ . Mais la pyramide  $abcd$  n'étant pas régulière, alors on doit mesurer séparément la surface de chacune de ses faces, & on les réunit en une même somme, pour composer la surface totale du tronc supposé.

Enfin lorsque la base supérieure  $riq$  n'est pas parallèle à la base inférieure  $bcd$ , les faces du tronc, ne sont plus que des quadrilatères irréguliers; & la surface du tronc est l'assemblage des surfaces, de toutes ces figures qu'on mesure comme celle d'un polygone quelconque.

139. Nous avons déjà remarqué qu'une pyramide a toujours autant de faces que sa base a de côtés: ainsi en supposant que cette base soit un polygone régulier d'une infinité de côtés, elle devient un cercle; & la pyramide reçoit alors le nom de cône. Ce cône est droit, si sa hauteur  $ao$  (fig. 6) passe par le centre  $o$  du cercle qui lui sert de base; & sa surface, mesurée comme celle d'une pyramide droite & régulière, est égale au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté  $ab$ . Ce cône est oblique, lorsque sa hauteur  $au$  ne passe pas par le centre de sa base. Dans ce cas, il faut, pour obtenir sa surface, décomposer le contour  $cabe$  de sa base, en petites lignes droites élémentaires infiniment petites. Alors on mesure séparément tous les triangles dont la base est un de ces éléments, & dont le sommet est au point  $a$ , pour former

par leur réunion la surface entière d'un tel cône. Un cône droit  $acb$  est-il tronqué parallèlement à sa base? la surface du tronc  $kcdblu$  est égale au produit du côté  $lb$ , multiplié par la moitié des circonférences des deux bases  $kul$  &  $cd$ ; ou ce qui revient au même, par la circonférence  $fei$ , qui tient le milieu entre les deux bases parallèles de ce tronc de cône.

140. Soit un prisme dont on se propose de mesurer la surface. La forme d'un tel corps a été définie précédemment [90]; & il est droit ou oblique, suivant que ses arrêtes, telles que  $ab$ ,  $fc$ ,  $ed$  [fig. 3], sont ou perpendiculaires, ou obliques aux bases parallèles  $afe$  &  $bcd$ . Sa surface est estimée par celle de toutes ses faces latérales, qui sont autant de parallélogrammes; c'est-à-dire, par la somme des produits de la base de chacun de ses parallélogrammes, multipliée par leur hauteur. Ainsi supposons qu'il soit question de mesurer la surface d'un prisme droit. Ses arrêtes, qui sont perpendiculaires aux plans de ses bases, le sont aussi sur les côtés de ces mêmes bases: par conséquent l'arrête  $ab$ , par ex., peut être prise, pour la base particulière d'une face, telle que  $abcf$ , & sa hauteur est alors la ligne  $bc$ , qui est le côté d'une base de ce prisme droit. En raisonnant de la même manière sur chaque face; & en remarquant qu'elles ont toutes une même base, qui est une des arrêtes du prisme; on conclut aisément que la surface d'un prisme droit est égale au produit d'une de ses arrêtes, multipliée par le contour d'une des bases. Si un prisme est oblique, ou si ses arrêtes ne sont pas perpendiculaires sur le plan de la base  $bdc$ ; on peut supposer encore que chaque arrête ne cesse pas de servir de base à chaque face de ce prisme, & alors la recherche de la surface de ce solide exige que la hauteur de ces faces soit désigné. C'est pourquoi on imagine dans ce cas, que ce prisme soit traversé par un plan  $onm$ , auquel chaque arrête soit perpendiculaire. Par une telle construction, l'intersection de ce plan avec celui de chaque face; ou chaque côté de la section  $onm$ , qui est nécessairement perpendiculaire à chaque arrête correspondante du prisme, représente la hauteur de chaque

face. La somme, des surfaces de ces parallélogrammes, qui sont les faces du prisme oblique; ou la surface de ce prisme; est donc égale au produit d'une de ses arrêtes, multipliée par la somme des hauteurs de ses faces, ou par le contour d'une section, au plan de laquelle les arrêtes sont perpendiculaires.

Telle est l'expression de la surface d'un prisme quelconque: elle est indépendante du nombre de ses arrêtes, ou de celui des côtés de sa base. Ainsi, en supposant que le nombre de ces côtés soit infiniment grand, ou que sa base soit un cercle qui est un polygone régulier d'une infinité de côtés, ce solide, dont la forme est celle d'un cylindre [fig. 4], a une surface qui est exprimée comme celle d'un prisme. Un cylindre est-il droit? sa surface est égale au produit de la circonférence  $nprq$  de sa base par la longueur de son côté  $on$ . Mais est-il oblique? on doit imaginer une section  $zx$ , faite dans ce cylindre, de manière que le côté  $on$  soit perpendiculaire à son plan; & la surface de ce solide est alors exprimée par le produit du contour de cette section  $zx$ , multiplié par le côté  $on$ .

141. L'expression de la surface d'une sphere peut être déterminée par les mêmes principes. Soit une sphere NOSE [fig. 43], dont un diametre est NS, & dont C est le centre. Soit un de ses grands cercles NOSE, qui peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, ou comme ayant une circonférence divisée en un nombre infini de petites lignes droites élémentaires, & telles que  $ac$ . Soit aussi  $ode$  un autre grand cercle, au plan duquel le cercle NOSE est supposé perpendiculaire. Si on imagine dans cette sphere une infinité de sections, qui, paralleles au plan  $ode$ , sont dirigées par tous les points de division, tels que  $a$ ,  $b$  &  $c$  de la circonférence entiere NOSE; ces sections sont autant de cercles plus ou moins grands. car supposons que pour chaque point  $u$  du contour extérieur d'une de ces sections, on ait formé un triangle rectangle  $mcu$ : de tels triangles sont tous égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. En effet, les lignes  $uc$  &  $mc$  ne changent pour



aucun des points de cette section ; & l'angle  $mcu$ , qui dans tous ces triangles a pour mesure un arc égal à  $uN$ , est constamment le même : par conséquent, la distance de chaque point du contour de la section supposée, à l'égard du point  $m$ , est égale à la ligne  $um$  ; ou, ce qui revient au même, tous les points du contour de cette section sont dans un même plan, & également éloignés d'un point  $m$  qui appartient à ce plan. Cette section est donc un cercle qui a pour centre le point  $m$ , & pour rayon la ligne  $um$ . On démontreroit de même que toutes les autres sections parallèles à  $odE$  sont autant de cercles ; & à cause de leurs situations respectives, nous les nommerons désormais des parallèles. Si la circonférence du cercle  $odE$  est aussi divisée en une infinité de parties égales, telles que  $od$  ; & si on imagine un autre grand cercle  $Nrzd$ , dont le plan soit perpendiculaire à  $odE$  ; alors considérons l'espace  $aczr$ , qui est renfermé sur le contour de la sphere, entre les deux plans des cercles  $NDSC$ ,  $NOSE$ , & entre deux arcs parallèles  $ar$  &  $c\zeta$ . Comme l'arc  $ac$  peut être considéré comme une petite ligne droite, & qu'il en est de même des autres arcs  $ar$  &  $c\zeta$  ; l'espace  $arc\zeta$  a la forme d'un trapeze rectiligne. En menant parallèlement, & à égale distance de ses deux bases  $ar$  &  $c\zeta$ , le petit parallèle  $bu$  ; il est démontré que sa surface est égale au produit de  $bu$ , multiplié par  $r\zeta$  (131). On peut exprimer de la même manière, les surfaces de tous les petits trapezes, qui, sur le contour de la sphere, sont compris entre les deux cercles parallèles qui passent par les points  $a$  &  $c$ , ou qui composent la surface d'une tranche de la sphere : La surface entière d'une telle tranche est donc égale au produit de l'arc  $r\zeta$ , multiplié par la circonférence, qui a pour rayon  $um$ . Cherchons maintenant une autre expression de cette même surface, ou un produit qui, équivalent à celui qui la représente, soit propre à indiquer des rapports généraux entre toutes les tranches qui composent la sphere. Imaginons que dans le plan  $NrdC$ , on mene une ligne  $ri$ , qui soit perpendiculaire à  $\zeta x$ , après avoir tracé dans ce plan les lignes  $uc$  &  $\zeta x$ . Alors les deux triangles  $umc$  &  $r\zeta i$  sont semblables,

comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun : on peut donc faire cette proportion,  $rz:ri::uc:um$ . On fait d'ailleurs que la circonférence dont *bu* est un arc, est à la circonférence *odE*, comme le rayon *um* de la première, est au rayon *dc* de la seconde, ou comme *ri:rz* ; par conséquent, en égalant le produit des extrêmes de cette dernière proportion, au produit de ses deux moyens, on voit que le produit qui représente la surface de la tranche considérée, est le même que celui de *ri*, ou de la partie correspondante *Rx* du diamètre *NS* de la sphere, multipliée par la circonférence d'un grand cercle, tel que *ode*. La surface de la tranche infiniment mince qui est comprise entre les deux cercles paralleles dont *ar* & *cz* sont des arcs, est donc égale au produit de la circonférence d'un grand cercle multipliée par la partie du diamètre qui est correspondante à cette tranche. La surface de toute autre tranche seroit, d'après un raisonnement semblable, représentée par un parciel produit : par conséquent la somme des surfaces de toutes les tranches de la sphere, ou celle de la sphere entiere, est égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme de toutes les parties du diamètre *NS*, ou par ce diamètre total.

On est aussi autorisé à conclure que si une tranche plus ou moins épaisse de cette sphere, est comprise entre deux plans qui soient paralleles à celui du grand cercle *odE*, & si la partie du diamètre (perpendiculaire à ce plan) qui lui correspond, est la ligne *ny*, sa surface est égale au produit de cette partie *ny*, multipliée par la circonférence d'un des grands cercles de la sphere.

De même la surface courbe d'un segment, ou d'une calotte sphérique, qui correspond à la partie *NR* du diamètre *NS*, & qui est terminée par une section *arR* parallele au plan *odE*, est égale au produit de la ligne *NR*, multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la sphere.

142. *Rapports des surfaces des solides.* On ne peut comparer les surfaces des solides, que par celles de leurs faces ; & comme d'jà nous avons fait connoître

les rapports des surfaces des figures planes rectilignes & circulaires, il ne reste aucune démonstration à faire sur cet objet. Nous nous bornerons à faire remarquer quelques applications des résultats indiqués. 1<sup>o</sup> L'égalité des faces, dans deux prismes, ou dans deux pyramides, ou dans deux corps, entraîne nécessairement celle de leurs surfaces. 2<sup>o</sup> Des prismes ont-ils des arêtes égales? leurs surfaces sont entr'elles, comme les contours de leurs bases, s'ils sont droits; ou plus généralement, comme ceux des sections auxquelles leurs arêtes sont perpendiculaires. 3<sup>o</sup> Des solides semblables sont ceux qui présentent un même nombre de faces semblables & semblablement placées. Ainsi d'après cette définition, les surfaces de ces solides doivent être entr'elles comme les surfaces des figures semblables; c'est-à-dire, comme les quarrés de leurs côtés homologues. Tels sont les rapports des surfaces, ou des voiles, ou des proues de vaisseaux, ou de leurs œuvres mortes, ou de leurs gréemens, ou des pattes de leurs ancrs; lorsque tous ces objets, comparés séparément, ont des formes qui sont semblables.

Deux sphères, qui, sans doute, sont des corps semblables, ont des surfaces, dont le rapport est égal à celui des quarrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres. On pourroit même démontrer directement cette proposition. Car les surfaces de deux sphères sont entr'elles comme les produits qui les représentent; or soient A & B les circonférences des grands cercles de ces sphères, & soient D & F leurs diamètres: on a la proportion  $A:D::B:F$ , de laquelle on peut passer à celle-ci (par une multiplication convenable)  $AD:D^2::BF:F^2$ , ou  $AD:BF::D^2:F^2$ . Les produits AD & BF, qui représentent généralement les surfaces des deux sphères, ou ces surfaces elles-mêmes, sont donc dans un rapport qui est égal à celui des quarrés des diamètres.

C'est ici le lieu de remarquer que ce dernier rapport peut servir à calculer la surface d'une sphere dont on connoît le diamètre; & réciproquement. On en donnera plus bas un exemple. On doit dire aussi que la surface

de la sphere est quadruple de celle d'un de ses grands cercles ; parce que pour exprimer l'une de ces surfaces , il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle par son diametre entier ; tandis que l'autre est le produit de cette même circonférence par le quart de son diametre. Ajoutons enfin que la surface d'une sphere est égale à celle d'un cylindre qui lui est circonscrit ; ou qui a , pour base un grand cercle de la sphere , & pour hauteur un des diametres de cette sphere. Car la surface de ce cylindre , est , comme celle de la sphere qui lui est inscrite , égale au produit de la circonférence d'un grand cercle , multipliée par son diametre.

143. *Solidité des solides.* Il reste actuellement à mesurer la grandeur de l'espace qui est compris entre les faces d'un corps. Cette solidité est exprimée par un nombre de petits solides , tels que A (fig. 14) , qui peuvent être contenus entre les plans qui terminent un solide proposé.

Lorsque nous avons parlé des surfaces planes , nous avons démontré que la mesure de la surface de toute sorte de polygones , peut être conclue de celle d'un triangle quelconque. De même , étant connue la solidité d'une pyramide , celle de tout autre solide peut aisément être déterminée. Car on peut imaginer que ceux-ci sont composés de pyramides qui sont formées par des plans menés dans l'intérieur de ces corps , par les sommets des divers angles de leurs faces.

L'unité A qui est employée pour mesurer la solidité des corps , est un prisme droit & cubique. Sa hauteur  $ab$  , ainsi que la longueur  $bc$  , & la largeur  $cd$  de sa base , sont chacune égales à une unité dont la grandeur est ordinairement celle d'une toise , & ce prisme A porte alors le nom de toise cube.

Remarquons que la forme de pareils cubes ne permet pas de les arranger facilement dans l'intérieur d'une pyramide , & sur-tout d'une maniere propre à démontrer avec évidence , quel est le nombre de ces cubes qui peuvent remplir exactement l'espace occupé par un tel solide. Un prisme droit est plus convenable pour une semblable démonstration. C'est pourquoi , s'il est

possible d'établir un rapport général entre les solidités & d'un prisme & d'une pyramide, qui auroient l'une & l'autre même base & même hauteur; il suffira de connoître quelle est la mesure de la solidité d'un prisme, pour déterminer celle d'une pyramide, & par conséquent d'un solide quelconque.

Considérons, avant cette recherche, la pyramide *rknmqi* (fig. 39) dans laquelle on suppose une section *aoudc*, qui est faite parallèlement à la base *knmqi*. Nous avons vu que les figures, & d'une telle section, & de la base, sont semblables. Si on imagine que dans la même pyramide, on ait fait une infinité de sections parallèles à la base, & qui ne soient séparées les unes des autres, que par une distance infiniment petite, telle que l'épaisseur d'un point; ces nouvelles sections partagent cette pyramide en un même nombre de tranches solides, qui sont infiniment minces. Chacune de ces tranches doit paroître évidemment être composée d'autant de points solides, qu'il y a de points superficiels dans l'une de ses sections terminatrices: par conséquent, la somme des points solides qui sont contenus dans une de ses tranches, est à celle des points solides qu'on peut compter dans une autre tranche de la même pyramide; ou les solidités de ces deux tranches, sont entr'elles comme les sections qui les terminent.

Soit une seconde pyramide, & d'une forme quelconque. Supposons qu'elle ait une hauteur égale à celle de la première, & que, comme elle, elle soit partagée en un même nombre de tranches de même épaisseur. Alors deux tranches correspondantes de ces 2 pyramides, ou placées dans l'une & l'autre à égale distance de leur sommet, doivent contenir chacune d'autant plus de points solides, que leurs sections terminatrices ont plus de surface: ainsi les solidités de ces tranches comparées, sont entr'elles, comme les surfaces des sections qui les forment. Dans chacune de ces pyramides, la base est donc à une section quelconque (qui lui est semblable), comme le carré de la hauteur de la pyramide, est à celui de la distance de cette section au sommet de la même pyramide. C'est pourquoi, en supposant égales

entr'elles, comme on l'a dit; & les hauteurs des deux pyramides, & les distances de leurs sections à leur sommet; il s'ensuit que le rapport de deux sections, qui se correspondent dans ces deux pyramides, est égal à celui des bases. On peut donc en conclure que toutes les tranches correspondantes de ces deux solides, ont des rapports égaux. Une telle suite de rapports égaux conduit à cette conséquence, que la somme des tranches de la première pyramide, est à celle des tranches correspondantes de la seconde, comme la base de la première est à celle de la seconde. Deux pyramides qui ont une même hauteur, ont donc des solidités qui sont dans le rapport de leurs bases; & si non seulement leur hauteur est la même, mais encor si leurs bases sont égales, il y a égalité entre leurs solidités: ou en général, deux pyramides quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, ont une même solidité.

Comparons actuellement une pyramide droite & quelconque à un prisme droit, en supposant égales & leurs bases & leurs hauteurs; la solidité du prisme vaut trois fois celle de la pyramide. La démonstration générale de cette proposition se réduit à faire voir, qu'une pyramide triangulaire est toujours le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur. En effet on peut imaginer une pyramide quelconque proposée, comme partagée par des plans coupans, en autant de pyramides triangulaires (fig. 39), qu'on peut former de triangles dans le polygone qui lui sert de base. Soit donc une pyramide triangulaire *adbc* (fig. 5) comparée au prisme triangulaire qui est représenté (fig. 3) par *abcdef*. Si dans ce prisme on trace, sur ses faces collatérales *efcd* & *afcb*, deux diagonales *fd* & *fb*; & si on imagine qu'un plan coupant soit dirigé suivant ces deux lignes, alors le prisme est partagé en deux pyramides; l'une triangulaire, qui a son sommet en *f*, & pour base le triangle *bcd*; & l'autre qui avec le même sommet, a pour base la face *abde* du prisme. La première de ces pyramides a même base & même hauteur que la pyramide *adbc* qui est comparée au prisme. Si la seconde, qui est quadrangulaire, est coupée par un plan dirigé par son sommet,

$f$ , & par la diagonale  $eb$  de la base de cette pyramide; elle est alors partagée en deux pyramides triangulaires, qui toutes deux ont le même point  $f$  pour sommet, & dont l'une a pour base  $abe$ , tandis que la base de l'autre est  $ebd$ . Une ligne qui, du point  $f$ , seroit abaissée perpendiculairement sur le plan  $abde$ , seroit la hauteur commune des deux dernières pyramides. Celles-ci d'ailleurs ont des bases égales, puisque les triangles  $abe$  &  $ebd$  sont chacun moitié d'un même parallélogramme. Ces pyramides ayant ainsi même base & même hauteur, sont donc égales en solidité. Considérons actuellement celle de ces pyramides qui a été supposée avoir pour sommet le point  $f$ , & pour base  $abe$ . On peut imaginer que son sommet soit aussi le point  $b$ ; & sa base seroit alors la face opposée  $afe$ , c'est-à-dire la brse du prisme. Cette pyramide auroit, dans ce cas, comme la première pyramide  $fbcd$ , & la base & la hauteur du prisme. Elle seroit encore égale à la pyramide comparée  $adbc$ . Celle-ci seroit donc égale à chacune des trois pyramides dont le prisme est évidemment composé: par conséquent, une pyramide quelconque a toujours une solidité, qui est le tiers de celle d'un prisme de même base & de même hauteur.

Deux prismes en général qui ont même base & même hauteur, sont donc égaux en solidité. Car alors il y a égalité entre les pyramides dont ils peuvent être supposés formés.

La mesure des solidités des pyramides & des prismes quelconques dépend donc de celle d'un prisme droit. Soit BHGFDI (fig. 44) un tel prisme. Mesurer sa solidité, c'est chercher combien il contient de petits cubes tels que  $A$ ; & le calcul de ce nombre est indiqué par les considérations suivantes. Soit partagée la surface de sa base HGFI en petits quarrés qui soient égaux à la base  $bcdu$  de l'unité de mesure  $A$ . Soit aussi portée la hauteur  $ab$  de cette unité, sur la hauteur HB du prisme droit; & soient imaginés, par tous les points de division de cette hauteur HB, des sections telles que  $orqs$ , qui soient toutes parallèles & égales à la base HGFI. Ce prisme est ainsi partagé en tranches, qui ont pour

épaisseur la hauteur de l'unité  $A$ , & qui doivent chacune renfermer autant de petits cubes  $A$ , qu'il y a de petits quarrés dans la base. Ainsi, en répétant le nombre des cubes contenus dans une seule tranche, autant de fois qu'il y a de tranches; le résultat doit être, le nombre des cubes compris dans toute l'étendue du prisme, ou la solidité de ce corps. Mais le nombre des cubes d'une seule tranche est égal, à celui des petits quarrés qui sont formés sur la base du prisme, ou à la surface de cette base: & le nombre des tranches du prisme, est celui des parties égales de sa hauteur: par conséquent, on doit exprimer la solidité d'un prisme droit, en multipliant sa hauteur par la surface de sa base.

La solidité d'un prisme oblique est aussi exprimée de la même manière. Car un tel prisme peut toujours être comparé à un prisme droit, qui ayant même base & même hauteur, a nécessairement une même solidité. La solidité d'un prisme quelconque est donc égale au produit de sa base par sa hauteur. Celle d'un cylindre, qui n'est qu'un prisme d'une infinité de faces, est donc aussi égale au produit de la surface du cercle qui lui sert de base, multipliée par sa hauteur. Ainsi, celle d'une pyramide quelconque, qui est toujours le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, est égale au produit de la surface de sa base, multipliée par le tiers de sa hauteur: & il en est de même de la solidité d'un cône, qui est une pyramide d'une infinité de faces.

144. La solidité d'une pyramide qui est tronquée parallèlement à sa base, & telle que  $omncbd$  (fig. 3), est la différence des solidités des deux pyramides  $adbc$  &  $aomn$ . L'une, est égale au produit de la surface  $dbc$ , multipliée par le tiers de  $au$ ; & l'autre, à celui de la surface  $omn$ , multipliée par le tiers de  $at$ . Ces hauteurs  $au$  &  $at$  des deux pyramides, ne sont pas des lignes qui soient données immédiatement par la forme du tronc; mais leur longueur peut en être conclue facilement. Car on peut dire (128)  $au:at::ad:ao::db:om$ ; & par conséquent  $au-at$  ou  $tu:db-om::at:om$ , &  $tu:db-$



*om::au:db*. La hauteur *at*, par exemple, est donc égale au quotient du produit de *om* (côté du tronc), multipliée par la hauteur de ce même tronc, & divisé par la différence des deux côtés correspondans *db* & *om* des deux bases paralleles. On trouveroit une expression analogue de la valeur de *au*. Après cette recherche, si on multiplie, par le tiers des hauteurs respectives *at* & *au* ainsi exprimées, les surfaces des bases du tronc, qui sont représentées par *omn* & *dbc*; & si on prend la différence de ces deux produits, on trouve que la solidité du tronc supposé est représentée par  $\frac{1}{3}ut \left( \frac{db \cdot dbc - om \cdot omn}{db - om} \right)$ .

La solidité d'un cône qui est tronqué parallèlement à sa base, & tel que *kcdbl* (fig. 6), doit être calculée & exprimée de la même manière. Cependant, au lieu des côtés opposés & correspondans de ses bases, ou de leurs circonférences, l'expression de cette solidité doit renfermer les diametres de ces bases, & le changement vient de ce que le rapport de ces diametres est celui des hauteurs des cônes.

Cherchons actuellement la solidité d'une sphere. On peut imaginer qu'elle est composée d'une infinité de pyramides, dont le sommet seroit à son centre, & qui auroient pour bases des parties élémentaires de la surface de cette sphere. Ces parties doivent être des espaces si petits, qu'ils puissent, (quoique pris sur une surface courbe,) être regardés comme autant de figures planes. Telle seroit une de ces pyramides qui auroit pour base le petit trapeze *aczr* (fig. 43), & dont les arrêtes seroient des rayons menés des quatre points *a*, *c*, *z*, *r*, au centre *C* de la sphere. La solidité de chacune de ces pyramides est égale au produit de la surface de sa base, multipliée par le tiers de sa hauteur qui est le rayon de la sphere. Ainsi les pyramides dont une sphere est imaginée être formée, ayant toutes une même hauteur; la somme de leurs solidités, ou la solidité de la sphere est égale au produit du tiers du rayon multiplié par la somme des bases de toutes ces pyra-

mides, ou par la surface entière de cette sphere. D'ailleurs, on doit se rappeler que la surface de la sphere vaut quatre fois celle d'un de ses grands cercles : par conséquent on peut dire aussi que la solidité d'une sphere est égale au produit de la surface d'un de ses grands cercles, multipliée, ou par quatre fois le tiers du rayon, ou par les  $\frac{2}{3}$  du diamètre.

Si on considère un secteur sphérique, ou l'espace compris, par exemple, entre le cercle parallèle  $buP$ , & des rayons tels que  $uc$ , qui seroient menés du centre  $C$  aux divers points de la circonférence de ce cercle. La solidité d'un tel solide est égale, par les mêmes raisons, au produit du tiers du rayon, multiplié par la surface de la calotte sphérique  $NbuPN$ .

Enfin si on se propose de trouver la solidité d'un segment sphérique, ou d'un espace compris entre le parallèle  $buP$ , & le contour de la calotte sphérique  $NbuPN$ ; on doit remarquer qu'elle est égale à la différence des solidités du secteur sphérique  $NbuPN$ , & du cône qui a son sommet en  $C$ , & pour base le parallèle  $buP$ . Ainsi, comme on vient d'indiquer la manière de mesurer la solidité d'un cône & celle d'un secteur, il est facile de parvenir à déterminer celle d'un segment sphérique.

Tout autre solide pouvant être considéré comme composé de pyramides; le calcul de sa solidité n'exige aucun nouveau principe qui puisse lui servir de base. Ainsi, nous devons nous borner à faire quelques applications utiles des résultats des démonstrations précédentes.

145. Soit proposé de déterminer la solidité de la carene d'un vaisseau, ou de l'espace qu'occupe dans l'eau sa partie submergée, lorsqu'il est flottant & en repos. Imaginons cette carene partagée en tranches, par des sections horizontales, qui soient dirigées par les lignes  $ab$ ,  $dq$ ,  $er$ ,  $fi$ , &c. (jusqu'à la quille) (fig. 27. G); & dont les distances soient telles que les arcs  $ad$ ,  $de$ ,  $ef$ , &c. puissent être considérés comme autant de lignes droites. Les parties du creux  $bc$ , qui sont  $bq$ ,  $qr$ ,  $ri$ , &c. doivent ainsi être aussi petites que les cir-

constances peuvent l'exiger ; & si on peut les supposer d'une certaine grandeur près de la flottaison , on pourroit les diminuer dans les régions inférieures de la carene, où la courbure de sa surface est plus considérable. La figure *bca* est celle d'une demi-section verticale nommée couple , & au plan de laquelle la longueur d'un vaisseau est perpendiculaire. Soit *abdc* (fig. 24. G) la surface de la moitié d'une de ces sections horizontales nommées lignes d'eau ; & soit son axe *acd* divisé en un si grand nombre de parties égales , que les arcs interceptés entre les perpendiculaires élevées aux extrémités de ces parties sur le même axe *ad* , puissent être regardés comme autant de lignes droites. Imaginons aussi des plans verticaux qui passent par ces ordonnées , & qui soient par conséquent dirigés de manière que ces nouvelles sections verticales & les premières qui sont horizontales soient perpendiculaires les unes aux autres : (les projections de ces diverses sections sont représentées (fig. 46. G :) alors la carene est nécessairement partagée en prismes droits & quadrangulaires , dont les bases ne sont pas parallèles , ou dont les arrêtes sont inégales. Parmi les arrêtes d'un de ces prismes, deux sont des ordonnées voisines , telles que *oq* & *ns* , d'une même ligne d'eau *abdc* ; tandis que les deux autres sont les ordonnées qui , dans une ligne d'eau immédiatement inférieure ou supérieure, correspondent à *oq* & *ns*. La ligne *qs* est un côté du parallélog. qui sert de base à ce prisme , & *bq* (fig. 27. G) est l'autre côté de cette base.

Représentons séparément un tel prisme per *acdefbgh* (fig. 45), & cherchons sa solidité. En la déterminant généralement , on en conclura ensuite celle des prismes qui composent une même tranche horizontale de la carene d'un vaisseau. Ce prisme supposé peut être partagé en deux prismes triangulaires , par un plan dirigé suivant les arrêtes *bd* & *gh* ; ainsi la recherche de sa solidité se réduit à celle de la solidité d'un prisme droit & triangulaire , tel que *kqpoln* , dont les arrêtes sont inégales. Si par le sommet de la plus courte de celles-ci , ou par le point *n* , on dirige un plan , parallèlement à la base *qpo* à laquelle toutes les arrêtes sont perpen-

diculaires, le prisme proposé se trouve ainsi composé d'un prisme droit *iqpomn*, & d'une pyramide quadrangulaire *nklm*. On connoît la formule qui exprime la solidité du prisme droit. Quant à celle de la pyramide, elle est égale au produit de sa base *kiml* multipliée par le tiers de sa hauteur *ns*; mais la figure *kiml* est un trapeze dont les bases paralleles sont *lm* & *ki*, & dont la hauteur est *im*, puisque le prisme est droit: donc la solidité de cette pyramide est égale à  $\frac{1}{2}im \cdot \frac{1}{3}ns(ki+lm)$ , ou à  $\frac{1}{3}(ki+lm) \cdot im \cdot \frac{1}{2}ns$ . Le produit  $(im \cdot \frac{1}{2}ns)$  représente la surface du triangle *inm* ou *qpo*. Ainsi la solidité de cette pyramide est égale au produit de la base du prisme multipliée par le tiers de la somme des différences de la plus petite des arrêtes aux deux autres arrêtes. La solidité totale du prisme droit, & qui a des arrêtes inégales, est donc exprimée par  $\frac{1}{3}qpo(pn+qk+ol)$ : donc celle du prisme droit & quadrangulaire, à arrêtes inégales, & qui est composé de deux prismes triangulaires dont les bases inférieures sont ici supposées égales, est  $\frac{1}{3}cdh(2bd+2hg+ac+fe)$ . On fait d'ailleurs que la surface d'un triangle, s'il est rectangle, tel que *chd* en *c* est exprimée par  $(\frac{1}{2}cd \cdot ch)$ . La solidité du prisme supposé est donc égale à  $\frac{1}{2}cd \cdot ch(\frac{2}{3}bd+\frac{2}{3}hg+\frac{1}{3}ac+\frac{1}{3}fe)$ : ou en décomposant ce produit en deux parties, elle est égale à  $\frac{1}{2}cd \cdot ch(\frac{2}{3}bd+\frac{1}{3}ac)+\frac{1}{2}cd \cdot ch(\frac{2}{3}gh+\frac{1}{3}fe)$ .

Ces calculs faits séparément pour obtenir la solidité d'un tel prisme, peuvent aisement être appliqués à la recherche de la solidité de tous les prismes qui composent ensemble une tranche horizontale de la carène d'un vaisseau. On voit d'après la maniere de faire la décomposition de la carène, que les lignes telles que *cd* & *ch*, peuvent être supposées les mêmes pour chacun des prismes composans. On voit aussi, en descendant dans les détails, que si on considère l'un de ces prismes, qui a pour deux de ses arrêtes, les ordonnées voisines *og* & *ns* (fig. 24. G); les deux tiers de *ns* doivent entrer dans le calcul de la solidité d'un tel prisme, tandis que le tiers de la même ordonnée *ns* doit se trouver dans l'expression de la solidité du prisme, qui est immédiatement adjacent au premier; parce que *ns*, est une arrête commune

à ces deux prismes. C'est pourquoi la ligne *ns* doit être comprise toute entière dans la somme des solidités de ces deux prismes. En étendant ce raisonnement ou cette remarque, à tous les prismes qui composent une même tranche horizontale d'une carene; & en examinant les arrêtes qui sont communes à plusieurs prismes; on reconnoît que, dans la ligne d'eau *abdc*, il n'y a que les deux ordonnées correspondantes aux extrémités de l'axe *ad*, qui n'appartiennent comme arrêtes, qu'à un seul prisme. La somme des solidités des prismes ne peut donc renfermer, que le tiers d'une de ces ordonnées extrêmes, & les  $\frac{2}{3}$  de l'autre. En résumant toutes ces réflexions, voici comment on peut exprimer la somme des solidités de tous les prismes qui composent une tranche horizontale, ou la solidité de cette tranche. Il faut faire 1<sup>o</sup> une somme de toutes les ordonnées entières d'une des lignes d'eau qui terminent cette tranche, avec l'exception de ne prendre que le tiers de la première, & les deux tiers de la dernière. 2<sup>o</sup> Il faut faire aussi une pareille somme des ordonnées de la seconde des lignes d'eau terminatrices. Ensuite on multiplie chacune de ces sommes, & par l'intervalle commun des ordonnées de chaque ligne d'eau, & par la moitié de la distance des deux lignes d'eau, & on obtient ainsi la solidité de la tranche supposée.

Remarquons actuellement que la surface d'une ligne d'eau, telle que *abdc*, est égale au produit de l'intervalle commun de ses ordonnées, multiplié par la somme de toutes ses ordonnées entières, moins la moitié de la 1<sup>re</sup> & de la dernière. Un tel produit ne diffère de celui qui est un des facteurs de la solidité de la tranche horizontale considérée précédemment, que par les ordonnées extrêmes, dont la moitié sert à l'expression de la surface des lignes d'eau, & dont on ne prend que le tiers & les deux tiers, pour représenter la solidité de la tranche qu'elles terminent. Par conséquent, si la somme du tiers ou de la moitié de la 1<sup>re</sup> ordonnée & des deux tiers ou de la moitié de la dernière, ajoutent peu de grandeur à la somme des ordonnées entières de la même ligne d'eau, ce qui a toujours lieu lorsque les ordonnées sont très-multipliées; alors on peut

négliger la différence des deux produits comparés. Dans un tel état de choses, on peut donc dire que la solidité d'une tranche horizontale de la carene d'un vaisseau, est égale au produit de l'épaisseur de cette tranche, multipliée par la moitié des surfaces des deux lignes d'eau qui la terminent. C'est enfin en calculant séparément & de la même manière, la solidité de chacune des autres tranches de la carene, qu'on parvient, par leur somme, à déterminer le volume, ou de la carene entière, ou de toute autre partie de cette carene, telle, par exemple, que l'exposant de la charge qui est toujours intéressant à connoître.

S'il étoit proposé de mesurer la solidité d'une tranche verticale, semblable à celle qui est représentée (fig. 1. G) par *RapnmgfQ*; on pourroit l'imaginer partagée en prismes horizontaux pareils aux précédens; mais on peut la supposer aussi composée de prismes verticaux, tels que *cbupgqiz*. Dans ce dernier cas, on démontreroit de la même manière que la solidité de ce prisme particulier est égale à  $\frac{1}{2}RQ.tq(\frac{2}{3}qg + \frac{1}{3}tz + \frac{1}{3}cp + \frac{1}{3}bu)$ ; & des calculs semblables conduiroient à conclure, que la solidité totale de cette tranche verticale est égale au produit de l'épaisseur *RQ* de cette tranche, multipliée par la moitié des surfaces des deux sections verticales *sqmQ* & *apnR* qui la terminent. C'est encore par ces nouvelles opérations qu'on peut, en accumulant les solidités d'un nombre plus ou moins grand de tranches verticales d'un vaisseau, déterminer le volume d'une portion plus ou moins considérable de sa carene ou de sa capacité.

Est-il proposé de déterminer la solidité d'un mât? Comme dans l'opération mécanique qui a pour but de donner une forme déterminée à ce solide, on se contente de lui assigner certains diamètres placés à des distances égales sur sa longueur: imaginons dans ce mât à mesurer, autant de sections parallèles, qu'il y a de diamètres ainsi désignés. Supposons aussi que la longueur du mât, soit perpendiculaire au plan de ces sections qui sont toutes circulaires. Alors on doit juger que les tranches solides qui sont comprises entr'elles, peuvent être considérées comme autant de cônes tronqués à bases

paralleles. La solidité de chacun, de ces troncs qui ressemblent à *kcdbl* (figure. 6), est représentée par  $\frac{1}{3} \times 20$

$\left( \frac{cb.cdb-kl.kul}{cb-kl} \right)$ . Ensuite en réunissant dans une

même somme toutes les solidités partielles de ces divers cônes, on obtient la solidité totale d'un mât proposé, & conformé suivant les regles de l'art. C'est par un semblable procédé, & en multipliant autant qu'il seroit nécessaire, le nombre des sections ou des tranches d'un arbre qui seroit seulement écorcé, ou d'un mât brut, qu'on peut déterminer la solidité d'un tel solide; & par conséquent calculer la solidité des excédens, c'est-à-dire la différence d'un mât brut, au mât artificiel qu'il peut fournir.

La solidité d'une vergue peut être déterminée par la même methode, ainsi que celle de tous les bois ronds qui présentent des diametres variables, dans les divers points de leur longueur. Si une piece de bois est équarrie, ou de forme quadrangulaire, & telle que la piece représentée (fig. 62. G) par *ilpm*; si ses arrêtes ne sont pas paralleles; & si les grosseurs changent progressivement d'une de ses extrémités à l'autre; alors on imagine, pour calculer sa solidité, qu'elle est décomposée en plusieurs tranches solides, qui, séparées par des sections paralleles, sont placées de maniere que les portions d'arrêtes qu'elles interceptent peuvent être regardées comme des lignes droites. Ces divers tronçons d'une même piece, sont alors des troncs de pyramides quadrangulaires & la formule précédente sert à trouver la solidité de chacune des tranches composantes.

C'est ainsi qu'on peut calculer la solidité d'une longue piece, telle que *amnd*, ou *ghcb*, ou *dlki*, ou *ecub*, ou *ebacd*, ou *A&B*, &c. [fig. 71, 64, 50, 58, 35 & 53. G]. C'est aussi en considérant une barrique partagée en tranches solides dont les bases sont paralleles au grand cercle qui passe par la bonde, ou aux deux fonds extrêmes; qu'on peut aisément calculer sa contenance ou sa capacité. Car toutes les sections imaginées dans ce solide doivent sans doute être circulaires; ainsi, en

les supposant en nombre convenable, la barrique à mesurer est partagée en cônes tronqués dont les bases sont parallèles. Les formules précédentes doivent servir à diriger les calculs de ces solidités partielles; & en réunissant tous les produits qui résultent de leur application, on obtient ainsi la solidité totale d'une barrique quelconque. Cette application est d'ailleurs très facile puisqu'on peut mesurer les contours de chacune des sections supposées, & en conclure non-seulement leurs diamètres intérieurs, mais aussi leurs surfaces qui sont des élémens de ces calculs. Dans la marine on peut donc par un tel procédé, satisfaire au besoin qu'on a de connaître les capacités des barriques de 2, de 3 & de 4, dont on fait usage, pour contenir les approvisionnemens en eau & en vin, qui sont nécessaires pour une campagne déterminée.

146. *Rapports des solidités des corps.* Les solidités de deux pyramides étant exprimées chacune par le produit de la base multipliée par le tiers de la hauteur; sont nécessairement dans le rapport de ces mêmes produits. Elles sont donc égales, si ces produits sont égaux: & cette égalité conduit à cette proportion, savoir que la base de la première pyramide, est à celle de la seconde, comme la hauteur de la seconde, est à celle de la première. Des pyramides égales en solidité ont donc des bases, dont les surfaces sont en raison inverse des hauteurs. Nous avons déjà vu que si les hauteurs de deux pyramides sont les mêmes, les solidités sont entr'elles comme leurs bases; & il est aussi vrai que leurs bases étant égales, les solidités sont dans le rapport des hauteurs: puisque les produits qui les représentent, ayant alors un facteur commun, n'ont d'autre rapport que celui des hauteurs des pyramides. On doit juger, par ces propositions, des rapports qui regnent entre les solidités comparées, ou des prismes, ou des cônes, ou des cylindres.

Si deux pyramides sont semblables, leurs solidités sont dans le rapport des cubes de leurs côtés ou de leurs lignes homologues. Supposons que la pyramide  $rkiq$  (fig. 39) soit semblable à  $adbc$  (fig. 5), Soit  $ri$  la hau-



teur de la premiere, & au celle de la seconde: alors on a la proportion fondamentale,  $rkik:adbc::kik.ri:dbc. au$ , qui est donnée par le rapport général des solidités de deux pyramides quelconques. Mais les bases  $kik$  &  $abc$  sont supposées semblables: donc  $kik:dbc::ki^2:db^2$ , ou comme  $ri^2:au^2$ , puisque les côtés homologues des pyramides semblables sont proportionnels. Cette dernière proportion est aisément changée en celle-ci,  $kik.ri:dbc.au::ri^3:au^3$ ; & par conséquent le dernier rapport de cette dernière proportion étant substitué au premier qui lui est égal, dans la proportion fondamentale, on doit faire celle-ci,  $rkik:adbc::ri^3:au^3$ ; c'est-à-dire que les solidités de deux pyramides semblables, sont dans le rapport des cubes de leurs hauteurs, ou comme les cubes de deux autres lignes homologues.

Si deux corps sont semblables, ils peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables; & par conséquent, leurs solidités sont entr'elles comme les cubes des dimensions homologues de ces corps. Deux spheres doivent donc être aussi dans le rapport des cubes de leurs diametres.

147. De tels rapports peuvent être employés à calculer la mesure de la solidité d'un corps, (étant connue celle de certains corps qui lui sont semblables.) S'agit-il, par exemple, de déterminer la solidité d'une sphere qui a 6 pouces de diametre? on calcule celle d'une autre sphere dont on connoît, & le diametre qui est de 7 pieds; & la circonférence d'un de ses grands cercles, qui est de 22 pieds. Le quadruple de la surface de ce grand cercle, qui est égal à la surface de la sphere supposée, est représenté par le produit (22.7). La solidité de la même sphere est par conséquent exprimée en pieds cubes par (22.7. $\frac{7}{8}$ ). le rapport de cette solidité au cube du diametre de la sphere, est alors celui de 22 à 42, ou de 11 à 21: par conséquent on peut dire que la solidité de la sphere proposée, est au cube de son diametre, comme 11:21. Cette solidité estimée en pouces cubes, est donc le quatrième terme de cette proportion, 21:11::216<sup>PPP</sup>:x; & comme elle en est le seul terme

inco. , les regles ordinaires servent à le calculer aisément.

Il nous reste à exposer comment, étant données les trois dimensions d'un corps, dont la figure est celle d'une pyramide, d'un cône, d'un prisme, d'un cylindre, d'une sphere, ou qui peut être décomposé en solides de cette forme; on peut calculer sa solidité exprimée, en petits cubes, tels que des toises, des pieds & des pouces cubes. Soit un corps, dont la solidité doit être exprimée par le produit des trois dimensions suivantes, 11 tois. 5 pieds 7 pouc., 9 tois. 4 pieds 5 pouc. & 2 tois. 4 pieds 8 pouc. On peut regarder cette solidité, comme étant celle d'un prisme droit, qui auroit pour hauteur 2 tois. 4 pieds 8 po., & pour base un parallélogramme rectangle, dont la longueur seroit 11 tois. 5 pi. 7 po. & la largeur 9 tois. 4 pieds 5 pouc. Il faut pour déterminer cette solidité, conformément aux regles indiquées, calculer le nombre de toises quarrées que peut contenir la base de ce prisme. Ce nombre servira à connoître celui des toises cubes qui entrent dans chaque tranche d'une toise de hauteur dont le prisme est formé dans sa totalité; & cette solidité partielle étant ensuite multipliée par le nombre des tranches, ou par la hauteur donnée du prisme, le résultat doit représenter la solidité totale d'un tel prisme. La surface de cette base est, comme on l'a vu (136),  $116^{\text{to}} 5^{\text{pp}} 95^{\text{pp}}$ , & en la multipliant par une toise, le produit doit être la solidité d'une tranche prismatique, qui, a la base du prisme, & une toise de hauteur.

De tels calculs exigent quelques détails préalables. Il faut remarquer que le produit d'une toise quarrée, multipliée par une toise linéaire, est une toise cube, & représente la solidité d'un parallélipede A (figur. 44), dont toutes les faces sont égales à une toise quarrée, & dont toutes les arrêtes ont la longueur d'une toise. Cette toise cube vaut aussi 216 pieds cubes. Le produit d'une toise multipliée par un pied quarré, vaut six pieds cubes; & si elle est multipliée par un pouce quarré, le produit est de 72 pouces cubes, ou la 24<sup>e</sup> partie d'un pied cube; parce qu'un pied cube

vaut

D E L' H O M M E D E M E R. 289  
 vaut 1728 pouces cubes. Enfin un pied quarré étant  
 multiplié par un pouce , le produit est de 144 pouces  
 cubes.

Après ces détails , procédons à l'opération proposée.  
 Le produit , de  $116^{\text{ttt}}$   $5^{\text{ppi}}$   $95^{\text{ppo}}$  multipliés par une toise,  
 devient  $116^{\text{ttt}}$   $33^{\text{ppi}}$   $1656^{\text{ppo}}$  , & ce nombre exprime  
 celui des cubes contenus dans une tranche du prisme  
 proposé , qui a pour base celle du prisme & une toise de  
 hauteur. C'est ce solide qu'il faut répéter actuellement  
 autant de fois que l'indique le nombre  $2^{\text{t}}$   $4^{\text{pi}}$   $8^{\text{po}}$  , pour  
 obtenir la solidité totale du prisme , ou du corps pro-  
 posé.

Les choses étant reduites à cet état , tout consiste  
 donc à répéter la solidité trouvée d'une des tranches ,  
 qui est alors le multiplicande , non seulement deux fois  
 mais aussi  $\frac{4}{6}^{\text{e}}$  de fois , &  $\frac{8}{72}^{\text{e}}$  de fois , parce que dans  
 le multiplicateur  $2^{\text{t}}$   $4^{\text{pi}}$   $8^{\text{po}}$  , il n'y a que ce nombre d'u-  
 nités & de parties d'unité. Le produit doit être cherché  
 par les regles ordina-  
 res de la multiplica-  
 tion des nombres com-  
 plexes , & par parties  
 aliquotes. Les détails  
 de l'opération sont pré-  
 sentés dans les produits  
 partiels qui sont indi-  
 qués ici , & le résultat  
 ou la solidité cherchée  
 est de  $322^{\text{ttt}}$   $142^{\text{ppi}}$   
 $568^{\text{ppo}}$ .

$116^{\text{ttt}}$	$33^{\text{ppi}}$	$1656^{\text{ppo}}$
$2^{\text{t}}$	$4^{\text{pi}}$	$8^{\text{po}}$
<hr/>		
$232^{\text{ttt}}$	$66^{\text{ppi}}$	
	1	$1584^{\text{ppo}}$
58	16	1692
19	77	1140
9	146	1434
3	48	1630
<hr/>		
$322^{\text{ttt}}$	$142^{\text{ppi}}$	$568^{\text{ppo}}$

On peut proposer , étant donnée la solidité d'un  
 prisme , par exemple , de déterminer quelle doit être sa  
 base , en supposant sa hauteur connue. Soit cette so-  
 lidité de  $322^{\text{ttt}}$   $142^{\text{ppi}}$   $568^{\text{ppo}}$  ; & la hauteur supposée  
 de  $2^{\text{t}}$   $4^{\text{pi}}$   $8^{\text{po}}$ . On demande quelle est la base d'un tel  
 prisme. Sans doute sa solidité peut être regardée comme  
 le produit de la surface de cette base , multipliée par sa  
 hauteur ; & d'après cette considération , il sembleroit  
 que tout se reduit à diviser la solidité donnée par la  
 hauteur connue du prisme , pour obtenir au quotient

la base qui est demandée. Mais peut-on raisonnablement chercher combien de fois, dans un nombre de cubes, est contenue une simple ligne droite? Une telle division ne présente à l'esprit aucune idée; & dans la solidité d'un corps, il n'y a de contenu que des cubes. La question doit donc être abordée d'une autre manière.

La hauteur du prisme étant supposée de 2 tois. 4 pi. 8 pouces; imaginons un second prisme qui ait aussi cette même hauteur, sur une base dont la surface soit d'une toise quarrée. Sa solidité est de  $2^{\text{ttt}} 168\text{PPPi}$ ; & elle doit être à celle du prisme proposé, dans le rapport de leurs bases respectives; puisque les prismes de même hauteur ont des solidités qui sont entr'elles comme leurs bases. Il résulte de cette comparaison, que pour trouver la base demandée, on doit diviser la solidité donnée par celle du second prisme supposé, ou  $322^{\text{ttt}} 142\text{PPPi} 568\text{PPPo}$  par  $2^{\text{ttt}} 168\text{PPPi}$ . De-là on conclut la regle générale, qu'étant proposé de chercher la base d'un prisme dont la hauteur & la solidité sont données, il faut avant de faire l'opération, multiplier une toise quarrée (si la toise est l'unité de mesure) par la longueur de la dimension donnée, & diviser ensuite par ce solide supposé, la solidité du prisme proposé. Cette opération d'ailleurs doit être faite suivant les regles connues de la division des nombres complexes; & le quotient est alors le nombre des toises, pieds & pouc. quarrés dont la base de ce prisme est composée.

148. *Trigonométrie sphérique.* Si nous avons reconnu une certaine utilité à savoir mesurer, & la surface d'une sphere, & sa solidité, ainsi qu'à connoître la forme des sections qui passent par son centre, ou par divers points d'un de ses diametres. Actuellement un tel solide doit attirer encore plus particulièrement notre attention. En effet remarquons qu'une sphere est une image de la fig. de la terre; que les routes des vaisseaux qui parcourent la surface des mers, sont des lignes courbes tracées arbitrairement sur son contour; que la position de tous es points de ces routes doit être connue dans tous les

instans aux navigateurs; que toutes les parties de l'étendue des mers doivent être dessinées sur des plans, pour servir de guides aux hommes de mer dans leurs campagnes; que les astres, ainsi que tous les objets qui sont hors & loin de nous, nous paroissent toujours placés à la circonférence d'une vaste sphere dont nous nous imaginons occuper le centre; que les distances des astres n'ont pour nous d'autres mesures que celles des angles sous lesquels nous les appercevons, ou les arcs compris entre les rayons visuels, qui de notre œil sont menés aux objets dont la grandeur nous importe à connoître; enfin que les routes mêmes d'un vaisseau, sont indiquées dans la sphere céleste par le changement apparent de la position relative des astres à l'égard de l'observateur marin, qui se transporte d'un point de la surface du globe, sur tout autre point de cette surface. Des rapports de cette importance doivent donc nous porter à considérer, avec autant d'étendue que d'intérêt, les arcs de cercle qui peuvent être tracés sur la surface d'un globe; à analyser leurs combinaisons, lorsqu'ils forment des angles ou des triangles; & à savoir calculer la grandeur de ces arcs, pour résoudre facilement des questions qui intéressent le salut & la fortune des navigateurs. D'ailleurs, les applications des principes & des conséquences que nous allons présenter, justifieront leur nécessité, ainsi que l'obligation imposée à tout homme de mer, de s'occuper de cette nouvelle partie de la géométrie.

Soit la sphere NOSE (fig. 43): *odE* est un de ses grands cercles, dont le plan est *odCE*, & dont le centre est celui *C* de la sphere. Si par ce point *C*, on imagine une ligne *NS* qui soit perpendiculaire au plan *odEC*; cette ligne est aussi perpendiculaire à toutes les lignes menées par son pied dans ce plan. Elle l'est donc sur *Co*, *cd*, &c. Si par les lignes *Nc* & *dc*, on fait passer un arc *Nd*; cet arc appartient à un grand cercle, parce que le centre *C* est dans son plan; & il est d'ailleurs de 90 degrés, puisqu'il est la mesure de l'angle *Ncd*. Les arcs *NO*, *NE* sont aussi de 90 degrés. De même les arcs de grand-cercle menés de l'extrémité *S* de

NCS, à divers points de la circonférence  $odE$ , sont de 90 degrés; & ces points N & S de la sphere, qui sont ainsi éloignés de 90 degrés de tous les points de la circonférence du grand cercle  $odE$ , sont nommés les poles de ce cercle. Remarquons que tout grand cercle d'une sphere a des poles, & qu'un point quelconque de la surface d'une sphere peut être regardé comme le pole d'un grand cercle. On peut dire aussi d'un point, qu'il est le pole d'un cercle supposé, lorsqu'il est éloigné de 90 degrés de deux seuls points de la circonférence de ce cercle. Car en menant du centre de la sphere des rayons à ces trois points, celui qui passe par le pole présumé, est perpendiculaire aux deux autres, qui sont menés dans le plan du cercle supposé. La proposition inverse est également vraie, c'est-à-dire que si deux cercles sont perpendiculaires à un troisieme, ils passent par le pole de celui-ci, & ils indiquent sa position par celle d'un de leurs points d'intersection. C'est par une raison semblable qu'on démontre que si un arc est perpendiculaire au plan d'un cercle, & s'il est de 90 degrés, son extrémité est nécessairement le pole de ce cercle.

Désormais lorsqu'il sera question d'arcs de grand cercle, ils seront indiqués par le seul nom d'arcs; & on donnera le nom de paralleles à ceux qui appartiennent à de petits cercles de la sphere.

Lorsque deux arcs Nc & Nh se rencontrent en un point N, ils font un angle nommé sphérique; & l'arc Nh prolongé, ne peut rencontrer l'arc Nc dans un autre point S, qu'à une distance de 180 degrés du point N. Car les deux grands cercles de la sphere auxquels appartiennent ces arcs, ont nécessairement pour intersection commune un diam. NS de cette sphere. D'ailleurs l'inclinaison de l'arc Nh à l'égard de l'arc Nc, est la même que celle des plans respectifs dans lesquels ils sont placés. C'est pourquoi le plan de l'arc Nc étant NcC, & celui de Nh étant NhC, l'ang. sphérique cNh, est égal à l'angle des deux plans désignés. La mesure de cet angle est donc celle d'un angle formé par deux lignes droites, menées dans chaque plan perpendiculairement

à un même point de la section commune  $NC$  de ces deux plans. Si en un point  $R$  de cette section, on élève deux perpendiculaires, l'une  $Ra$  dans le plan de  $Nc$ , & l'autre  $Rr$  dans le plan de  $Nh$ ; l'arc parallèle  $ar$  qui est la mesure de l'angle rectiligne  $aRr$ , est aussi celle de l'angle plan, & par conséquent de l'angle sphérique  $Nh$ . Mais le rayon de cet arc n'est pas celui de la sphere; & en variant la grandeur de ce rayon, on varie la longueur de l'arc qui sert de mesure à l'angle sphérique. Une mesure uniforme a donc été jugée nécessaire pour estimer la grandeur de tout angle sphérique, & on est convenu d'employer toujours un arc de grand cercle pour une telle évaluation. C'est pourquoi faut-il mesurer un angle sphérique tel que  $cNh$ ; on prolonge les plans de ses côtés jusqu'au centre de la sphere; on élève du centre de celle-ci, & dans chacun de ces plans, deux lig.  $Co$  &  $Cd$  qui soient perpendiculaires à la section commune  $NC$ . L'arc  $od$ , qui est alors la mesure de l'angle des deux perpendiculaires, est celle de l'angle sphérique  $cNh$ . Cet arc  $od$  appartient évidemment à un grand cercle; & les côtés  $No$  &  $Nd$  de l'angle  $cNh$ , sont alors devenus nécessairement de 90 degré. Car la ligne  $NC$  étant perpendiculaire aux deux lignes  $oC$  &  $dC$ , & par conséquent au plan du cercle  $odE$ ; le point  $N$  est le pôle de ce cercle, & les arcs menés, de ce pôle, aux points  $o$  &  $d$ , sont de 90 degrés. La mesure d'un angle sphérique est donc l'arc de grand cercle, qui est compris entre les côtés de cet angle, & qui est placé à 90 degrés du sommet.

La convention de prendre les arcs de grand cercle, pour mesurer les angles sphériques, n'empêche pas que les arcs, tels que  $ar$ ,  $bu$ ,  $cz$ , ne soient aussi, comme  $od$ , les mesures du même angle sphérique  $cNh$ . Il est seulement à remarquer que si ces arcs parallèles, qui sont décrits avec des rayons plus petits que celui de la sphere, n'ont pas autant de longueur que l'arc  $od$ ; ils sont tous composés d'autant de degrés que cet arc de grand cercle.

Ajoutons enfin que tout ce qui a été dit sur les angles plans, est entièrement applicable aux angles sphé-

riques; c'est pourquoi nous ne ferons pas ici une répétition superflue des rapports des divers angles sphériques.

149. Lorsque trois arcs décrits sur la surface d'une sphere, viennent à se rencontrer; ils forment un triangle sphérique. Soit  $Nch$  un tel triangle. ses trois côtés ne peuvent jamais valoir ensemble deux fois 180 dégr. Car en supposant les côtés  $Nc$  &  $Nh$  prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau: alors la somme de  $NcoS$  &  $NhdS$  est de 360 degrés. Mais le côté  $ch$  est évidemment plus petit que la somme des deux arcs réunis  $hdS$  &  $coS$ : par conséquent ce même côté ajouté aux deux autres  $Nc$  &  $Nh$ , ne peut concourir à former une somme de 360 degrés. Quant aux limites de la valeur des trois angles d'un tel triangle, elles ne peuvent être déterminées qu'après la démonstration suivante.

Soit un triangle sphérique *def* (fig. 46) décrit sur une sphere; & soient tracés trois nouveaux arcs  $bc$ ,  $ac$ ,  $ab$ , dont les poles soient les sommets  $d$ ,  $e$  &  $f$ . Il résulte de cette construction, non seulement que les parties du triangle  $abo$  sont les supplémens des parties qui leur correspondent dans le triangle *def* & réciproquement, mais aussi que les sommets  $a$ ,  $b$  &  $c$  des angles du second triangle, sont les poles des côtés du premier. Car 1<sup>o</sup> le point  $a$ , par exemple, comme appartenant à l'arc  $ab$ , est éloigné de  $f$  de 90 degrés, & il l'est également de  $e$ , comme étant un point de l'arc  $ac$ : ce point  $a$  est donc le pole de  $ef$ . On démontreroit de même que les arcs  $df$  &  $de$ , ont pour poles les sommets  $b$  &  $c$  des angles opposés du second triangle. 2<sup>o</sup> Soit comparé l'angle  $f$  avec le côté  $ab$ . La mesure de l'angle  $f$  est l'arc  $no$  compris entre ses côtés  $nf$  &  $of$ , qui sont de 90 degrés: or les arcs  $ao$  &  $bn$  sont chacun de 90 degrés, puisque les points  $a$  &  $b$  sont les poles des arcs  $of$  &  $nf$ : donc la somme des arcs  $oa$  &  $nb$ , ou des arcs  $ab$  &  $no$ , vaut 180 dégr.; c'est-à-dire que  $no$ , ou l'angle  $f$ , est le supplément du côté opposé  $ab$ . La démonstration seroit la même pour le rapport de tout autre angle  $d$  &  $e$ , à l'égard des côtés opposés  $bc$  &  $ac$ . 3<sup>o</sup> Le côté  $ef$ , par exemple, est le supplément de



l'angle  $a$  ; car celui-ci a pour mesure l'arc  $or$  ; & les arcs réunis  $of$  &  $er$ , ou  $or$  &  $ef$ , valent  $180$  degrés ; parce que les points  $f$  &  $e$  sont les poles des arcs  $ab$ ,  $ac$  : par conséquent le côté  $ef$  est le supplément de l'angle  $a$  qui lui est opposé. Les autres angles  $b$  &  $c$  ont pour supplémens, par les mêmes raisons, les côtés  $df$  &  $de$ . Le triangle sphérique  $abc$  est donc justement nommé le supplémentaire de  $def$  ; & l'utilité de ce triangle supplémentaire étant très-étendue, nous devons ajouter qu'il n'est aucun triangle sphérique qui n'ait son triangle supplémentaire.

Une conséquence immédiate de cette proposition, est que les trois angles d'un triangle sphérique ayant toujours pour supplémens les trois côtés d'un autre triangle sphérique, ne peuvent, sans ceux-ci, valoir 3 fois  $180$  degrés ; puisque c'est en les réunissant ensemble, que leur somme s'élève à  $540$  degrés. D'ailleurs la valeur de cette dernière somme, & les limites de celle des trois côtés d'un triangle sphérique, démontrent que toujours la somme des trois angles d'un triangle sphérique, est supérieure à  $180$  degré.

On voit donc qu'on ne peut assigner ici, comme pour les triangles rectilignes, la valeur précise des trois angles d'un triangle sphérique, & qu'on peut seulement fixer les limites de leur somme. D'ailleurs on distingue sous le nom de rectangles, des triangles qui ont un angle droit, quoiqu'ils puissent en avoir deux & même trois. Les triangles de cette classe, non seulement sont, comme tous les triangles en général, comparables avec un triangle supplémentaire ; mais aussi avec deux autres triang. sphériques, dont les parties sont, ou égales, ou complémens à celles du premier ; & qui, par cette raison, sont nommés ses triangles complémentaires.

Soit  $acb$  (fig. 47) un triangle sphérique dont l'angle  $b$  est droit. Si on suppose que les deux côtés  $ac$  &  $cb$  d'un de ses angles obliques, soient prolongés au-delà du sommet de cet angle, jusqu'à valoir  $90$  degrés ; & que les extrémités  $e$  &  $d$  soient réunies par un troisième arc  $de$  ; les parties du triangle  $dce$  ainsi formé, sont, ou égales, ou complémens aux parties du triangle  $abc$ .

En effet, l'arc  $bd$  étant de 90 degrés, & de plus perpendiculaire au côté  $ba$ , le point  $d$  doit être le pôle de  $ba$ . Si on remarque aussi que le point  $a$  est éloigné de  $e$  de 90 degrés, autant qu'il l'est de  $d$ , le point  $a$  doit être reconnu pour le pôle de  $de$ . Comparons actuellement les parties diverses des deux triangles  $dce$  &  $acb$ , après avoir préalablement prolongé les arcs  $de$  &  $ab$ , jusqu'à leur rencontre au point  $f$ . L'angle  $e$  est droit comme l'angle  $a$ . Les angles  $acb$  &  $dce$  sont aussi égaux, comme opposés au sommet; l'angle  $cde$  est complément de l'arc  $ab$ , parce que sa mesure  $bf$  forme avec  $ab$  un arc  $af$  de 90 degrés. De même  $de$  est le complément de  $ef$ , qui est la mesure de l'ang.  $a$ . D'ailleurs les côtés  $dc$  &  $ce$  ont été faits les complémens des côtés  $ac$  &  $cb$ : par conséquent les parties du triangle  $abc$  sont ou égales, ou complémens à celles du triangle  $def$ .

On imagine aisément la construction semblable d'un autre triangle  $rka$ ; & sans répéter la démonstration précédente, on doit voir, par les mêmes raisons, que ce triangle, comme le premier  $dce$ , doit être complémentaire du triangle  $acb$  rectangle en  $b$ .

Si on compare des triangles sphériques, il doit paroître démontré qu'ils sont égaux, dans les mêmes cas d'égalité des triangles rectilignes. Car dans les démonstrations relatives à ceux-ci, on a fait voir uniquement qu'en posant ces triangles l'un sur l'autre, les sommets de leurs ang. se confondent parfaitement. C'est pourquoi comme il y a une courbure égale & uniforme dans les arcs de grand cercle d'une sphere, dont chacun d'ailleurs est, sur ce solide, la distance la plus courte de deux points de cette surface; comme une ligne droite est la distance la plus courte de deux points placés sur un plan; il ne doit pas être douteux, que, dans les mêmes suppositions, deux triangles sphériques superposés, doivent aussi se convenir & se confondre complètement. Deux triangl. sphériques sont d'ailleurs égaux dans un cas qui leur est particulier; & c'est lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun. Car alors les deux triangles, qui sont supplémentaires des triangles comparés, doivent avoir leurs trois côtés égaux. Ils sont donc parfai-

tement égaux, & l'égalité de leurs angles entraîne celle des côtés des deux triangles comparés : ce qui fait voir que ceux-ci étant supposés avoir leurs ang. égaux, ont nécessairement des côtés qui sont égaux.

Si dans un triangle (fig. 46), deux côtés, tels que *de* & *df*, sont égaux, les angles *e* & *f* qui leur sont opposés, sont aussi égaux. En effet, soient pris sur ces côtés, des arcs égaux *di* & *du*; & soient menés deux arcs *ei* & *fu*; alors les deux triangles *dei* & *udf*, qui ont un angle commun, compris entre deux côtés égaux, sont nécessairement égaux. *uf* est donc un arc de même grandeur que *ei*; & il en résulte l'égalité des deux triangles *uef* & *ife*, qui ont alors leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Par conséquent enfin, les angles *def* & *dfe* du même triangle *def*, sont égaux, comme opposés à des côtés égaux. La proposition inverse seroit démontrée de la même manière, en faisant usage du triangle supplémentaire. Car alors deux côtés de ce dernier triangle seroient égaux; & la question se réduiroit à démontrer, comme on vient de le faire, l'égalité des angles qui sont opposés à ces côtés. On peut donc dire en général, que dans un triangle quelconque, les angles égaux sont opposés à des côtés égaux, & réciproquement.

Le plus grand angle d'un triangle sphérique est aussi opposé au plus grand côté. Soit l'angle *def* plus grand que l'angle *edf*; & soit mené dans ce triangle, par le point *e*, un arc *ei*, qui, avec *ed*, fasse un ang. *dei* égal à l'angle *edi*. Alors les arcs *ei* & *id* doivent être égaux, comme opposés à des angles égaux dans le triangle *dei*; mais les arcs réunis *ei* & *if* forment une somme plus grande que la valeur de *ef*: donc le côté *df* opposé à l'angle *def*, est plus grand que le côté *ef*, qui est opposé à un angle plus petit que *def*.

Dans un tri. rectangle, il est des moyens qui servent à reconnoître les cas où les angles, ainsi que les côtés, sont plus grands ou plus petits que 90 degr. & afin d'abréger le discours, nous dirons désormais que 2 arcs sont de même espèce, lorsque nous voudrons annoncer que tous deux sont, ou plus grands ou plus petits que 90 deg., &

qu'ils sont de différente espece, lorsque l'un est plus grand, tandis que l'autre est plus petit que 90 dégr.

Les angles obliques d'un triangle rectangle sphérique, sont toujours de même espece que les côtés qui leur sont opposés. Si  $bc$ , par exemple (fig. 47), dans le triangle  $abc$ , est plus petit que 90 degrés; l'angle  $a$  qui lui est opposé est de même espece. Car soit mené l'arc  $da$ , il forme avec  $ab$  un angle droit, puisque le point  $d$  est le pôle de  $ab$ ; & l'angle  $dab$  est évidemment plus grand que  $cab$ : donc le côté  $cb$ , & l'angle  $a$  qui lui est opposé dans le même triang., sont de même espece. Dans un triangle  $ref$ , qui est rectangle en  $f$ , si  $fr$  est plus grand que 90 dégr.; l'angle  $ref$  qui lui est opposé, est de même espece que ce côté. Car le point  $e$  étant le pôle de  $def$ , l'angle  $aef$ , qui est de 90 dégr. est évidemment plus petit que  $ref$ : par conséquent, celui-ci est plus grand que 90 dégr. Enfin, on peut assurer en général, que dans un trian. rectangle quelconque, les angles obliques sont de même espece que les côtés qui leur sont opposés.

Dans les triangles de cette classe, la valeur de l'hypothénuse est souvent incertaine; mais on décide aisément de qu'elle espece elle peut être, en considérant si les deux côtés de l'angle droit du même triang. sont de même ou de différente espece. Lorsque ces 2 côtés sont moindres que 90 degrés, l'hypothénuse est de la même espece, ou plus petite aussi que 90 degrés. Car soit mené l'arc  $du$  qui est de 90 degrés, pour lui comparer  $ae$ . Les angles  $adc$  &  $acb$  sont de même espece que  $ab$ , comme étant opposés à ce côté dans deux triangles rectangles  $acb$  &  $adb$ ; ainsi l'angle  $adc$  étant plus petit que l'angle  $acd$ , qui est le supplément de  $acb$ , l'arc  $ac$  doit être plus petit que l'arc  $ad$ . l'hypothénuse du triangle  $acb$ , est donc plus petite que 90 dégr. lorsque les deux côtés de l'angle droit de ce triang., sont eux-mêmes plus petits que 90 dégr.

Si dans un triangle rectangle  $rfu$ , dont l'angle  $f$  est de 90 dégr., les deux côtés  $rf$  &  $uf$  sont tous deux plus grands que 90 degrés, l'hypothénuse  $ur$  doit être plus petite que 90 degrés. Car en supposant la construction

connue de la figure 47, les angles *ura* & *uaf* sont de même espèce que le côté *ef*, auquel ils sont opposés; l'un dans le triangle *urf*, & l'autre dans le triangle *uaf*. L'angle *ura* est donc plus grand que *uar*; & ainsi *ur* est inférieur à *ua*, dont la valeur est de 90 degrés. En général l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle est donc toujours plus petite que 90 degrés, lorsque les deux côtés de l'angle droit sont de même espèce. Elle est au contraire plus grande que 90 deg. lorsque ces deux côtes sont d'espèce différente. Car dans un triangle rectangle *ref*, dont le côté *rf* est plus grand, & le côté *ef* plus petit que 90 degrés, l'angle *erf* est, ainsi que l'angle *eaf* du triangle *eaf*, plus petit que 90 degrés, comme étant opposés à *ef*: par conséquent l'angle *ear* est plus grand que *era*; & le côté *ae* de 90 degrés, est plus petit, que le côté *er* du triangle *era*; c'est-à-dire que l'hypothénuse d'un triang. rectan. surpasse 90 degrés, lorsque les deux autres côtés du même triangle sont de différente espèce.

C'est pourquoi, soit supposé abaissé du sommet d'un angle *e*, dans un triangle *def* (fig. 46) un arc *ei*, qui soit perpendiculaire sur le côté opposé *df*: cet arc *ei* peut être placé dans l'intérieur, ou en dehors de ce triangle. Il tombe en dedans de l'angle *e*, lorsque les deux autres angles sont de même espèce; parce qu'appartenans l'un au triangle rectangle *dei*, & l'autre au triangle rectangle *ife*, ils doivent tous deux être alors de même espèce que l'arc *ei*, & par conséquent de même espèce entr'eux. Mais lorsque l'arc perpendiculaire *ei* tombe en dehors du triangle *def*, les deux angles obliques *d* & *f* doivent être de différente espèce; car dans ce cas, l'arc *ei* est opposé, dans un triangle rectangle, à l'un de ces deux angles; & dans un second triangle rectangle, au supplément de l'autre angle; ainsi les deux angles obliques *d* & *f* ne peuvent jamais être de même espèce. C'est avec ces remarques qu'on décide sûrement de la position de l'arc qui est abaissé perpendiculairement du sommet d'un des angles d'un triangle quelconque sphérique, sur le côté qui lui est opposé.

150. Soit  $dbc$  un triangle sphérique, dont les côtés sont dans les plans  $dac$ ,  $dab$  &  $bac$  [fig. 48], (le point  $a$  étant le centre de la sphere). Soit abaissée du point  $d$ , une ligne droite  $di$ , qui soit perpendiculaire sur le plan opposé  $abc$ ; & du pied  $i$  de cette ligne, soient menées, dans le plan  $bac$ , les lignes  $io$  &  $iq$  perpendiculaires sur les rayons  $ac$  &  $ab$ , qui passent par les extrémités des côtés  $dc$  &  $db$ . Soit réuni ensuite le point  $d$  aux points  $o$  &  $q$ , par les lignes  $do$  &  $dq$ , qui sont nécessairement perpendiculaires, l'une sur  $ac$ , & l'autre sur  $ab$  (124): la ligne  $do$  est par conséquent le sinus de l'arc  $dc$ ; &  $dq$  est le sinus de  $db$ . D'ailleurs, les lignes  $do$  &  $oi$  étant perpendiculaires au même point, sur la section commune  $ac$  des deux plans  $adc$  &  $acb$ , forment un angle  $doi$ , qui est égal à l'angle sphérique  $dcb$ ; & par une raison semblable, l'angle rectil.  $dqi$  est égal à l'angle sphérique  $dbc$ .

Considérons actuellement les deux triangles rectilign.  $dio$  &  $dqi$ , qui sont l'un & l'autre rectangles en  $i$ . On peut faire, dans le trian.  $doi$ , cette proportion,  $i:\sin. doi$  ou  $\sin. dcb::do$  ou  $\sin. dc:di$ ; & dans le triangle  $dqi$ , celle-ci,  $1:\sin. dqi$  ou  $\sin. dbc::dq$  ou  $\sin. db::di$ . Ces deux analogies présentent les mêmes extrêmes; ainsi l'égalité des produits de leurs moyens conduit à cette nouvelle proportion,  $\sin. c:\sin. b::\sin. db:\sin. dc$ ; c'est-à-dire, que les sinus des angles d'un triangle sphérique sont entre eux, comme les sinus des côtés qui leur sont opposés.

151. Si un triangle sphérique est rectangle, comme  $abc$  l'est en  $b$  (fig. 47), l'application de ce principe général donne cette analogie particulière; le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus d'un des ang. obliques, est au sinus du côté qui lui est opposé. Telle est l'analogie fondamentale & distinctive des triangles de cette classe.

Comme on peut dire aussi, par les mêmes raisons, dans le triangle  $acb$ ,  $\sin. c:\sin. ab::\sin. a:\sin. bc$ ; & dans le triangle complémentaire  $dec$ ,  $\sin. c:1::\sin. de$  ou  $\cos. a:\sin. dc$  ou  $\cos. cb$ ; on conclut de ces deux proportions, (divisées l'une par l'autre, ou termes par termes), cette analogie particulière,  $1:\sin. ab::\tan. a:\tan. bc$ , (en écri-

vant la tangente d'un arc, au lieu du sinus de cet arc divisé par son cosinus). Il est donc démontré en général, que dans tout triangle sphérique rectangle, on peut faire cette proportion; le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté, est à la tangente du côté qui est opposé à ce même angle. Telle est la seconde analogie fondamentale, qui, avec la première, est suffisante pour résoudre toutes les questions relatives aux triang. sphériques rectangles; (en faisant cependant usage au besoin de l'un ou l'autre des deux triangles complémentaires).

Le second principe général est que, dans un triangle sphérique quelconque, si on abaisse du sommet d'un des angles, un arc perpendiculaire sur le côté opposé, les sinus des segmens de ce dernier côté, sont entr'eux comme les cotangentes des arcs qui leur sont adjacens. Soit *def* un tel triangle [fig. 46], & *ei* un arc perpendiculaire sur *df*. On peut faire, dans les triangles rectangles *dei* & *eif*, les proportions suivantes,  $1:\sin.di::\tan.g.d:\tan.g.ei$ , &  $1:\sin.if::\tan.g.f:\tan.g.ei$ . Ces proportions ont les mêmes extrêmes; ainsi on peut en conclure que  $\sin.di:\sin.if::\tan.g.f:\tan.g.d$ , ou  $::\cot.d:\cot.f$ ; parceque les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes (118). Les sinus des segmens, dans un tel triangle, sont donc dans le rapport des cotangentes des angles qui leur sont adjacens.

Le troisieme principe général est que, dans tout trian. où un arc est abaissé, du sommet d'un de ses angles, perpendiculairement sur le côté opposé, les cosinus des deux segmens sont dans le rapport des cosinus des côtés qui leur sont adjacens. Car si, dans le triangle *dec* (fig. 47), qui est complémentaire de *abc*, on fait cette proportion,  $1:\sin.cd::\sin.d:\sin.ce$ , qui donne celle-ci, pour le triangle *abc*,  $1:\cos.cb::\cos.ab:\cos.ac$ , on peut dire, dans le triangle *dei* [fig. 46], qui est rectangle en *i*, & qui fait partie du trian. *def*,  $1:\cos.ei::\cos.di:\cos.de$ . Le triangle *eif* étant aussi rectangle en *i*, on peut faire aussi pareille proportion,  $1:\cos.ei::\cos.if:\cos.ef$ . Ces deux dernières proportions ont un rapport

commun ; & on en conclut celle-ci,  $\cos. di : \cos. if :: \cos. de : \cos. ef$  ; qui est , le troisieme principe général annoncé.

Enfin le quatrieme principe général est que , dans un triangle , si on abaisse du sommet d'un des angles , un arc perpendiculaire sur le côté opposé ; la tangente de la somme des segmens , est à celle de la moitié des deux autres côtés , comme la tangente de la demi-différence de ces mêmes côtés , est à celle de la demi-différence des deux segmens. Car conformément au troisieme principe , on peut dire  $\cos. ed : \cos. ef :: \cos. di : \cos. if$  ; & par conséquent ,  $\cos. ed + \cos. ef : \cos. ed - \cos. ef :: \cos. id + \cos. if : \cos. id - \cos. if$ . On a vu (121) que la somme des sinus de deux arcs , est à leur différence , comme la tangente de la demi-somme de ces arcs , est à celle de leur demi-différence. Ainsi , appliquons cette proposition aux complémens des arcs ; remarquons que la différence de deux arcs est égale à celle de leurs complémens ; alors ( en substituant , à la place du rapport de la somme des cosinus de deux arcs à leur différence , le rapport indiqué dans la proposition citée ) on peut faire la proportion suivante ,  $\cotang. \frac{1}{2}(ed + ef) : tang. \frac{1}{2}(ef - ed) :: \cot. \frac{1}{2}(di + if) : tang. \frac{1}{2}(if - id)$ . Si les moyens de cette proportion sont changés de place ; & si au rapport des cotangentes de deux arcs , on substitue celui inverse de leurs tangentes , on arrive enfin à la proportion suivante , qui est le quatrieme principe général ,  $tang. \frac{1}{2}(di + if) : tang. \frac{1}{2}(ed + ef) :: tang. \frac{1}{2}(ef - ed) : tang. \frac{1}{2}(if - id)$ .

Tels sont tous les principes généraux qui sont nécessaires & suffisans pour la résolution des triangles sphériques quelconques , & on les applique , suivant les questions , soit aux triangles donnés , soit aux triangles qu'on nomme supplémentaires & complémentaires.

152. Dans chaque question de trigonométrie sphérique qui est proposée , il est toujours un choix à faire , parmi ces principes généraux , de celui qui peut conduire immédiatement à la solution demandée ; & ce choix est toujours rendu facile par quelques remarques que nous allons présenter.

1°. Si la question proposée porte uniquement sur



des angles & sur les côtés qui leur sont opposés dans un même triangle ; il n'y a aucun doute qu'on doit employer, pour la résoudre, le premier principe général ; & c'est le seul cas où il ne devient pas nécessaire de mener, d'un des angles, un arc perpendiculaire sur le côté qui lui est opposé : car dans tout autre cas, un tel arc devient nécessaire à la solution.

2°. Des deux analogies qui ont été indiquées pour servir & suffire à la résolution de tous les triangles rectangles, & qui dérivent du premier principe général, l'une suppose l'hypothénuse connue ou cherchée, & la seconde n'a aucun rapport avec elle. Ainsi les questions proposées appellent pour les résoudre, l'application de la première analogie, lorsqu'elles font mention de l'hypothénuse ; & dans le cas contraire, leur solution dépend de la seconde analogie.

3°. Le quatrième principe général n'est jamais employé, qu'autant qu'on connoît la grandeur, ou de chacun des trois côtés d'un triangle, ou de ses trois angles. Dans le premier cas, on mène un arc perpendiculaire, du sommet d'un angle qui n'est ni connu ni cherché, sur le côté qui lui est opposé ; & dans le 2.<sup>e</sup>, cette même opération regarde le triang. supplémentaire, dont les trois côtés sont alors donnés. Ce principe sert à déterminer la somme ou la différence des deux segmens ; & ensuite, à l'aide de la quantité calculée, on cherche la valeur demandée d'un des angles du même triangle.

4°. Si dans une question, il s'agit d'angles & de côtés qui ne leur sont pas opposés, (dans un triangle obliquangle ; ) alors il faut mener, comme on l'a dit précédemment, un arc perpendiculaire. On cherche ensuite un des segmens, par une des analogies des triangles rectangles, formés dans le triangle proposé, ou dans son supplémentaire. Après cette détermination, on calcule la partie demandée du triangle proposé ; & l'état seul de la question sert alors à juger s'il faut employer ou le principe qui est relatif aux segmens & aux côtés correspondans ; ou celui qui présente les rapports des segmens & des angles qui leur sont adjacens

5°. Lorsque la résolution d'un triangle obliquangle exige l'application de l'un des trois derniers principes généraux ; il y a une proportion qui devient nécessaire pour trouver une des parties des triangles rectangles qui sont formés dans le triangle proposé. Cette proportion applicable dans tous les cas, est que le rayon est au cosinus d'un des angles obliques d'un triangle rectangle ; comme la tangente de l'hypothénuse est à celle du côté de l'angle droit ; adjacent à ce même angle. Elle est fondée sur ce que ; dans le triangle *dec*, qui est complémentaire de *abc* rectangle en *b* [fig. 47], on peut dire  $1::\sin. de::tang. d::tang. ec$ . Ainsi on peut dire, dans le triangle *abc*,  $1::\cos. a::tang. ca::tang. ab$  ; & cette proportion est celle qui a été indiquée pour déterminer, (dans un triangle rectangle qui fait partie d'un triangle obliquangle), ou l'un des segments, ou l'un des angles obliques.

153. Indiquons actuellement comment doivent être faites les applications des principes précédens.

Etant donnés, dans un triang. rectang. *abc* (fig. 47), l'hypothénuse *ca* & le côté *cb* ; si on demande l'angle qui est compris entre ces côtés, on peut le trouver par cette analogie,  $1::\cos. c::tang. ca::tang. cb$ . C'est aussi par une semblable proportion qu'on peut calculer, & la valeur d'un côté d'un angle oblique (lorsque cet angle ; ainsi que l'hypothénuse sont connus) ; & celle de l'hypothénuse (étant donnés un angle oblique & un de ses côtes).

Si, les deux côtés de l'angle droit d'un triangle *abc* étant connus, on demande l'hypothénuse *ac* ; dans ce cas, les analogies ne sont applicables qu'à un triangle complémentaire, tel que *dec*, où sont donnés l'angle *d* & l'hypothénuse *dc*. On fait alors la première analogie, puisqu'il est question de l'hypothénuse *dc* ; & on en conclut, que dans le triangle *abd*, on doit faire cette proportion,  $1::\cos. cb::\cos. ab::\cos. ac$ .

Ces exemples suffisent pour indiquer l'usage, & des analogies fondamentales, & des triangles complémentaires, qui servent à la résolution des triangles sphériques rectang. Nous n'en ajouterons pas d'autres, parce que en traitant de l'astronomie de l'homme de mer, nous

aurons

aurons plusieurs occasions de résoudre avec détail des triangles de cette classe.

Dans un triangle obliquangle *def* (fig. 46), si les angles *e* & *f* sont connus, ainsi que le côté *df*, & qu'on demande le côté *de*; l'application du premier principe est clairement indiquée, & on doit faire cette proportion,  $\sin.e:\sin.df::\sin.f:\sin.de$ . Elle sert à déterminer immédiatement l'arc *de*, puisque le terme *sin.de* est seul inconnu dans cette analogie.

Si on connoissoit l'angle *d*, ainsi que le côté *df* & l'angle *f*, on ne trouveroit la valeur de l'angle *e*, qu'en ayant recours au triangle supplémentaire *abc*, dans lequel on meneroit l'arc *cz* perpendiculairement à *ba*. Dans ce dernier triangle, on connoîtroit alors *ab*, *bc* & l'angle *b*, & on calculeroit, dans le triangle partiel *zcb*, la valeur du segment *bz*, en faisant cette proportion,  $1:\cos.b::\tan.cb:\tan.bz$  (152). Cet arc *bz* étant ensuite retranché du côté *ba* qui est connu, leur différence seroit le segment *za*; & alors l'arc *ac* cherché, seroit calculé par le moyen du troisieme principe général, qui est que  $\cos.bz:\cos.za::\cos bc:\cos.ac$ . Le seul terme inconnu de cette analogie seroit *cos.ac*; & le supplément de *ac*, qui devient aisé à connoître, seroit l'angle *e* demandé.

Si dans le triangle *def*, le côté *fe* étoit cherché, au lieu de l'angle *e*, en supposant toujours les mêmes choses connues; alors, dans le triangle supplémentaire, on calculeroit, comme auparavant, les segmens *bz* & *za*, & comme il s'agiroit de ces segmens, & des angles qui leur sont adjacens, il faudroit appliquer le second principe général. On diroit donc,  $\sin.bz:\sin.za::\cot.b:\cot.a$ . Le terme *cotang.a* seroit alors calculé à l'aide de cette proportion, & le supplément de *a* seroit le côté *ef* demandé.

Si les trois côtés d'un triangle étoient connus, & si on demandoit la valeur d'un des angles, il faudroit employer le quatrieme principe, qui n'a d'application que dans ce seul cas. Il seroit connoître la demi-somme ou la demi-différence des deux segmens, tels que *di* & *if*, dans le triangle *def* (en supposant toujours que du som-

met de l'angle  $e$ , qui n'est pas cherché, on eut mené un arc  $ei$  perpendiculaire sur  $df$ ). La moitié de cette différence étant retranchée de la demi-somme des segments, le reste seroit la valeur du petit segment  $di$ ; & alors, dans le triangle rectangle  $dei$ , si l'angle  $d$  du triangle  $edf$  étoit demandé, on seroit, pour le déterminer, cette proportion,  $1:\cos.d::\tan g.ed:\tan g.di$ .

Nous bornerons ici les indications des applications des principes généraux de la trigonométrie sphérique; parce que, comme nous l'avons dit relativement aux triangles rectangles, il y aura dans l'astronomie de l'homme de mer, des exemples développés de ces mêmes applications. Cependant avant d'abandonner cette matiere, je crois devoir faire connoître la proportion unique qui est fournie par l'algebre, pour servir à déterminer un angle d'un triangle sphérique dont les trois côtés sont connus.

Soit  $def$  ce triangle. Nommons  $ef, b; de, c; df, p; di, y$ , & l'angle cherché  $edf$ ,  $d$ . Puisque le triangle  $die$  est rectangle en  $i$ , on peut dire,  $1:\cos.d::\tan g.c:\tan g.y$ ; & le troisieme principe dicte cette analogie,  $\cos.y:\cos.(p-y)::\cos.c:\cos.b$ , ou  $\cos.y:\cos.p \cos.y+\sin.p \sin.y::\cos.c:\cos.b$ . Si on divise par  $\cos y$  les termes du premier rapport de cette derniere analogie, on a  $1:\cos.p+\sin.p \tan g.y::\cos.c:\cos.b$ ; donc  $\cos.b-\cos.p \cos.c=\sin.p \cos.c \tan g.y$ ; & comme par la premiere proportion on a l'équation  $\cos.d \tan g.c=\tan g.y$ , ou  $\cos.d \sin p \sin.c=\sin.p \cos.c \tan g.y$ ; il résulte du parallele des deux équations précédentes, que  $\cos.b-\cos.p \cos.c=\cos.d \sin.p \sin.c$ . Rappelons ici que  $\cos d=1-2\sin.\frac{1}{2}d^2$  (118), & alors on doit avoir  $\sin.p \sin.c-2\sin.p.\sin.c.\sin.\frac{1}{2}d^2=\cos.b-\cos.p \cos.c$ , ou  $\cos.(p-c)-\cos.b=2\sin.p.\sin.c.\sin.\frac{1}{2}d^2$ . Il reste à savoir actuellement comment on peut exprimer la différence des cosinus des deux arcs  $(p-c)$  &  $b$ . Soient, la somme de ces deux arcs  $(p-c+b)=2m$ , & leur différence  $(b-p+c)=2x$ ; alors  $m+x=b$ , &  $m-x=p-c$ ; mais  $\cos.(m-x)-\cos.(m+x)=\cos.m \cos.x+\sin.m \sin.x-\cos.m \cos.x+\sin.m \sin.x=2\sin.m \sin.x=2\sin.\frac{1}{2}(p-c+b) \sin.\frac{1}{2}(b-p+c)$ : donc en revenant à l'équation qui résulte des analogies précédentes, & en y substituant, à la place

de  $\cos.(p-c)-\cos.b$ , la quantité qui est égale à cette différence, on obtient l'équation finale  $\sin p \sin.c \sin \frac{1}{2}d^2 = \sin \frac{1}{2}(p-c+b) \sin.\frac{1}{2}(b-p+c)$ . On peut donc toujours faire la proportion suivante, propre à faire trouver l'angle  $d$ ;  $\sin.p \sin.c : \sin.\frac{1}{2}(p-c+b) :: \sin \frac{1}{2}(b-p+c) : \sin.\frac{1}{2}d^2$ . Cette analogie unique, dont on peut calculer aisément le 4.<sup>e</sup> terme par le moyen des logarith., n'exige pas, comme on voit, la connoissance des segmens d'un trian. sphérique, pour arriver à la valeur d'un des angles, dans le cas où les trois côtés sont connus.

154. Les idées que nous avons donné, & d'une sphere, & des cercles qu'on peut décrire sur sa surface; & des angles ou des triangles qu'on peut y former, doivent être actuellement dirigées & appliquées à l'art de la navigation; c'est-à-dire, à cet art qui a pour principal objet de déterminer, dans tous les instans, la position du lieu où peut être parvenu un vaisseau, sur l'étendue des mers, après une route connue.

Avant d'entrer dans ces développemens intéressans, examinons comment il est possible de désigner la situation d'un point dans l'espace, lorsqu'il fait partie, ou d'une simple ligne droite, ou d'une surface plane, ou enfin d'un solide.

Tous les points d'une ligne droite sont inégalement éloignés de l'une de ses extrémités. Ainsi en connoissant la distance d'un de ces points à cette extrémité, on sait où il doit être placé, sur la longueur de cette ligne.

Soit un point  $o$  sur le plan DABC (fig. 51); & soient menées, par le point A choisi sur ce plan, deux lignes DA & AB, qui soient perpendiculaires l'une à l'autre, & qui aient des directions connues, afin qu'elles puissent servir de comparaison pour tous les points du plan supposé. La position d'un point  $o$  quelconque est toujours déterminée, lorsqu'on connoît sa distance aux 2 lignes fixes AD & AB. Car soit menée par  $o$  une ligne  $cox$ , qui soit parallèle à AB. Il n'est dans le plan DABC, que les seuls points de  $ex$ , qui soient placés à une distance  $eo$  de la ligne AB; & comme ceux-ci sont tous à des distances inégales de AD, il s'ensuit qu'il n'est

qu'un point, non seulement sur *cox*, mais aussi sur toute l'étendue du plan, qui puisse être en même tems, à telle distance donnée *co* de la ligne AD, & à telle distance *ou* de la ligne AB. La position d'un point sur un plan, ou sur une surface plane quelconque, est donc toujours déterminée par ses distances à deux lignes fixes, qui sont menées dans ce plan perpendiculairement l'une à l'autre.

S'il s'agit de déterminer la position d'un point dans l'espace, il ne suffit pas de le comparer à deux lignes; il faut connoître ses distances à trois lignes, qui perpendiculaires entr'elles, soient menées suivant des directions connues, par un point choisi dans l'espace. Soit C (fig. 44) le point dont il faut déterminer le lieu, & soit *i* le point fixe qui sert de terme de comparaison. Imaginons que par ce point, on ait fait passer les plans IDEF, IDBH, IHGF, qui sont supposés perpendiculaires entr'eux, & dans des situations connues. Si par le point C on fait passer un plan CBDE, qui soit parallèle au plan IG, on peut dire alors que de tous les points du solide supposé, il n'y a que ceux du premier de ces plans, qui soient à la distance CG du second de ces plans (en supposant GC perpendiculaire au plan IG). D'ailleurs le point C est le seul de tous les points du plan DC qui soit en même tems aux distances BC & CE des deux lignes perpendiculaires BD & DE, ou des deux plans IB & IE: donc il n'y a dans l'espace qu'un seul point C, qui soit à des distances données des trois plans perpendiculaires supposés, ou des trois lignes DI, IF & IH, qui sont perpendiculaires les unes aux autres.

De-là il s'ensuit que dans un solide, la position d'un point quelconque est toujours déterminée, lorsqu'on connoît ses distances à trois plans qui sont perpendiculaires entr'eux, & placés dans des situations connues.

Si on considère un point qui appartient à la surface d'une sphère dont le rayon est donné, la position de ce point peut être déterminée plus simplement; c'est-à-dire, par ses distances à deux seuls plans fixes. Car soit un point *r* (fig. 43) de la surface d'une telle sphere, &

soient imaginés trois grands cercles dont les plans  $NpS$ ,  $NoS$  &  $odE$  soient perpendiculaires entr'eux. Supposons aussi, que par le point  $r$ , on fasse passer un autre grand cercle  $Nrds$  perpendiculaire à  $odE$ ; & que de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les trois plans qui viennent d'être indiqués: la connoissance des distances  $re$  &  $rn$ , du point  $r$  aux deux plans  $odE$  &  $NoS$ , suffit pour savoir quelle est la distance du même point  $r$  au plan  $NpS$ . En effet, le rayon de cette sphere étant donné, il concourt avec la distance  $re$ , qui est le sinus de l'arc  $de$ , à déterminer  $ec$ , qui est le cosinus du même arc. La ligne  $eC=rR$ , est le rayon du parallele, qui passe par le point  $r$ , & dont  $ar$  est un arc; alors dans le triangle  $rnR$  rectangle en  $n$ , les côtés  $rR$  &  $rn$ , qui sont connus, servent à trouver la valeur de  $nR$ , ou de la distance du point  $r$  au plan  $NpS$ . Dans une sphere il suffit donc de connoître les distances d'un des points de sa surface à deux plans, qui sont perpendiculaires entr'eux, pour juger de la position de ce point.

On peut appliquer complètement ces résultats au globe de la terre, parce que sa forme est à peu près sphérique, & parce que la grandeur de son rayon a été conclue de la mesure de plusieurs degrés de ses grands cercles. Remarquons d'ailleurs que la ligne, ou la distance  $re$ , est le sinus de l'arc  $rd$ ; & que sa grandeur étant donnée, ainsi que celle du rayon de la terre, on peut en conclure aisément le nombre des degrés de l'arc  $rd$ . On conclut aussi des mêmes données, le cosinus de cet arc  $rd$ , ou le rayon du parallele qui passe par le point  $r$ . De même étant connue la ligne  $rn$ , qui est le sinus de l'arc  $ar$ , dont le rayon est  $Rr$ , on peut trouver aussi le nombre des degrés de l'arc  $ra$ . Donc réciproquement, étant donnés le nombre des degrés de l'arc  $rd$ , & celui des degrés de l'arc  $ra$ , ou de l'arc  $od$  (parce que ces deux arcs sont composés d'un même nombre de degrés), la position du point  $r$  sur la surface de la terre, doit toujours être déterminée définitivement.

Ce résultat est même confirmé par les réflexions suivantes. Imaginons que par le point  $r$ , on ait fait passer un petit cercle parallele au grand cercle  $odE$ . Tous les

points de la circonférence de ce parallèle, sont les seuls de la surface de la demi-sphère  $NodE$ , qui ayent, à l'égard de la circonférence  $odE$ , une distance  $rd$  (comptée en degrés, sur la circonférence d'un grand cercle perpendiculaire à  $odE$ ). D'ailleurs, sur le contour de ce parallèle dont  $ar$  fait partie, tous les arcs qui sont placés entre le point  $a$  & chacun des autres points de cette circonférence, ont une grandeur qui n'est pas la même pour deux de ces points quelconques. Donc il n'est qu'un seul point du contour de ce parallèle, qui soit, en même tems, à tel nombre de degrés de distance du plan  $odE$ , & à tel autre nombre de degrés de distance du plan  $NoS$ . Ainsi en général la position d'un point  $r$  sur la surface de la terre, est toujours déterminée par le nombre des degrés des arcs  $rd$  &  $od$ , comme on l'avoit démontré précédemment.

C'est en considérant les objets sous ce point de vue qu'il a fallu faire le choix de deux grands cercles dont les plans perpendiculaires l'un à l'autre, seroient destinés à servir de termes fixes de comparaison, pour établir la position respective de tous les points de la surface de la terre. Comme on a reconnu par des observations particulières, que la terre tourne sur elle-même une fois en 24 heures; soit  $NS$  le diamètre autour duquel cette rotation naturelle s'exécute. Ses extrémités  $N$  &  $S$  sont les poles d'un grand cercle  $odE$ , auquel cet axe est perpendiculaire. Par cette raison, ces points ont reçu le nom de poles de la terre; & le grand cercle  $odE$ , sous le nom d'équateur, est celui qui a été choisi par toutes les nations, pour être un des plans de comparaison.

L'autre plan de convention est bien celui d'un de ces grands cercles, qui, sous le nom de méridiens, sont perpendiculaires à l'équateur, & passent par les poles de la terre; mais toutes les nations ne se sont pas également accordées dans le choix d'un même méridien. Les Anglais, par exemple, ont adopté le méridien qui passe par Londres; & les Français celui de Paris, après avoir abandonné celui de l'île de Fer. Ainsi, pour avoir égard à toutes les convenances, nous donnerons désor-



mais à ce cercle de comparaison, le nom de premier méridien. Ceci suppose, comme on a dû le remarquer, qu'il n'est aucun point de la surface de la terre qui n'ait son méridien particulier; & on s'assure de cette vérité, en reconnoissant que par un pôle de la terre, & par un point quelconque de sa surface, on peut toujours faire passer un grand cercle, qui nécessairement est perpendiculaire à l'équateur, & qui par conséquent est un méridien. On doit aussi ajouter que, par un point quelconque  $r$ , on ne peut faire passer qu'un seul petit cercle, dont le plan soit parallèle à l'équateur; & par conséquent, un point quelconque de la terre a non seulement son méridien, mais aussi son parallèle particulier.

Le méridien du point  $r$  est  $NrdS$ ; & le nombre des degrés de l'arc  $rd$ , ou de l'arc du méridien qui est compris entre ce point  $r$  & l'équateur, est nommé la latitude de  $r$ . On donne aussi le nom de longitude de  $r$  à l'arc  $od$ , ou à l'arc de l'équateur qui est compris entre le méridien  $NrdS$  & le premier méridien supposé  $NoS$ . C'est pourquoi la position d'un lieu sur la terre est toujours déterminée, (conséquemment à ces dénominations,) par sa latitude & par sa longitude. Cependant elle ne seroit pas indiquée avec assez de précision, si on se contentoit de la faire connoître par le seul nombre des degrés, ou de l'arc  $rd$ , ou de l'arc  $od$ . En effet l'équateur partage la terre en deux hemispheres égaux, dont l'un est distingué par le titre de boréal, parce qu'il contient le pôle nord dans son étendue; tandis que l'autre reçoit le titre d'austral, à cause du pôle sud qui est sur sa surface. Ainsi il est nécessairement un point dans l'hémisphere austral qui est autant éloigné de l'équateur, que le point  $r$  de l'hémisphere boréal. Il faut donc, quand on annonce la latitude d'un lieu, désigner dans quel hemisphere il est placé; & c'est en donnant le titre de boréale ou d'australe à sa latitude, que l'indication devient suffisante.

Nous remarquerons aussi que la longitude des lieux de la terre, (qui souvent est comptée, à partir du premier méridien, depuis 0 jusqu'à 360 degrés; dans le

sens du mouvement journalier de la terre, ou de l'ouest à l'est, ) est comptée quelquefois, à partir du premier méridien, & de chaque côté de ce plan, depuis 0 jusqu'à 180 degrés. D'après ce dernier arrangement, on est convenu de donner le titre d'occidentale à la longitude des lieux qui sont dans l'ouest du plan du premier méridien. Cette longitude est comptée depuis 0 jusqu'à 180 degrés, dans le sens de l'est à l'ouest; & on nomme orientale la longitude des lieux qui sont dans l'est du premier méridien. La position d'un lieu sur la surface de la terre est donc exactement indiquée par sa latitude & sa longitude, en désignant d'ailleurs si sa latitude est Nord ou Sud, & si sa longitude est Est ou Ouest.

C'est donc aussi par sa longitude & par sa latitude, que le lieu d'un vaisseau peut être déterminé sur la surface des mers; & ces élémens sont les objets continuels de l'attention des navigateurs, lorsqu'ils parcourent les mers avec des vents favorables ou contraires. Cependant il ne leur suffit pas d'établir sur des bases certaines la position de chaque point de la route de leur vaisseau, ils ont aussi besoin de comparer sans cesse le point où ils sont transportés, à celui qui est le but, ou de leur voyage, ou d'une relâche nécessaire, ou d'une reconnaissance utile. Il faut donc aux hommes de mer un tableau exact, ou une image parfaite de la surface des mers, pour y rapporter le lieu de leur vaisseau, leurs distances à divers points, la situation de leur route, & surtout pour faire des comparaisons importantes, qui servent à donner à leur marche successive, les directions qui peuvent être convenables, soit aux circonstances, soit aux projets qu'ils se proposent d'exécuter.

Un simple globe en carton, & parfaitement semblable à la terre, ne peut satisfaire à ces vues, soit parce que son rayon ne peut être assez considérable, soit parce qu'on ne pourroit y représenter, par des lignes d'une étendue sensible, ni les routes ordinaires des vaisseaux, ni leurs changemens, souvent très-petits, soit en latitude, soit en longitude. D'ailleurs ces routes & ces changemens sont autant de lignes courbes parcourues sur la

surface des mers; & par conséquent leur forme les rend peu susceptibles d'être mesurées avec précision sur un globe, ainsi que d'y être tracées sous leur véritable direction.

Ces difficultés ont donc éloigné l'usage des globes, dans l'art de la navigation; mais le besoin de diriger ainsi que de faciliter les opérations de cet art, a obligé de recourir à de nouveaux moyens; & des considérations particulières ont fait connoître que des cartes planes, ou des représentations de la surface de la terre, qui seroient faites sur des plans, suivant certaines conditions, rempliroient parfaitement les vues des navigateurs.

155. *Cartes marines.* Quoique les positions des différens points de la terre soient déterminées définitivement par leurs longitudes & leurs latitudes; il ne suffit pas que des cartes, pour être propres à la navigation, présentent tous les lieux de la terre, ou tous les points de l'étendue des mers, suivant leurs longitudes & leurs latitudes. Il faut aussi que les distances respectives de ces mêmes lieux, & telles qu'elles peuvent être parcourues par un vaisseau, y soient représentées, & dans leur vraie situation, & sous une forme qui les rende aussi faciles à mesurer qu'à tracer, suivant les directions qu'elles peuvent avoir. Des lignes droites satisferoient à cette dernière condition, s'il n'étoit question que de mesurer ces distances; mais il est encore nécessaire que celles-ci soient décrites suivant leur positions respectives: ainsi examinons s'il est possible de trouver l'un & l'autre avantage, en représentant ces distances par des lignes droites.

Soit comparé le point *c* au point *a* (fig. 102. G) de la surface des mers. Le chemin le plus court qui les sépare est, sans doute, un arc de grand cercle, compris entre ces deux points: mais tel n'est pas le véritable chemin *cea* que parcourt un navigateur, pour se rendre du point *c* au point *a*. Obligé de diriger sa marche à l'aide de la boussole, sa route *cea* est toujours telle, que chacun de ses élémens, semblable à *en*, fait un même angle avec tous les méridiens *bd*, *bt*, *bz*, *bq*, &c. qu'elle croise dans son cours. Cette route, que

nous nommons avec les marins la distance des deux points  $a$  &  $c$ , & qui est parcouru par un vaisseau, pour se rendre de l'un à l'autre de ces points, est donc celle qui doit être représentée convenablement sur une carte marine; Et elle ne peut l'être par une ligne droite, qu'autant que les méridiens de la terre y sont eux-mêmes représentés par d'autres lignes droites qui soient parallèles entr'elles.

Examinons par conséquent sur quelle base solide on peut construire des cartes qui (sous la forme qu'on vient d'indiquer comme nécessaire) assurent aux opérations des navigateurs, autant d'exactitude, qu'elles promettent de commodité.

Soit un espace  $oqfd$  (fig. 43) compris sur la surface de la terre, entre les deux méridiens  $dfs$ ,  $oqs$ , & les deux arcs parallèles  $qf$  &  $od$ . Soit aussi proposé de le représenter convenablement sur un plan, en donnant à ses méridiens la forme de lignes droites parallèles. A cet effet, imaginons que les points de l'espace  $oqfd$  soient placés sur une surface semblable à celle d'un de ces fuseaux dont on recouvre un globe de carton, qu'on peut détacher de ce globe & étendre sur un plan; ou plutôt supposons que l'arc  $oq$  d'un des méridiens extrêmes de cet espace, considéré comme un fil qui enveloppe le globe dans cette partie, soit étendu en ligne droite, sans cesser d'être perpendiculaire sur le plan de l'équateur, & sans cesser aussi de porter l'empreinte des lieux qui sont situés sur le contour  $oq$  de cet arc du méridien du globe. En faisant un semblable développement du méridien extrême  $df$ , ces deux arcs  $oq$  &  $df$  deviennent, dans toute leur étendue, les lignes droites  $og$  &  $dy$ , qui sont tangentes au globe en  $o$  & en  $d$ . Les points  $q$  &  $f$  de la terre sont alors, par cette opération, transportés en  $g$  & en  $y$ ; & en étendant l'application des mêmes idées aux divers méridiens intermédiaires; tous les points de l'espace  $odfq$  doivent se trouver placés sur l'espace  $ogyd$ . Toutes les portions de ces méridiens sont donc après leur développement, autant de lignes droites perpendiculaires à l'équateur, comme on l'a dit précédemment: ainsi l'espace  $ogyd$  doit appartenir nécessairement à la surface extérieure d'un cylindre droit, parce que

les lignes *og*, *dy*, & les intermédiaires sont autant de perpendiculaires qui sont élevées sur le plan *odE* par chaque point de l'arc *od*. Le côté de ce cylindre a la longueur de *og*, & sa base entière seroit un grand cercle de la sphere, ou l'équateur, si tous les méridiens de la terre éprouvoient le changement que nous avons supposé dans ceux qui correspondent au seul espace *odfq*.

Considérons actuellement dans cet espace *ogyd*, la situation respective qui résulte de cette opération, pour tous les points qui sur la terre sont répandus dans *odfq*. Leur véritable position est altérée. Il est vrai que la longueur de l'arc du méridien qui sépare de l'équateur chaque point du globe, est exactement égale à celle de la ligne droite, qui, sur le contour extérieur du cylindre, marque sa distance à *od*. Mais on voit évidemment que l'arc parallèle qui, sur la terre, est compris entre chaque point & un méridien extrême *ogs*, n'est pas représenté sur le contour du même cylindre, par un arc qui lui soit égal en longueur. C'est ainsi que l'arc *fq* du globe est représenté, sur un tel cylindre, par un arc *gy*, qui est plus grand que *fq*, puisqu'il est égal à *od*. Les distances respectives de divers points sur la terre ne peuvent donc pas être les mêmes sur la surface du cylindre supposé; c'est pourquoi, en représentant des arcs de méridien, tels que *og* & *of*, par des lignes droites qui soient parallèles & égales en longueur à ces arcs; c'est-à-dire en satisfaisant à une des conditions fondamentales de la forme propre à des cartes marines; l'autre condition est bien éloignée d'être remplie.

Il ne paroît donc pas encore possible de construire de cette manière, des cartes convenables d'une grande portion de la surface de la terre. Mais imaginons que cet espace *odfq* soit partagé en petites surfaces partielles, telles que *ekfq*, dont l'étendue *kf* dans le sens du méridien, soit si petite, qu'on puisse regarder l'arc *fk* comme une ligne droite. Alors la différence des arcs parallèles *fq* & *ke* ne peut être qu'insensible, & ces arcs peuvent, par conséquent, être regardés comme égaux. Si d'ailleurs les arcs *eq* & *kf* des méridiens extrêmes de cet espace partiel, ainsi que ceux des méridiens

diens intermédiaires, sont supposés, comme précédemment, être étendus en lignes droites, qui sont perpendiculaires à l'équateur; l'espace  $fkeq$  peut dès-lors être considéré comme une partie de la surface extérieure d'un petit cylindre droit & particulier, qui auroit pour hauteur la longueur de  $kf$ , & pour base entière un petit cercle parallèle, dont  $fq$  est un arc.

Supposons actuellement qu'on se propose de tracer, sur la surface extérieure d'un plus grand cylindre droit, dont la base seroit un cercle égal à l'équateur, une figure parfaitement semblable à celle qui résulte du développement de  $ekfq$ , & qui est tracée sur un cylindre droit, dont la base, comme nous l'avons dit, n'est qu'un petit cercle parallèle dont  $fq$  est un arc. On y parvient en rendant proportionnels les côtés des deux figures supposées: il faut donc que leurs hauteurs soient proportionnelles aux circonférences de leurs bases, ou que la hauteur de la figure tracée sur le contour du grand cylindre, soit à  $eq$ , hauteur de celle qui est tracée sur le petit cylindre, comme la longueur de  $od$  sur le premier, est à celle de  $qf$  sur le second. Cela signifie en d'autres termes, que l'étendue en latitude d'un espace partiel  $eqfk$  de la surface du globe, doit être représentée sur le contour du grand cylindre, par une ligne qui soit à la longueur de  $kf$ , dans le rapport des arcs  $od$  &  $qf$ , qui sont d'un même nombre de degrés. Rappelons-nous d'ailleurs que le rapport des arcs  $od$  &  $qf$ , est celui du rayon du globe au cosinus de l'arc  $oq$ , qui est le cosinus de la latitude du point  $q$ , ou le rapport de la sécante de la latitude du point  $q$  au rayon. Ainsi la hauteur  $x$  de la figure tracée sur le grand cylindre, doit être déterminée par cette proportion,  $x : eq :: \sec. \text{latitude du point } q : 1$ . L'arc  $eq$  a été supposé assez petit pour être considéré comme une ligne droite. C'est pourquoi attribuons-lui la grandeur d'une minute d'un degré de grand cercle, ou la 21600<sup>e</sup> partie de la circonférence de l'équateur. Nommons  $m$  cette longueur d'une minute de degré de grand cercle sur la sphere, &  $M$  la ligne qui la représente sur le cylindre circonscrit, (sous le nom de minute de latitude croissante). On doit

alors faire cette proportion,  $M::m::sec.oq:1$ , ou  $M=m.sec.oq$ . Cette formule peut donc faire trouver la valeur de  $M$ , ou de chaque minute de latitude croissante, qui représente l'étendue d'une minute  $eq$  du méridien du globe, sur la surface extérieure du cylindre supposé.

Si on étend ce raisonnement & ses résultats à toutes les portions de l'arc  $oq$  du méridien, & à tous les espaces partiels dont  $oqfd$  est composé; on doit juger qu'on peut, sans erreur sensible, marquer sur la surface extérieure du cylindre déjà indiqué, des petits espaces, qui, placés à la suite les uns des autres, représentent des parties de la surface de la terre. Ces parties, telles que  $eqfk$ , ont chacune l'étendue d'une minute en latitude, & leur nombre est le même que celui des minutes de l'arc  $oq$ . L'ensemble de ces surfaces partielles, qui seroient ainsi tracées sur le contour extérieur de la portion  $odst$  du cylindre indiqué, représenteroit alors la surface entière  $oqfd$ . Remarquons actuellement que le développement d'un cylindre droit & entier, tel que seroit  $onpm$  (fig. 4), est un parallélogramme  $abc$  (fig. 2) qui a pour hauteur le côté du cylindre, & pour base la longueur de la circonférence de la base même du cylindre. C'est pourquoi le développement de cette portion cylindrique  $otsd$  [fig. 43], est donc aussi un parallélo. recta., qui a pour base la longueur de  $od$ , & pour hauteur la ligne  $io$ . Cette dernière ligne est la somme de toutes les minutes de latitude croissante, qui représentent les minutes de l'arc  $oq$ : ou elle est égale au produit de l'étendue d'une minute de grand cercle, multipliée par la somme des sécantes des latitudes de tous les points de l'arc  $oq$  du méridien.

Un parallélogramme ainsi construit, & sur lequel sont placés, suivant les indications indiquées, tous les points de l'espace sphérique  $oqfd$ , porte avec raison le nom de carte marine, ou de carte réduite. Car les méridiens y sont représentés par des lignes droites parallèles, comme l'exigent les besoins des navigateurs; & par conséquent, les routes des vaisseaux, ou les distances respectives des lieux de la terre y sont représentés par autant de lignes droites menées d'un de ces lieux à un autre.

Après avoir exposé comment une portion de la surface du globe peut être représentée convenablement sur un plan, il est à-propos de détailler comment, étant données les latitudes & les longitudes de tous les points embrassés par une mer particulière, on peut construire la carte reduite de cette mer.

Soit une partie  $ac\gamma r$  (fig. 43) de la surface de la terre, qui est telle, que son étendue  $ac$  en latitude, est de 30 degrés, & son étendue  $od$  en longitude de 25 degrés, (en supposant d'ailleurs que le point extrême  $r$  soit placé par 60 degrés de latitude nord & 2 degrés de longitude ouest). Si on propose de faire de cet espace une carte reduite, on mene (fig. 49) une ligne  $DC$ , qui représente la longueur de l'arc  $od$  (fig. 43), ou qui soit d'autant de parties égales, qu'il y a de minutes dans cet arc. On élève ensuite, sur cette ligne, & à ses deux extrémités  $D$  &  $C$ , les perpendiculaires  $CB$  &  $DA$ , pour représenter les deux portions  $ca$  &  $\gamma r$  des méridiens extrêmes de l'espace proposé; & ces lignes doivent être composées d'autant de parties, qu'on compte de minutes dans l'arc  $ac$ . Chacune de ces parties inégales, qui est faite pour représenter l'étendue d'une minute du méridien du globe, doit être déterminée séparément par la formule précédente. Chacune peut l'être aussi par une construction géomé. Car soit (fig. 28) représentée par  $ac$ , la longueur qu'on a donné, sur la ligne  $DC$  de la carte, à l'étendue d'une minute de grand cercle. Soit menée ensuite par le point  $C$ , une ligne  $Ci$ , qui fasse avec  $ca$  un angle égal à la latitude du lieu qu'occupe une certaine minute du méridien sur le globe; & soit élevée au point  $a$  une perpendiculaire  $ai$  sur  $ac$ : l'hypothénuse  $ci$  de ce triangle rectangle ainsi construit, est l'étendue que doit avoir sur la carte la minute supposée du méridien du globe. Car dans ce triangle, on peut dire,  $ac:ci::\cos.lat.:1::1:sec.lat.$  Mais on a vu plus haut que  $m:M::1:sec.lat.$ : donc  $ac$  étant supposé représenter l'étendue d'une minute de l'équateur,  $ci$  doit être celle de la minute de latitude croissante qui correspond à la minute supposée du méridien du globe.



On voit qu'en faisant autant de triangles séparés qu'il y a de minutes dans l'arc  $ac$  du globe, on trouveroit successivement l'étendue de toutes les minutes de latitude croissante, ou de toutes les parties du méridien de la carte, qui correspondent à l'espace  $ac\zeta r$  du globe. On peut aisément s'appercevoir que cette étendue augmente à mesure que la latitude de chaque partie du méridien est plus considérable ; & c'est ce changement de grandeur qui a fait donner aux minutes du méridien de la carte, le nom de minutes de latitude croissante.

La valeur particulière de chaque minute du méridien de la carte étant déterminée par le calcul ou par la construction indiquée, on porte ces longueurs, à la suite les unes des autres, sur la ligne  $CB$ , & on achève le parallélogramme rectangle  $ABCD$ , qui devient ainsi le cadre préparé de la carte demandée. On marque alors, à côté du point  $C$ , (qui représente le point  $\zeta$  du globe) le nombre 30, pour indiquer que sa latitude est de 30 degrés. Au-dessous de ce point, on écrit le nombre 2, parce que sa longitude est de 2 degrés. Les divisions inégales du méridien, sont aussi numérotées depuis 30 jusqu'à 60 degrés ; & les divisions égales, de  $CD$  qui représente une portion de l'équateur du globe, portent aussi des numéros, depuis 2 jusqu'à 27 degrés. Après ces préliminaires, il est facile de placer sur la surface de cette carte, tel point quelconque qui appartient à l'espace  $ac\zeta r$  du globe, lorsqu'on connoit sa latitude & sa longitude. Car soit proposé d'y placer un lieu qui est supposé avoir 42 degrés de latitude N, & 20 degrés de longitude O. On mène par la division numérotée 42, sur le méridien  $BC$ , une ligne droite parallèle à l'équateur  $DC$ . Cette ligne est nécessairement le parallèle du lieu proposé. Ensuite on mène par la division de l'équateur  $CD$ , qui est numérotée 20, une ligne qui est perpendiculaire à la première, & qui représente le méridien du lieu. Alors l'intersection des deux lignes ainsi tracées, est le point de cette carte où doit être placé le lieu proposé. puisque ce point a sur cette carte, & la latitude & la longitude qui ont été indiquées. Tous les autres

lieux de l'espace terrestre *ac* & *r* sont établis sur la carte par un semblable procédé; & on réunit par de petites lignes convenables, ceux qui, par exemple, doivent former ensemble le contour d'une côte.

On trace aussi de cette manière la forme, soit des mers, soit des golphes, soit des bayes, soit des îles, &c.; & on parvient à faire une carte d'une partie plus ou moins étendue de la surface de la terre.

Sans doute tous les lieux de la terre ainsi placés sur une carte réduite, ont les mêmes différences en latitude & en longitude; qui regnent entr'eux sur le globe; mais il reste encore à démontrer, d'après la construction de ces cartes, que les distances des lieux qui y sont dessinées, non seulement représentent parfaitement celles de ces mêmes lieux sur le globe; mais aussi qu'elles y ont des directions propres à indiquer l'air de vent que doit suivre un vaisseau; pour se rendre d'un de ces points à un autre.

Soient deux points *a* & *c* (fig. 102. G) de la surface de l'Océan; & imaginons, pour nous conformer à la méthode des hommes de mer, une courbe *cea*, qui, menée de l'un à l'autre de ces points, représente la route directe d'un vaisseau. Cette courbe est telle, que tous ses élémens *ne* font avec les méridiens qu'elle croise dans son cours, des angles *nem*, qui sont tous d'une même grandeur. Cette route *cea* est ce que nous avons nommé, avec les marins, la distance des points *c* & *a*. Soit partagée cette courbe en une infinité de petits élémens, tels que *ne*; & qu'on peut considérer comme autant de petites lignes droites. Soient aussi menés par leurs extrémités, & des méridiens, & des parallèles. L'arc du méridien *bt*, qui correspond à l'un des élémens *ne*, est *me*; & l'arc *mn* est celui du parallèle qui correspond au même élément. Nommons *r* l'angle *nem* de cet élément avec son méridien *bt* (angle qui porte la dénomination de rhumb de vent). Alors dans le triangle *enm*, qu'on doit regarder comme rectiligne, & qui est rectangle en *m*, on peut faire cette proportion, 1: *cos. r:: ne: em*. Si pour chaque autre élément de la route *aec*, on construit un triangle, tel que *enm*, ces trian-

gles doivent être tous semblables; puisque tous ayant un ang. droit, ont aussi un même ang.  $r$ . On peut donc dire qu'entre chaque élément de la route d'un vaisseau, & la partie du méridien qui lui correspond, il y a un même rapport, qui est celui du rayon au cosinus du rhumb de vent. On peut donc faire une suite infinie de rapports égaux; & d'une telle suite, on doit conclure que la somme de tous les élémens de la route, ou la distance entière *cea* de deux points donnés sur le globe, est à la somme des parties du méridien qui correspondent à ces divers élémens, ou à la différence des latitudes de ces deux points, comme  $1:\cos r$ . Soient nommées,  $C$  la distance *cea* de ces points, &  $D$  la différence de leur latitudes exprimées en parties du méridien du globe; on doit faire cette proportion,  $C:D::1:\cos r$ .

Dans la carte reduite, telle que  $ABCD$  (fig. 49); soit menée une ligne  $os$ , pour réunir les points  $s$  &  $o$ , qui représentent les lieux  $c$  &  $a$  du globe (fig. 102. G). Si par l'un de ces points  $S$ , on fait passer un parallèle  $yS$ , & par l'autre un méridien  $oy$ , alors on forme sur la carte un triangle rectangle  $oSy$ . L'hypothénuse est la distance indiquée des lieux donnés, & l'angle  $yoS$  est le rhumb de vent désigné, d'après lequel la route doit être faite par un vaisseau, pour arriver du point  $c$  au point  $a$ . Remarquons aussi, que le côté  $oy$  de l'angle droit est une partie du méridien de la carte, qui est la différence des latitudes croissantes des deux lieux  $a$  &  $c$ ; & qu'il vaut autant de fois 20 lieues marines, qu'il représente de degrés du globe, ou qu'on compte de degrés sur la terre, dans la différence des latitudes terrestres des points supposés. Le côté  $yS$  du même angle droit vaut aussi autant de fois 20 lieues, qu'il y a de degrés dans la différence en longitude de  $a$  &  $c$ .

Il faut vérifier actuellement si l'ang.  $yoS$  de la carte, ou le rhumb de vent qu'elle indique, est le même que l'angle *nem* des élémens de la route *ca* sur le globe. Imaginons la distance  $oS$  partagée en autant de petits élémens, qu'on en compte dans la route *cea* qui est sur le globe. Supposons aussi des méridiens & des pa-

rales qui passent par les extrémités de ces élémens; & considérons entre les triang. ainsi formés, le triang. *uri* qui correspond au triangle *nme* (fig. 102. G. & 49). Ces deux triangles sont semblables, car ils ont chacun un angle droit; & on fait d'ailleurs, par la construction des cartes, qu'on peut faire ces proportions,  $ur:me::1:\cos.lat.$ ; &  $ri:mn::1:\cos.lat.$ ; donc  $ur:me::ri:mn$ ; donc les triangles *uri* & *nme* sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. l'angle d'r rhumb de vent *nem* de la route sur le globe, est donc égal à l'angle *rui* ou *yos*, qui est indiqué sur la carte. Cette carte présente donc l'air de vent convenable sur lequel doit être dirigé un vaisseau, pour se rendre sans détour d'un point du globe à un autre point. La distance de ce point, ou le chemin de ce vaisseau, n'y est pas moins tracé avec exactitude. Car dans le triangle *oys*, on peut faire cette proportion,  $oS:oy::1:\cos.r$ ; mais les calculs faits immédiatement pour la route réelle *cea* tracée sur le globe, ont donné pour résultat la proportion  $C:D::1:\cos.r$ ; donc en comparant ces deux proportions, on en conclut que  $oS:oy::C:D$ . Or, comme on l'a dit plus haut, la ligne *oy* vaut autant de fois un tiers de lieue, que *D* contient de fois l'étendue d'une minute de degré du globe: par conséquent *oS* doit valoir autant de fois un tiers de lieue, que la route *cea* contient de fois l'étendue d'une minute de degré du globe.

La ligne *oS* représente donc parfaitement sur la carte la longueur de la route *cea*, qui sépare deux points donnés *C* & *a* sur la surface du globe. Il faut seulement pour faire une juste évaluation de cette ligne *oS* en lieues marines, mesurer sa longueur d'après une base convenable; & l'échelle qu'il faut employer est évidemment la partie du méridien de la carte, qui est la différence des latitudes croissantes des deux points proposés. Car la ligne *oS*, étant dans la proportion précédente un terme homologue à la ligne *oy*, doit être mesurée sur une échelle qui est commune à ces deux lignes. La ligne *oy* contient autant de tiers de lieue, qu'elle représente de minutes du méridien du globe; par conséquent autant de

fois la longueur de  $os$  contient la ligne  $oy$ , autant elle vaut de fois le nombre des lieues que  $oy$  représente. Il faut donc, pour mesurer  $os$ , donner à un compas une ouverture qui égale  $oy$ , & la porter sur la route  $os$ , autant de fois & de parties de fois, qu'elle peut y être contenue, pour en conclure la distance des lieux supposés, ou le nombre des lieues de distance.

En rassemblant toutes les considérations précédentes, il est donc bien démontré que les cartes reduites sont telles qu'elles doivent être desirées par les hommes de mer. Car elles leur présentent, avec toute la vérité nécessaire, non seulement les longitudes & les latitudes des divers points des mers, mais aussi la grandeur réelle du chemin qu'un vaisseau doit parcourir, ainsi que la direction que sa marche doit recevoir, pour parvenir par une route convenable, d'un point du globe à tout autre point de sa surface.

Si nous sommes entrés dans des détails si étendus, c'est qu'étant essentiels, ils ne se trouvent dans aucun ouvrage connu, & qu'ils sont nécessaires pour convaincre ceux qui exercent la navigation, non seulement que les opérations qui leur sont indiquées donnent des résultats exacts, mais aussi que les cartes reduites exigent de la part des hommes qui en font usage, une connoissance approfondie de leur construction, afin d'éviter des méprises toujours dangereuses à commettre. D'ailleurs les développemens précédens sont utiles, non seulement pour l'intelligence des cartes marines, mais aussi pour la réduction des routes des vaisseaux; c'est-à-dire pour la recherche du lieu où se trouve placé sur le globe, un vaisseau qui a fait une route dont la longueur & la direction ont été mesurées. C'est cette dernière question qui nous reste à aborder, & les réflexions précédentes sont propres à faciliter, ainsi qu'à éclaircir sa solution.

156. *Réduction des routes des vaisseaux.* Si un vaisseau a fait une route *cea*, dont la longueur a été estimée à l'aide du *lok*, & dont la direction a été déterminée par le moyen de la boussole (en ayant d'ailleurs égard, soit à la dérive, soit à la variation de l'aiguille

aimantée); on demande quel est le point de la mer, où il est arrivé. La position de ce point sur le globe, dépend de sa latitude & de sa longitude; & comme celle du point de départ ou du point initial de la route est supposée connue, il ne reste, pour déterminer la première, qu'à trouver le chemin fait par le vaisseau, soit en latitude, soit en longitude. Au point *c* du départ, la latitude du vaisseau étoit *cd*, & transporté au point *a*, sa latitude est devenue *aq*. Ainsi il a varié en latitude de toute la différence des arcs *aq* & *cd*.

Le chemin du vaisseau en latitude est composé, comme on l'a dit précédemment, de tous les chemins partiels, tels que *me*, qui correspondent aux élémens de la route *cea*. De même le chemin qu'il a fait en longitude est l'assemblage de tous les petits chemins, tels que *zt*, qui, sur l'équateur, correspondent aux mêmes élémens de la route. Déjà nous avons vu qu'on peut calculer tous les petits chemins en latitude, par cette proportion,  $1::\cos.r::C:D$  (où *r* exprime le rhumb de vent, *C* la longueur de la route, & *D* le chemin du vaisseau en latitude), & les logarithmes rendent prompte & facile l'opération qui tend à déterminer le quatrième terme de cette proportion, dont les trois autres sont supposés donnés. Ils servent ainsi à faire connoître le chemin en latitude qui correspond à la route entière du vaisseau. Si l'usage du calcul par logarithmes, promet des résultats sûrs & précis, la nécessité de rendre commodés & presques mécaniques ces dernières opérations, qui reviennent si fréquemment dans la pratique de l'art de la navigation, invite aussi à faire usage de quelque nouveau moyen. En conséquence, nous allons faire voir comment on peut déterminer, par une opération graphique, ou par une construction géométrique, le chemin en latitude, qui d'ailleurs est donné par le calcul direct qu'on vient d'indiquer.

La proportion  $1::\cos.r::C:D$  peut convenir à un triangle rectiligne rectan. qui seroit formé convenablement. En effet, soit menée, par un point *e* (fig. 50), une ligne méridienne *ea*. Si on fait passer, par le même point *e* une ligne *ec*, qui fasse avec *ea* un angle égal au

rhumb de vent observé à bord d'un vaisseau, & dont la longueur *ec* soit d'autant de parties égales, qu'on compte de lieues dans la route mesurée du vaisseau; & si enfin, par l'extrémité *c* de *ec*, on abaisse une perpendiculaire *cd* sur la ligne nord & sud *ed*; le chemin en latitude doit être représenté par cette ligne *ed*. Car dans le trian. rectangle qui est ainsi construit, on peut dire,  $1:\cos.e::ec:ed$ , ou  $1:\cos.r::C:ed$ . Ce quatrième terme *ed* doit donc être le même que celui de la proportion fondamentale  $1:\cos.r::C:D$ , qui a les trois premiers termes communs avec la proportion tirée de ce triangle; & il s'ensuit que *ed* doit être la différence cherchée en lati. On connoît la long. de cette ligne en lieues, par le nombre des parties égales qu'elle contient (en supposant que ces parties ont la longueur de celles qui composent la route *ecd*; & on la réduit en degrés, en divisant par 20 le nombre de lieues qu'elle peut valoir. Car, comme on l'a dit ailleurs, l'étendue d'un degré du méridien est de 20 lieues marines. Ce chemin en latitude fait par le vaisseau qui a suivi la route *cea* (fig. 102. G), est la quantité dont il s'est éloigné de l'équateur *qd*. Il se seroit avancé vers ce cercle de la même quantité, si sa marche eut été dirigée de *a* & *c*. Ainsi la différence trouvée en latitude, estimée en degrés & parties de degrés, doit être ajoutée ou ôtée, suivant les circonstances à la latitude de départ, afin que leur somme, ou leur différence devienne la latitude du point d'arrivée du vaisseau; c'est-à-dire, du point extrême de sa route. On voit que la construction du triangle *dec*, & la mesure de ses côtés sont des opérations mécaniques qui peuvent être exécutées avec la règle & le compas.

Le chemin en longitude qui correspond à la route *cea* supposée d'un vaisseau, est *dq*; & il y a deux moyens pour en déterminer la grandeur. L'un est d'un usage très-général & très-commode, quoiqu'il soit quelquefois un peu inexact; & l'autre, dont les résultats sont plus précis, demande plus de lumières dans les calculateurs. La route *cea* étant toujours supposée divisée en une infinité de parties égales, le petit arc parallèle *nm*, qui correspond à un de ses élémens *nc*, est la quantité

dont le vaisseau s'avance de l'est vers l'ouest, ou de l'ouest vers l'est, lorsqu'il est transporté de  $e$  en  $n$ . C'est pourquoi on donne à  $mn$  le nom de chemin parallèle, ou de chemin est & ouest. Tous les petits chemins, tels que  $nm$ , qui correspondent aux élémens de  $cea$ , étant calculés & réunis ensemble, doivent donc exprimer par leur somme, combien le vaisseau, par sa route entière, s'est avancé dans le sens des parallèles; & c'est une telle somme qu'il faut déterminer, pour en conclure ensuite le chemin total  $dq$  du vaisseau en longitude. Dans le triangle  $nme$ , qu'on a déjà décrit ailleurs, on peut faire cette proportion,  $1:\sin.r::ne:mn$ . Pareille proportion peut être faite pour chaque élément de la route; & comme chacune présente le même rapport de  $1:\sin.r$ , tous les rapports qui les composent sont égaux. De la suite de ces rapports, on peut donc conclure cette proportion: la longueur de la route  $cea$ , est à la somme de tous les chemins partiels  $mn$ , ou au chemin parallèle entier, comme  $1:\sin.r$ . Nommons P ce chemin est & ouest; & on doit dire  $1:\sin.r::C:P$ . C'est par une telle proportion qu'on peut calculer la valeur de P, puisque la grandeur de la route d'un vaisseau & sa direction sont supposées données. Ce chemin P est alors représenté par  $cd$  (fig. 50), dans le triangle rectangle  $cde$ , dont on a déjà indiqué la construction. Car on peut y faire cette proportion,  $1:\sin.e$  ou  $\sin..r::ec$  ou C: $cd$  ou P. Le chemin est & ouest fait par un vaisseau, peut donc être trouvé, ou par le calcul, ou mécaniquement. Ce chemin n'est pas, comme on peut le voir, la quantité  $dq$ , dont le vaisseau s'est réellement avancé en longitude; mais il est un assemblage d'une infinité de petits chemins qui ont été courus sur divers parallèles, & qui doivent servir à faire juger du changement  $dq$  en longitude. Ces parallèles, qui sont situés entre les points  $c$  &  $a$ , de départ & d'arrivée, varient en grandeur comme en rayon, selon leur distance à l'équateur  $qd$ ; & pour parvenir au résultat cherché, voici comme on a raisonné. On a regardé la diminution des circonférences de ces parallèles comme graduelle & proportionnelle à leur éloignement de l'équateur. On a supposé



en conséquence que la somme des petits chemins parallèles, ou que le chemin  $cd$  (fig. 50) est la longueur d'un arc parallèle  $fg$  (fig. 102. G), dont la latitude  $fq$  tient le milieu entre la latitude  $cd$  du départ, & celle  $aq$  du point d'arrivée.

En imaginant ainsi assez gratuitement (& sans égard à la rigueur qu'on doit mettre dans les démonstrations) une égalité parfaite entre la ligne  $cd$  & la longueur de l'arc  $fg$ , on a rendu facile la recherche de l'arc  $qd$ , qui est du même nombre de degrés que  $fg$ , & qui est le chemin dont le vaisseau s'est avancé en longitude par sa route  $cea$ . En effet les longueurs des arcs  $qd$  &  $fg$  sont entr'elles comme les rayons de ces parallèles, ou comme le rayon est au cosinus de la latitude  $fq$  du moyen parallèle  $fg$ . Le chemin  $L$  en longitude peut donc alors être déterminé par cette proportion  $L:P::1:\cos.mp$  (en indiquant par  $mp$  le moyen parallèle  $fg$ ); c'est-à-dire que le chemin du vaisseau, est toujours au chemin qu'il a fait est & ouest, ou dans le sens des parallèles, comme le rayon est au cosinus de la latitude du moyen parallèle. Le terme cherché de cette proportion peut aussi être trouvé mécaniquement & par une opération graphique. Car si on trace (fig. 32) une ligne  $en$ , qui représente le chemin trouvé est & ouest, & qui soit égale à  $cd$  (fig. 50); si par le point extrême  $e$ , on fait passer une ligne  $ec$ , qui fasse avec la première un angle égal à la latitude du moyen parallèle; & si enfin, par l'autre extrémité  $n$ , on élève une perpendiculaire; on forme un triangle  $cne$  qui est rectangle en  $n$ , & dont l'hypothénuse  $ec$  représente le chemin cherché en longitude. Car une des proportions qu'on peut faire dans ce triangle est celle-ci,  $\cos.e$  ou  $\cos.mp:1::ne$  ou  $P:ec$  ou  $L$ ; par conséquent les parties égales dont  $en$  est composée, représentant la grandeur d'une lieue, le nombre de fois que la longueur d'une de ces parties est contenue dans la ligne  $ec$ , doit être celui des lieues faites en longitude. Ce chemin  $ec$  est ensuite estimé en degrés, à raison de 20 lieues par degré; & enfin on parvient à déterminer la longitude du point d'arrivée du vaisseau, en ajoutant ou en ôtant ce chemin à la lon-

gitude du point de départ. Celle-ci est diminuée du chemin fait en longitude, lorsque la route a porté le vaisseau dans l'ouest; & elle doit en être augmentée, si le vaisseau a couru dans l'est de son point de départ, (en supposant que la longitude soit comptée de l'ouest à l'est, depuis 0 jusqu'à 360 degrés).

Nous avons remarqué qu'il y a peu de justesse dans la supposition précédente, savoir que l'arc de parallèle dont la latitude tient le milieu entre celles des points de départ & d'arrivée, a une longueur égale au chemin est & ouest, puisque les arcs parallèles compris entre les méridiens  $bd$  &  $bq$  (fig. 102. G), depuis  $a$  jusqu'en  $c$ , n'ont pas des longueurs qui décroissent en progression arithmétique. Les erreurs que cette supposition peut entraîner rendent donc nécessaire la recherche d'une méthode rigoureuse, qu'il est convenable d'employer pour déterminer le changement d'un vaisseau en longitude, lorsqu'il fait une route  $cea$ .

En parcourant un élément  $ne$  de cette route, un vaisseau s'avance réellement de la quantité  $mn$  dans le sens des parallèles, & il change de la quantité  $zt$  en longitude. Dans le triangle  $men$  on peut faire la proportion  $1:me::\text{tang. } r:nm$ . Ensuite si on compare l'arc  $nm$  avec son correspondant  $zt$ , qui sur l'équateur est du même nombre de degrés, on peut faire aussi cette proportion  $1:\text{sec. } mt::mn:zt$  (on met ici sécante de  $mt$ , parce que cet arc  $mt$  est la latitude de l'élément infiniment petit  $ne$  de la route  $cea$ ). Les produits des termes de ces 2 proportions, multipliés par ordre, forment la proportion suivante (après les réductions nécessaires)  $1:me.\text{sec. } mt::\text{tang. } r:zt$ . Mais le produit particulier  $me.\text{sec. } mt$ , est, comme on l'a vu (155), la partie de latitude croissante, ou du méridien de la carte réduite, qui correspond à l'élément  $ne$ : donc si on représente par  $l$  cette partie du méridien, que nous nommerons avec les Anglois partie méridionale, on peut transformer la dernière proportion en celle-ci,  $1:\text{tang. } r::l:zt$ . Appliquons le même raisonnement à chaque élément de la route entière  $cea$ , il conduit à autant de proportions qui présentent toutes le rapport commun de  $1:\text{tang. } r$ . On peut

donc dire, que la somme de toutes les parties méridionales qui correspondent à la route entière d'un vaisseau, est au chemin total de ce vaisseau en longitude, comme le rayon est à la tangente du rhumb de vent. C'est par cette proportion qu'on détermine aussi directement qu'exactly le chemin en longitude d'un vaisseau qui a fait une route connue, & dont on a calculé ou mesuré le chemin en latitude.

Remarquons que cette somme des parties méridionales qui correspondent à la route entière, n'est autre chose que la différence des latitudes croissantes du point de départ & de celui d'arrivée. Ainsi en nommant  $d$  cette différence, & en conservant les dénominations précédentes, le chemin  $x$  en longitude est donné par cette proportion,  $1 : \text{tang. } r :: d : L$ ; c'est-à-dire que le rayon est à la tangente du rhumb de vent, comme la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée, est au chemin en longitude.

C'est pour faciliter la solution de ces questions dont les hommes de mer s'occupent journellement, qu'on a calculé les latitudes croissantes des divers points d'un méridien du globe, & on en a formé des tables commodés, en se servant de la proportion ou de la formule indiquée précédemment (155). Ces latitudes sont estimées en minutes d'un degré de grand cercle du globe & on les emploie aussi fréquemment qu'utilement, soit pour la réduction des routes des vaisseaux, soit pour la construction des cartes marines.

La quantité  $L$ , après avoir été calculée, est réduite en degrés. On l'ajoute ensuite, comme on l'a dit, à la longitude du point de départ du vaisseau pour obtenir la longitude du point de son arrivée, si la route l'a porté dans l'est du point de départ; comme on l'en retranche au contraire, si le vaisseau s'est avancé dans l'ouest.

Le résultat auquel on parvient par le calcul du 4.<sup>e</sup> terme de la proportion  $1 : \text{tang. } r :: d : L$ , peut encore être obtenu par une opération graphique. On fait un triangle rectangle  $aeb$  (fig. 50), tel que l'un de ses angles  $e$  soit égal au rhumb de vent, & que celui de ses côtés

*ae*, qui est adjacent à cet angle *e*, soit égal à la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. Alors le chemin en longitude est représenté par le côté *ab*. Car dans ce trian. on peut dire, 1: *tang. e* ou *tang. r:ae* ou *d:ab*; & par conséquent *ab* doit représenter le chemin du vaisseau en longitude.

Si on examine attentivement la construction d'un tel triangle, on doit remarquer que le côté *ae* est exactement égal à la partie du méridien de la carte réduite, qui correspond à la route du vaisseau. C'est pourquoi les opérations graphiques qui conduisent à trouver le chemin d'un vaisseau en longitude, peuvent aisément être faites sur la carte elle même. Il est même à-propos de faire voir comment, en réunissant cette opération à celles qui tendent à indiquer le chemin d'un vaisseau en latitude, on peut parvenir à assigner immédiatement sur une carte marine, le lieu de l'arrivée du vaisseau. Tout consiste alors à former sur cette carte deux triangles, tels que *edc* & *eab*, en mesurant les longueurs de leurs côtés avec des échelles convenables.

On commence par déterminer le chemin qui est fait par le vaisseau en latitude, parce que ce chemin doit servir à trouver le changement du même vaisseau en longi. Dans ces vues, on mene sur la carte par le point *e* du départ du vaisseau, 2. lignes, l'une *ed* nord & sud, ou parallèle au méridien, & l'autre *ec* parallèle à l'air de vent de la route. Ensuite on porte sur cette dernière la longueur d'une minute, (ou de la partie de l'équateur qui, sur la carte, représente l'étendue d'une minute, c'est-à-dire d'un tiers de lieue) autant de fois qu'il y a de tiers de lieues dans la longueur mesurée de la route. La grandeur de l'hypothénuse *ec* étant ainsi fixée, on achève le triangle *edc*, en menant, par le point *c*, une perpendiculaire à la ligne N & S *de*. Le côté *ed* de ce triangle représente, comme on le fait, le chemin du vaisseau en latitude; & on juge du nombre de lieues, ou du nombre de degrés qu'il peut valoir, en prenant avec un compas sa long., & en la portant sur l'équateur. C'est ce cercle qui doit alors servir d'échelle, parce

qu'il est celle sur laquelle a été mesurée l'hypothénuse de du même triangle.

Le chemin du vaisseau en latitude étant ainsi déterminé & estimé en degrés; on connoît alors sur le méridien de la carte, la partie qui représente la différence des latitudes croissantes du point de départ & du point d'arrivée du vaisseau. Ainsi pour parvenir à connoître le changement du vaisseau en longi., on porte la long. de la partie meridionale trouvée sur le côté *ed* prolongé, & on fait la ligne *ea* égale à cette différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. L'angle *e* reste toujours égal au rhumb de vent, comme il l'étoit précédemment; & on acheve le triangle *abe*, qui doit être rectangle en *a*, en élevant en ce dernier point sur *ae* la perpendiculaire *ab*. Cette dernière ligne *ab* représente le changement du vaisseau en longitude, comme on l'a démontré; & par conséquent le point *b* est, sur la carte reduite, le lieu réel de l'arrivée du vaisseau. Car entre ce point & le point *e* du départ, il y a la différence *ea* en latitude, telle qu'elle résulte des calculs; & comme la différence des longitudes de ces deux points est réellement *ab*, il s'ensuit que le point *b* doit être celui de l'arrivée du vaisseau.

Au reste on peut avoir aisément la mesure de la grandeur de *ab* en lieues ou en degrés; mais l'échelle qui doit être employée n'est plus l'équateur, comme pour la mesure du chemin en latitude. Cette ligne *ab*, pour être mesurée convenablement, doit être portée sur la partie du méridien de la carte qui correspond à la route *eb*; parce que c'est sur cette échelle qu'est déterminée la longueur de la ligne *ae* qui appartient au même triangle.

157. La commodité & l'exactitude de ces opérations graphiques, ainsi que la nécessité de présenter aux hommes de mer peu éclairés, quelques moyens mécaniques de déterminer les positions successives des vaisseaux dont ils dirigent la marche, ont fait imaginer le quartier de réduction. Cet instrument qui est propre à faire connoître aisément, & sans besoin de théorie, les changemens d'un vaisseau, soit en latitude, soit en

longitude, a la forme d'un parallélogramme rectangle ABCD (fig. 51). Les deux côtés AB & AD, dont la longueur est indéfinie, sont divisés chacun en parties égales & de même grandeur; c'est-à-dire que ces parties, telles que AS & Az, sont de même longueur. Ensuite des lignes parallèles à ces côtés & menées par leurs points de division, partagent le quartier en petits quartiers égaux; & enfin des quarts de cercle concentriques, tels que Sz, qui sont tracés du point A comme centre, par chaque point de division des côtés AB & AD, servent à diviser en parties qui sont égales à SA ou Az, toutes les lignes telles que Ao, Ai, &c. qui peuvent être menées du centre A sur ce quartier. C'est avec un semblable instrument qu'on peut aisément construire les triangles *dec* & *acb* (figur. 50), ainsi que le triangle *enc* (fig. 32); triangles qui précédemment ont été présentés comme propres à faire connoître les chemins en latitude & en longitude d'un vaisseau.

En faisant usage de cet instrument, on regarde toujours le côté AD, comme représentant la ligne N & S, & AB la ligne Est & ouest. Ensuite un fil mobile, qui n'est fixé que par une de ses extrémités au centre A, sert à indiquer un air de vent quelconque, ou à former avec AD, (à l'aide d'un quart de cercle *em* qui est divisé en degrés) tout angle que la route d'un vaisseau est supposée faire avec les méridiens du globe, ou tout angle égal au rhumb de vent. Lorsqu'un tel fil est tendu sur une direction quelconque *ao* dans le plan de ce quartier, toutes les parties de sa longueur qui correspondent aux divers intervalles des quarts de cercle, tels que *sz*, qui sont tracés sur ce quartier, sont autant de parties égales.

S'agit-il, étant données la longueur, ainsi que la direction de la route d'un vaisseau, de déterminer, par le quartier de réduction, les changemens de ce vaisseau, soit en latitude, soit en longitude? On tend le fil sur une ligne *Ao*, de manière que l'angle *DAo* soit égal au rhumb de vent. On compte sur la longueur du fil, à l'aide des cercles concentriques, autant de parties égales qu'il y a de fois dans la route supposée, ou une, ou 2,

ou 4 lieues. Et la longueur de  $Ao$  étant ainsi fixée, on mène, pour achever le triangle  $eoA$ , une ligne  $ea$  est & ouest, par l'extrémité  $o$  de la route  $Ao$ . Ce triangle parfaitement ressemblant au triangle  $edc$  (fig. 50), est ainsi construit sur le quartier avec la plus grande facilité; & ses côtés, ainsi que ses angles, sont mesurés aussitôt que formés. Dans ce triangle il faut donc regarder le côté  $eA$  comme représentant le chemin du vaisseau en latitude; & le nombre des lieues dont il est composé, est indiqué par le nombre des parties égales qu'on peut compter sur la longueur de  $eA$ . (remarquons que le côté  $eo$  indique aussi, par le nombre de ses parties égales, la grandeur du chemin Est & ouest). On peut donc toujours (quelle que puisse être la route d'un vaisseau), déterminer promptement & commodément, à l'aide de ce quartier, le chemin fait en latitude, & par conséquent la latitude du point d'arrivée (156).

Le quartier est aussi employé avec la même facilité & le même succès dans la recherche du chemin d'un vaisseau en longitude. Si on fait usage de la méthode du moyen parallèle, le triangle précédent fait connoître le côté  $co$ , ou le chemin Est & ouest qui devient nécessaire pour cette détermination. Alors on prend sur  $AB$  une partie  $Au$  qui est égale à  $eo$ , ou qui est d'autant de parties égales qu'on en compte dans  $eo$ . On tend le fil sur une direction  $Ai$  telle, qu'il fasse avec  $AB$  un angle égal à la latitude du moyen parallèle. Ensuite par le point  $u$ , on mène une ligne nord & sud  $ui$ ; & le triangle ainsi construit indique, par la longueur de son hypoténuse  $ai$ , le chemin total du vaisseau en longitude. Car ce triangle ressemble parfaitement au triangle  $cez$  (fig. 32), qui construit, comme on l'a dit précédemment, présente dans son hypoténuse  $ce$ , le chemin d'un vaisseau en longitude. Ce chemin est ensuite employé, comme on le fait, à trouver la longitude du point d'arrivée.

Si on veut faire usage de la méthode plus exacte des latitudes croissantes, pour déterminer le changement d'un vaisseau en longitude, le quartier peut encor servir

à parvenir au résultat cherché. On prend dans les tables la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. Elle y est exprimée en parties égales qui sont chacune de la valeur d'une minute du méridien, ou de l'équateur du globe. Ainsi on suppose que chaque partie AS de la ligne AD du quartier vaut un certain nombre de ces minutes, & on fait Ae, par exemple, égale à la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. On tend le fil sur l'air de vent indiqué, & on mène par e une ligne est & ouest, dont la longueur, ou le nombre des parties égales qu'elle contient indique le chemin du vaisseau en longitude, exprimé en minutes de l'équateur.

Le quartier de réduction est donc un instrument utile & commode. Mais quoique dans la spéculation il paroisse remplir toutes les vues des hommes de mer, on n'en peut conseiller l'usage qu'à ceux qui, par une instruction trop négligée, ou par défaut de connoissances suffisantes, ne peuvent calculer les termes des proportions qui sont relatives à la réduction des routes. Car les résultats de ces opérations mécaniques ne peuvent jamais avoir la précision, à laquelle on doit tout sacrifier pour la sûreté de la navigation. C'est pourquoi nous nous bornerons ici à présenter les seules applications du calcul à la réduction des routes d'un vaisseau; parce que d'ailleurs, cette méthode plus lumineuse & plus sûre convient seule aux personnes qui auront lu ce traité.

Les exemples que nous croyons devoir donner embrassent la résolution de cinq problèmes variés. Ils nous paroissent suffire pour tous les cas ordinaires de la navigation, & ils ne doivent laisser aucun doute sur les procédés à suivre pour résoudre toute autre question de ce genre.

La première de ces questions est celle qui, tous les jours à midi, occupe tout homme de mer chargé de diriger la marche d'un vaisseau. Elle a pour objet de trouver la position instantannée de ce vaisseau, après une route de 24 heures, dont on a mesuré, & la longueur, & la direction.

Lorsque le chemin d'un vaisseau en latitude a pu être



déterminé avec exactitude, alors les navigateurs emploient ce chemin, au lieu du rhumb de vent, ou au lieu de la route mesurée, suivant que l'un de ces éléments mérite moins de confiance que l'autre, pour en conclure le changement du vaisseau en longitude. Quelquefois aussi, & moins fréquemment, le chemin en longitude peut être connu indépendamment des mesures de la route, & alors on en fait usage pour parvenir à trouver la latitude du point d'arrivée, ainsi que les défauts des mesures, soit du rhumb de vent, soit de la longueur de la route. Enfin il faut souvent déterminer, & la longueur de la route, & la direction que doit suivre un vaisseau, pour aller d'un lieu à un autre; & on y parvient par la connoissance des longitudes & des latitudes de ces lieux.

Telles sont les questions les plus ordinaires & les plus intéressantes qui sont à résoudre dans le pilotage d'un vaisseau. Nous commencerons leur examen par celui de la dernière, parce que tout homme de mer, qui se propose de conduire un vaisseau d'un port dans un autre, doit savoir d'abord, & la distance des deux ports, & l'air de vent sur lequel le vaisseau doit être dirigé.

Exemple 1<sup>er</sup>. Un vaisseau doit faire voile du Cap Lezard pour l'île des Barbades; & on demande la route qu'il doit tenir, ainsi que la distance qu'il doit parcourir.

Le Cap Lezard est supposé avoir  $49^{\circ} 57'$  de latitude nord, &  $5^{\circ} 14'$  de longitude à l'ouest du méridien de Londres. L'île des Barbades a  $12^{\circ} 58'$  lat. N, &  $58^{\circ} 50'$  de long. O. La méthode des latitudes croissantes, comme la plus directe, va nous servir à résoudre cette question; & nous y ajouterons ensuite l'usage de la méthode du moyen parallèle. D'ailleurs nous présenterons ici le type de ces calculs.

Si on examine quelles sont les parties qui sont connues dans les triangles *dec* & *acb* (fig. 50), on voit que deux côtés du dernier sont donnés. L'un est *ac*, qui est égal à la différence des latitudes croissantes des lieux indiqués, & qui exprimé en parties méridionales,

vaut 2685'. L'autre est *ab* de 3216', parce qu'il représente la différence des longitudes des mêmes lieux comparés. Dans ce triangle, on doit chercher l'angle *aeb*, qui est le rhumb de vent, & on le trouve par cette proportion, 2685:3216::1:tang.*aeb*. Ce quatrième terme calculé par logarithmes, comme on le voit dans le tableau ci-joint, est la tangente de 50° 9'; c'est-à-dire que l'air de vent sur lequel le vaisseau doit être dirigé, est le SO. 5° 9' O.

Latitude.		Parties mérid.	Longitude.
Cap Léfiard	49° 57' N.	3470'	5° 14'
Ile des Barbades	12° 58' N.	785'	58° 50'
Différence 2219'		2685'	3216'
Log. $\left\{ \begin{array}{l} 3216' \quad 3,5073160 \\ \text{Ray. } 10, \\ \text{C. A. } 2685' \quad 6,5710567 \end{array} \right.$		Log. $\left\{ \begin{array}{l} 2219' \quad 3,3461573 \\ \text{Ray. } 10 \\ \text{C. a. cof. } 50^{\circ} 9' \quad 0,1932911 \end{array} \right.$	
Log. rhu. v. 50° 9' 10,0783717		Log. route 3463' 3,5394484	
Log. $\left\{ \begin{array}{l} 3216' \quad 3,5073160 \\ \text{cof. } 31^{\circ} 27' \frac{1}{2} \quad 9,9309592 \\ \text{C. A. } 2219 \quad 6,6538427 \end{array} \right.$		Log. $\left\{ \begin{array}{l} 2219' \quad 3,3461573 \\ \text{Ray. } 10 \\ \text{C. a. cof. } 51^{\circ} 2' \quad 0,2014144 \end{array} \right.$	
Log. rh. v. 51° 2' 10,0921179		Log. route 3528,4 3,5475717	

Cet angle est ensuite employé à trouver la longueur *ec* de la route demandée, dans le triangle *dec*, où on connoît d'ailleurs le côté *de*, qui vaut 2219 minutes de degré, ou 2219 nœuds. (Nous employons préférablement des nœuds au-lieu de lieues, pour estimer les distances, parce que chaque nœud équivaut, soit à un tiers de lieue, soit à une minute de degré de grand cercle, &

cet usage nous paroît faciliter les réductions). On fait dans ce triangle cette proportion,  $\cos. dec. ed :: 1 : ec$  ou  $\cos. 50^{\circ} 9' : 2219 :: 1 : ec$  ; & on trouve que le chemin cherché  $ec$  est de 3463 nœuds, ou de  $1154\frac{1}{3}$  lieues. Un vaisseau qui fait voile directement du Cap Lezard pour l'île des Barbades, doit donc courir au SO.  $50^{\circ} 9' O$ , & le chemin qu'il doit faire est de  $1154\frac{1}{3}$  lieues.

Cherchons les mêmes choses demandées par la méthode du moyen parallèle. La latitude du parallèle qui tient le milieu entre ceux de départ & d'arrivée est  $31^{\circ} 27\frac{1}{2}'$  ; ainsi dans le triangle  $cne$  (fig. 32), cet arc mesure la grandeur de l'angle  $cen$ . D'ailleurs l'hypothénuse  $ce$  vaut  $3216'$ , qui forment la différence des longitudes des deux lieux proposés : ainsi on peut calculer le chemin  $en$  Est & ouest, parce qu'il devient nécessaire pour déterminer (fig. 50) la longueur de la route, ainsi que le rhumb de vent. Dans le triangle  $enc$  (fig. 32) on fait cette proportion,  $1 : ce :: \cos. e : en$ ,  $1 : 3216' :: \cos. 31^{\circ} 27\frac{1}{2}' : en$ . Dans le triangle  $cde$  (fig. 50) on fait ensuite cette proportion  $1 : \tan g. e :: ed : dc$ , ou  $1 : \tan g. rh. de vent :: 2219' : dc$  (fig. 50), ou  $en$  (fig. 32). On conclut de ces deux proportions, qui ont les mêmes extrêmes, que  $2219 : 3216 :: \cos. 31^{\circ} 27\frac{1}{2}' : \tan g. e$ . Le calcul du quatrième terme fait connoître que le rhumb de vent doit valoir  $51^{\circ} 2'$ , au lieu de  $50^{\circ} 9'$ , qui étoit sa valeur résultante de la méthode précédente.

La proportion qui doit enfin servir à déterminer la longueur de la route, est faite dans le triangle  $cde$ , & on doit dire  $\cos. 51^{\circ} 2' : 2219 :: 1 : ce$ . On trouve ainsi que le chemin à parcourir par le vaisseau, pour se rendre du Cap Lezard aux Barbades, est de 3528,4 nœuds, ou de 1176,1 lieues. La méthode directe indique cette route de 1154,3 lieues, & la différence (21,8 lieues) démontre évidemment que les résultats de la méthode du moyen parallèle sont quelquefois mêlés d'erreurs. Cependant les causes de ces erreurs n'ont pas une influence très-sensible dans la réduction des routes journalières d'un vaisseau, qui sont toujours peu considérables, & sur-tout lorsque ces routes sont placées entre l'équateur & le parallèle de  $60^{\circ}$ . Car au-delà de cette

derniere latitude, l'influence est plus marquée, & elle est assez considérable pour n'être jamais négligée.

*Exemple 2<sup>e</sup>.* Un vaisseau part d'un lieu qui a  $42^{\circ} 30'$  de latitude nord, &  $18^{\circ} 30'$  de longitude ouest. Il fait voile au  $SO\frac{1}{4}S$ ; & lorsqu'il a parcouru 591 nœuds ou tiers de lieue, on demande quelles sont les latitude & longitude du point où il est arrivé.

Dans le triangle *cde* (fig. 50) on connoît le côté *ec*, qui est de 591 nœuds, & l'angle *dec* dont la valeur est de  $33^{\circ} 45'$ . ainsi on doit trouver *ed*, ou le chemin en latitude, par cette proportion,  $1::ec::\cos.e::ed$ , ou  $1::591::\cos.33^{\circ}45':ed$ ; & il est de 491,4 nœuds ou minutes, ou enfin de  $8^{\circ} 11',4$ . Ce chemin en latitude doit être retranché de la latitude du point d'arrivée, puisque le vaisseau par sa route tend à s'approcher de l'équateur. La latitude du point d'arrivée du vaisseau est donc de  $34^{\circ} 19' N$ .

Latitude.		Parties mérid.	Longitude.		
Point de départ	42° 30' N	2822'	18° 31'		
Point d'arrivée	34 19 N	2194'	25° 31'		
Différence 8° 11'4		628'	6° 59,6		
Log. {	cos. 33°45'	9,9198464	Log. {	628	2,7979596
	Ray. 10			T. 33°45'	9,8248926
	C. A. 591	2,7715875		C. A. rayon 0,	
Log.ch.enlat. 491,4		2,6914339	L.ch.long. 419,62		2,6228522

C'est au triangle *aeb* qu'il faut ensuite avoir recours pour déterminer le chemin du vaisseau en longitude, & on doit faire cette proportion,  $1::\tan.g.e::ae::ab$ . La différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée est, suivant les tables, de 628'; ainsi on doit dire  $1::\tan.g.33^{\circ}45':628::ab$ ; & le chemin cherché en longi-

DE L'HOMME DE MER. 339  
tude est de  $419^{\circ} 62'$ , ou de  $6^{\circ} 59^{\circ} 62'$ . (la méthode du moyen parallèle auroit donné à-peu-près la même solution de la question proposée). Ce changement en longitude doit ensuite être ajouté à la longitude occidentale du lieu du départ, puisque le vaisseau s'est avancé dans l'ouest de ce même lieu; & la longitude du point d'arrivée doit être dans ce cas de  $25^{\circ} 31' O$ .

Ces deux exemples détaillés suffisent seuls pour indiquer la forme des calculs & l'usage des logarithmes. Ainsi dans les exemples suivans nous nous bornerons à désigner les opérations qui conduisent à des résultats cherchés, & nous laisserons le soin des détails ou de l'exécution aux jeunes marins qui doivent s'exercer à ce travail.

*Exemple 3<sup>e</sup>.* Un vaisseau a fait voile d'un port qui est par  $37^{\circ}$  de latit. N, &  $10^{\circ} 25'$  long. O. Il a couru 100 lieues ou 300 nœuds entre le nord & l'ouest, & il est arrivé sur le parallèle qui a  $41^{\circ}$  de latitude nord; on demande quelle est la longitude du point où il est arrivé, & quel est l'air de vent qui l'eût conduit directement au point d'arrivée.

Comme la différence des latitudes de départ & d'arrivée est connue, ainsi que la longueur de la route; alors dans le triangle *edc*, on peut calculer le rhumb de vent, ou l'angle *dec*, par cette proportion, (ce ou 300 nœuds : *de* ou  $240'$  :: 1 : *cos. dec*), & on trouve que le rhumb de vent *e* est de  $36^{\circ} 52'$  si le vaisseau eut donc été dirigé sur l'air de vent NO  $9^{\circ} 8' N$ , il seroit arrivé, après une route de 100 lieues, sur le parallèle indiqué. Le chemin en longitude qu'il a dû faire est représenté par *ab* dans le triangle *abe*, & on le calcule par cette proportion, 1 : *tang. e* ou *tang. 36° 52'* :: *ae* ou  $309'$  (différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée) : *ab*. Ce chemin est donc de  $231.7'$ , & la longitude du point d'arrivée doit être de  $14^{\circ} 16' O$ . La méthode du moyen parallèle auroit placé le vaisseau par  $14^{\circ} 17'$  long. O.

*Exemple 4<sup>e</sup>.* Un vaisseau fait voile du Cap Lezard, il porte au S  $39^{\circ} O$ , & il arrive par  $45^{\circ} 31'$  de latitude

nord, on demande sa longitude d'arrivée, ainsi que la route directe.

Le Cap Léopard est par  $49^{\circ}57' N$ ,  $5^{\circ}14' O$ . Le chemin que le vaisseau a fait en latitude, est donc de 266 nœuds. Comme le rhumb de vent est de  $39^{\circ}$ , on connoît donc, dans le triangle *dec*, & l'angle *e*, & le côté *ed* qui est de 266 nœuds. (on pourroit avec ces données calculer le changement *ab* en longitude, dans le triangle *abe*, sans avoir besoin de connoître la longueur de la route, parce que dans ce triangle on connoît, & le rhumb de vent *e*, & la différence  $396'$  des latitudes croissantes de départ & d'arrivée, qui est la valeur du côté *ae*; cependant il est bon de présenter les proportions qui donnent l'un & l'autre). Dans le triangle *dec*, on fait la proportion (*de* ou  $266':ec::\cos e$  ou *cos*.  $39^{\circ}:1$ ) Elle sert à trouver que la route du vaisseau supposée directe, est de  $342,3$  nœuds, ou de  $114,1$  lieues. Ensuite dans le triangle *abe*, la proportion [ $1:tang.e$  ou *tang*.  $39^{\circ}::ae$  ou  $396'::ab$ ] fait voir que *ab*, ou le chemin du vaisseau en longitude, est de 321 minutes ou de  $5^{\circ}21' O$ ; par conséquent la longitude du point d'arrivée du vaisseau, qui est la somme de ce changement en longitude, & de la longitude du départ, doit être de  $10^{\circ}35' O$ .

*Exemple 5<sup>e</sup>.* Un vaisseau a fait voile du Cap Léopard en portant au  $SO\frac{1}{4}O$ , & il est arrivé par la longitude de  $57^{\circ}26'$ , on demande le chemin qu'il a fait en latitude.

La différence des longitudes du Cap Léopard, & du point d'arrivée est de  $3132'$ , & l'air de vent est de  $56^{\circ}15'$ ; ainsi dans le triangle *aeb*, on connoît l'angle *e* & le côté opposé *ab*. On peut donc y trouver la différence *ae* des latitudes croissantes de départ & d'arrivée, par cette proportion, *tang.e* ou *tang*.  $56^{\circ}15':1::ab$  ou  $3132::ae$ . Le calcul donné  $2093'$  pour la valeur du côté *ae*, ou pour la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. Cette différence étant retranchée de la latitude croissante du Cap Léopard, ou de  $3470'$ , le reste, qui est  $1377'$ , doit être la latitude croissante du point d'arrivée. Ainsi cherchant dans la

table de ces latitudes l'arc du méridien qui correspond à  $1377'$ , on trouve que cet arc, ou la latitude du point d'arrivée, est de  $22^{\circ} 22'$ . Le vaisseau, suivant l'état de la question, est donc arrivé sur un point du globe qui a  $22^{\circ} 22'$  de latitude nord.

Si on se propoisoit de trouver aussi la longueur de la route directe qui est comprise entre le point de départ & celui d'arrivée, on feroit dans le triangle *dec* cette proportion, *cos.*  $56^{\circ} 15'$  : 1 :: *de* ou  $1655'$  : *ce*. Le résultat du calcul de ce dernier terme feroit que la distance des deux points est de 2979 nœuds, ou de 903 lieues.

Lorsqu'un vaisseau a fait successivement plusieurs routes; lorsque parti du point *i*, par exemple (fig. 85. G), il a été obligé d'abord de faire la route *im*; ensuite après être arrivé au point *m*, s'il a dû courir sur *mn*, & ainsi de suite, en variant toujours sa direction, ainsi que sa vitesse; on demande le point où il est arrivé, en supposant qu'on connoisse, & la longueur de ses routes partielles, & leurs directions particulières.

La position du point où il est arrivé après tous ces détours, est déterminée en cherchant séparément, & comme on l'a dit précédemment, les chemins, soit en longitude, soit en latitude, qui correspondent à chaque route partielle. Après avoir obtenu tous ces résultats distincts des diverses opérations qui y conduisent, on doit ajouter les chemins faits en latitude dans un même sens, & en retrancher ceux qui sont courus en sens contraire. On fait une semblable opération sur les chemins partiels en longitude, & on parvient ainsi à trouver la différence réelle des latitudes du point de départ & d'arrivée; Comme aussi la différence des longitudes qui résultent de l'ensemble de toutes les diverses routes faites par le vaisseau.

On doit remarquer qu'on s'exposeroit à des erreurs si après des routes multipliées, longues & variées, on adoptoit, pour déterminer la longitude du point d'arrivée, la méthode qui consiste à chercher tous les chemins parallèles, ou qui sont faits dans le sens des parallèles; à prendre leurs somme ou leur différence, suivant leurs directions de l'ouest vers l'est, ou de l'est

vers l'ouest; & à les réduire ainsi à un seul chemin est ou ouest, pour en conclure, en choisissant un moyen parallèle, l'arc de l'équateur qui correspond à l'ensemble de toutes les routes. Ces erreurs, & les circonstances où elles sont plus à craindre, ont été indiquées précédemment.

Nous terminerons cette matière en observant que, si ayant déterminé les changemens réels d'un vaisseau, soit en longitude, soit en latitude, après des routes variées qu'on nomme composées, on veut calculer la route directe, ainsi que l'air de vent, qui, du point du départ, peuvent mener au point d'arrivée qu'on a déterminé; cette recherche n'exige pas d'autres calculs que ceux qui sont indiqués dans les exemples précédens. Les mêmes connoissances suffisent aussi à un navigateur qui, après plusieurs courses différentes, ou après un très-grand nombre de bordées, cherche à connoître de nouveau, & la distance qui le sépare du lieu qu'il se propose d'atteindre, & l'air de vent qu'il doit tenir pour y arriver.

158. Sans doute les objets les plus importans de la surveillance d'un navigateur, lorsqu'il est en mer, sont la marche du vaisseau qu'il dirige, & tous les objets accessoiress dont la connoissance peut contribuer à lui faire porter un jugement certain sur la véritable longueur & sur la direction de sa route. Mais son attention doit s'étendre plus loin. Il doit encore, autant qu'il est possible, ne négliger aucune occasion, soit pour assurer la position incertaine, ou des îles, ou des rochers, ou des terres qui s'offrent à sa vue, soit pour déterminer celle des points intéressans du globe, qu'il pourroit découvrir dans le cours de ses voyages.

De tels services importent à la perfection des cartes marines; ils ne tendent qu'à éclairer la marche des vaisseaux, & les navigateurs se doivent réciproquement de tels soins. L'humanité fait une obligation de cette prévoyance, & sur-tout à ceux que leurs lumières étendues rendent plus capables de réussir dans ces recherches.



C'est pour aider à remplir ces vues utiles que nous allons présenter les réflexions suivantes.

Supposons qu'un navigateur transporté au point C de la mer, apperçoive au loin le point P (fig. 34), qui appartient à une île dont le nom est connu; mais dont la position est douteuse. Il doit chercher, pour faire disparaître toute incertitude, à relever P successivement, sur la vraie ligne nord & sud du monde, ainsi que sur la vraie ligne est & ouest. Dans ces deux situations respectives, le point P & le vaisseau paroissent d'abord placés sur un même méridien, & ensuite sur un même parallèle. Ainsi la position du vaisseau sur le globe étant exactement connue aux momens de chaque relevement, la longitude du point P se trouve indiquée par celle du vaisseau, lorsqu'ils sont l'un & l'autre sur la même ligne nord & sud; & sa latitude est donnée par celle que peut avoir le vaisseau, lorsque celui-ci est dans l'est ou dans l'ouest du point P relevé.

Les circonstances ne permettent pas toujours qu'un vaisseau puisse se placer dans de semblables situations respectives; alors le lieu dont on se propose de déterminer la position, doit être relevé deux fois à bord du vaisseau, pendant que celui-ci s'avance sur une direction constante, & avec une vitesse uniforme. L'intervalle de tems qui sépare les époques des deux relevemens, doit même être tel, que le vaisseau puisse, pendant sa durée, parcourir un assez grande distance, dont on doit d'ailleurs observer avec la plus scrupuleuse exactitude, & la longueur & la direction.

Supposons, par exemple, qu'un vaisseau suive la route *ucb* (fig. 34), & qu'arrivé au point *c*, à la vue de la pointe de terre *d*, un observateur se propose de déterminer la longitude & la latitude du cap *d*, connoissant d'ailleurs la position réelle du vaisseau sur le globe. Il doit relever, des points *c* & *b* de sa route, le point *d* supposé. Soit *gcx* la véritable direction du méridien qui passe par le point *c*. Si du point *d*, on abaisse sur cette ligne une perpendiculaire *dx*, alors on forme un triangle *dcx*, qui est absolument pareil à celui

*edc* (fig. 50], dont on a indiqué la construction pour servir à la réduction des routes des vaisseaux. (fig. 34) Car la ligne *cz* est une ligne nord & sud, & *cd* est l'air de vent, ou la ligne qu'un vaisseau doit suivre pour se rendre de *c* en *d*. L'angle *dcz* est donc le rhumb de vent, & *cd* est la longueur de la route qui conduit de *c* en *d*. La différence des latitudes des deux points *c* & *d* doit donc être *cz*, comme *dz* doit être la différence de leurs longitudes, comptée sur le parallèle qui passe par le point *d*. Dans le triangle *cdz*, si on veut déterminer les côtés *cz* & *dz* (qu'on doit calculer pour en conclure la longitude & la latitude du point *d*), il faut chercher auparavant à connoître deux autres parties de ce triangle, telles que *cd* & l'angle *dcz*; c'est pourquoi il faut observer successivement, des points *b* & *c* de la route du vaisseau, l'air de vent de la boussole sur lequel paroît être placé le point *d*, & mesurer avec soin le chemin *bc*, qui est couru par le vaisseau dans l'intervalle des relevemens. Alors si on corrige, de la variation de l'aimant, le premier relevement fait au point *c*, on détermine l'angle *dcz*. Ensuite on conclut l'angle *dcb*, & de ce premier relevement, & de la direction observée de la route du vaisseau; enfin l'angle *dbc* est aussi désigné, soit par le rhumb de vent *zcb*, soit par l'angle corrigé du second relevement fait au point *b*. On connoît d'ailleurs le chemin *bc* qui sépare les deux points des relevemens, ainsi on peut, dans le triangle *dbc*, déterminer la distance *cd*, qui doit servir à calculer, dans le triangle *dcz*, la différence des longitudes & latitudes des points *c* & *d*.

Le côté *dc* du triangle *dcb* est donné par la proportion suivante,  $\sin. bdc : bc :: \sin. dbc : dc$ . Si dans le triangle *dcz*, dans lequel on connoît l'angle *dcz*, il s'agit de chercher la valeur de *cz*, qui est la différence des latitudes des points *c* & *d*, on fait la proportion,  $1 : \cos. dcz :: dc : cz$ , & on calcule le terme *cz*.

Cette différence des latitudes est ensuite réduite en degrés; & en l'ajoutant à la latitude du vaisseau placé au point *c*, si celui-ci est moins éloigné de l'équateur que le point *d*, ou en la retranchant de cette

latitude, si celle du point *c* est la plus petite, cette somme ou ce reste est la latitude cherchée du point *d*. S'agit-il aussi de déterminer la valeur de  $d\lambda$ , qui est la différence des longitudes des points *d* & *c*, mesurées sur le parallèle du point *d*, on trouve cette ligne en faisant, dans le même triangle  $d\lambda c$ , la proportion suivante,  $1:\sin.d\lambda::dc:c\lambda$ . Cette quantité  $d\lambda$  est la somme d'une infinité de petits arcs appartenans aux parallèles qui, sur le globe, sont compris entre *c* & *d* (156). Ainsi on peut regarder la longueur de cette ligne comme celle d'un arc parallèle dont la latitude tiendrait le milieu entre les latitudes des points *c* & *d*. Nommons *pm* la latitude de ce moyen parallèle, & *L* l'arc de l'équateur qui correspond à la ligne  $d\lambda$ . On a cette proportion  $\cos.mp:1::d\lambda:L$ . Multiplions cette dernière par la proportion précédente, terme par terme, & nous parviendrons à celle-ci,  $\cos.mp:\sin.d\lambda::dc:L$ , dont le terme *L*, qui est la différence en longitude, est le seul qui soit inconnu. Cette quantité *L* qui est la différence des longitudes du point *d*, & du vaisseau placé au point *c*, doit être ajoutée à celle du vaisseau, si celui-ci est dans l'ouest du point *d*; ou elle doit en être retranchée dans le cas contraire. Ces opérations font connoître la longitude du point *d*.

Voici un exemple. Un vaisseau courant au N 3° ouest (corrigé), arrive par 17° 34' 50" N, & 65° 25' 13" O. Alors un observateur relève l'île de Saba, à l'ouest 30° 30' Nord (corrigé). Ensuite le vaisseau ayant parcouru, sur la même direction, un chemin que des mesures exactes font connoître de 9 milles  $\frac{1}{3}$ , ou de 580", l'observateur relève de nouveau le même point de l'île de Saba, à l'ouest 33° 30' Sud. On demande, d'après ces observations, quelles doivent être la latitude & la longitude de l'île.

La distance du vaisseau à Saba, au moment du 1.<sup>er</sup> relevement, est donnée par cette proportion,  $\sin.bdc$  ou  $\sin.64^{\circ} 0':\sin.dbc$  ou  $\sin.58^{\circ} 30':bc$  ou  $580':dc$ . La valeur calculée de *dc* est de 550". Cette distance sert à déterminer la différence  $c\lambda$  des latitudes du vaisseau

& de l'île, en faisant la proportion suivante,  $1:\cosin. 30^{\circ} 30':dc$  ou  $550'':cz$ ; & cette différence est de  $279''$  ou de  $4' 39''$ . La latitude de l'île est donc de  $17^{\circ} 39' 29''$ , puisque du vaisseau, on a relevé l'île de Saba, dans la partie du nord.

La latitude du moyen parallèle est donc de  $17^{\circ} 37'$ ; ainsi on peut déterminer la différence des longitudes du vaisseau & de l'île Saba, par cette proportion,  $\cos. 17^{\circ} 37':\cos. 30^{\circ} 30':dc$  ou  $550''$ . La différence cherchée, qu'on trouve par le calcul, est de  $497''$  ou de  $8' 17''$ . Cette quantité doit être ajoutée à la longitude occidentale du vaisseau, puisque l'île a été relevée dans l'ouest du point  $c$ , & par conséquent la longitude de l'île est de  $65^{\circ} 33' 30''$  O.

On doit remarquer, par les réflexions précédentes, que si la latitude d'un point de la terre étoit bien connue, il suffiroit d'un seul relevement, pour assurer sa position, & pour conclure sa longitude par celle d'un vaisseau. Car alors, dans le triangle  $dcz$ , on connoîtroit, outre l'angle droit  $z$ , l'angle  $dcz$  & le côté  $cz$ ; ainsi on pourroit calculer la différence des longitudes des points  $c$  &  $d$ , en faisant la proportion indiquée précédemment.

De même, si la longitude d'un lieu dont on desiroit fixer la place sur une carte étoit connue, un seul relevement suffiroit aussi pour trouver sa latitude, par celle du vaisseau d'observation. Dans ces déterminations, on doit donner la plus grande attention, soit à la mesure de la route du vaisseau dans l'intervalle des relevemens, soit au calcul de sa position, soit à l'observation, & des relevemens, & de la dérive, & de la variation de l'aimant. On doit sur-tout mesurer avec exactitude les angles qui ont été indiqués; parce qu'en examinant les proportions qui servent à déterminer, & la distance des deux lieux comparés, & leur différence en latitude, ainsi qu'en longitude; On doit voir que les résultats dépendent particulièrement de la grandeur précise de ces angles. D'ailleurs, il faut savoir que ces angles doivent toujours être à-peu-près, & autant

que les circonstances le permettent, d'une grandeur qui tienne le milieu entre  $0^{\circ}$  &  $90^{\circ}$ , parce qu'alors les résultats des opérations indiquées, méritent une confiance proportionnée à leur importance.

*Fin de la Géométrie.*

RECEIVED

2000

# MOSTRA



---

# LA SCIENCE

DE

## DE L'HOMME DE MER.

### SECTION TROISIEME.

---

#### ASTRONOMIE.

---

159. **U**N navigateur, au milieu des mers qu'il parcourt, & transporté hors de la vue de toute terre, n'a plus d'autre spectacle que le ciel & la surface uniforme de l'eau dont l'étendue paroît être sans limites. Tous les jours il s'avance dans l'espace; & sur son horison, qui semble ne jamais changer, il n'apperçoit que des lames plus ou moins élevées, & des astres qui semblent se mouvoir autour de lui, dans des cercles plus ou moins vastes. Pendant sa marche lente ou rapide, il ne découvre dans tout ce qui l'entoure sur l'océan, aucun objet fixe qui puisse l'aider à juger de la vitesse avec laquelle il s'éloigne des lieux qu'il vient de quitter; & il ne peut apprécier, ni le degré de cette vitesse ni sa direction, que d'une manière très-incertaine, à l'aide des moyens mécaniques dont nous avons déjà parlé.

Dans cet état de doute, de perplexité & d'inquiétude, le ciel seul lui offre, dans les étoiles, des termes

fixes convenables ; & ces astres seuls peuvent l'avertir de ses changemens de position sur la surface des mers, parce que leur aspect varie pour un observateur, à raison de ces mêmes changemens. La connoissance & les observations des astres sont donc de la plus grande utilité aux navigateurs, pour conduire leurs vaisseaux à travers les mers, soit avec plus de sûreté, soit avec plus de lumières.

Les astres consultés par l'homme de mer, peuvent servir, il est vrai, à lui faire reconnoître sa route, soit dans sa longueur, soit dans sa direction ; mais ce n'est jamais que lorsque cette route est faite : & les observations astronomiques ne l'avertissent de ses erreurs qu'après qu'elles ont été commises. Le grand éloignement des étoiles & des autres astres, la lumière du soleil qui les éclipse, & les nuages qui souvent les voilent à la terre, ne permettent pas que les astres puissent indiquer à un navigateur, à toute heure & à tout moment, ni l'air de vent qu'il suit dans l'espace, ni la vitesse actuelle de sa course. Cependant il lui faut de tels indicateurs, dont il puisse faire usage au moment du besoin.

Ainsi les mesures astrono. ne sont qu'un supplément devenu nécessaire aux mesures mécaniques, qui sont employées journellement à déterminer & la direction & la longueur de la route des vaisseaux. Les premières sont propres à marquer le degré de confiance qui est due aux 2.<sup>es</sup>, puisqu'elles rendent leurs erreurs sensibles ; & ces deux especes de mesures, loin de s'exclure mutuellement, sont toutes deux de la plus grande nécessité dans l'art de la navigation.

On doit donc en mer faire un usage non-interrompu & de lok, & de sabliers, & de boussole. On doit conclure, à l'aide de ces moyens, mais provisoirement la position instantanée d'un vaisseau ; & ensuite il faut, à des intervalles de temps peu éloignés, consulter les astres, pour donner à cette position trouvée une confiance entière, ou pour la corriger de ses erreurs toujours dangereuses. Enfin si les instrumens mécaniques que nous venons de nommer ne peuvent donner que

des mesures conjecturales, & conduire à des résultats probables sur la longitude & la latitude d'un vaisseau qui a franchi un certain espace de mer; Des observations astronomiques, lorsqu'elles sont bien faites, sont propres à faire connoître avec exactitude & précision la véritable grandeur de ces mêmes quantités.

L'homme de mer doit donc regarder l'astronomie comme une branche essentielle des connoissances qui lui deviennent absolument nécessaires pour l'exercice de son art; & il doit s'en convaincre aisément par la considération des causes d'erreurs dont il ne cesse d'être environné. En effet transportons-nous au moment où, pendant la marche de son vaisseau, un navigateur cherche à mesurer sa vitesse. Il jette le lok à la mer; & il suppose que ce léger morceau de bois doit rester fixement dans le lieu où il est tombé. Cependant les eaux qui l'envelopent peuvent avoir un mouvement particulier & inconnu, qui est produit, ou par les vents qui ont regné précédemment, ou par quelques causes différentes & variées. Dans ce cas le lok est emporté dans l'espace, lorsqu'il est jugé & considéré comme immobile; & cette translation doit l'éloigner ou l'approcher.

Pendant qu'un tel effet peut avoir lieu, la ligne de lok, ou la corde qui tient au bateau de lok, abandonnée avec mesure, s'étend sur la trace de la route du vaisseau; & c'est elle qui doit marquer par sa longueur combien dans l'espace d'une demi-minute, le vaisseau s'éloigne du bateau de lok. Mais elle ne peut représenter la route de ce vaisseau, qu'autant qu'elle seroit élongée sur la surface d'une mer calme, & que ses vagues conserveroient leur étendue primitive, malgré les variétés de la température; c'est-à-dire malgré la chaleur, la sécheresse & l'humidité dont elle éprouve les effets. Pendant une telle expérience, on voit aussi souvent des lames qui s'abaissent & s'élèvent (fig. 5. G) sous divers points de cette ligne, & elles augmentent de nouveau le degré d'incertitude attaché à ces mesures. D'ailleurs, tandis que le bateau de lok obéit à des courans superficiels qui peuvent exister, le vais-



seau enveloppé decourans plus profonds, & différens peut-être dans leur force & dans leurs directions, est entraîné par les uns & les autres, sans que la ligne de lok puisse indiquer, ni les effets de ces causes, ni leurs directions. Le sablier même qui est employé pour limiter la durée de l'expérience, n'est pas toujours une mesure exacte d'un intervalle de 30'' de tems; ainsi des erreurs considérables peuvent rendre douteuse la mesure annoncée de la route d'un vaisseau, pendant la durée de 30'' de tems. Ordinairement on ne jette le lok qu'à chaque heure de la journée, à moins qu'il n'arrive des changemens notables dans l'état du vent, de la voilure ou de la mer. Ensuite du chemin fait par le vaisseau dans un si petit nombre d'instans, on en conclut l'espace qu'il doit parcourir pendant une heure entière. Les erreurs indiquées & qui doivent être souvent justement soupçonnées, se répètent donc nécessairement, & forment une masse qui augmente encore, si le vaisseau ne conserve pas pendant la durée de chaque heure l'uniformité la plus parfaite dans sa vitesse; si ses écarts ne sont pas les mêmes & également multipliés; & enfin si le gouvernail est mis en action plus ou moins fréquemment.

La direction réelle de la route d'un vaisseau n'est pas annoncée avec plus de certitude par la boussole. Cet instrument n'est pas toujours exactement connu, c'est-à-dire que sa déclinaison est souvent ignorée en partie par le défaut d'observations directes; & ensuite la conférence de la rose présente des divisions si petites, qu'on ne peut estimer avec la précision nécessaire l'angle que forme la direction de la quille avec les méridiens que le vaisseau croise dans sa route. Cet instrument d'ailleurs n'indique pas le véritable air de vent de la route, & il faut en faire une appréciation toujours incertaine; lorsqu'un vaisseau étant poussé obliquement par l'action du vent sur ses voiles, ne suit plus la direction de sa quille; lorsque la forme de sa carene, la situation de ses voiles, leur nombre, leur grandeur, & la force du vent concourent à faire varier la dérive; lorsque des courans inconnus l'emportent dans des directions plus ou

moins obliques, & avec plus ou moins de violence; lorsqu'enfin des lames qui l'abordent sous divers angles, & avec des masses plus ou moins grandes, viennent lui communiquer des mouvemens de rotation; qui nécessitent l'application fréquente de la force du gouvernail.

Tant de motifs ne peuvent laisser aux navigateurs un espoir fondé de connoître avec précision la direction de la route d'un vaisseau. Sans doute l'observation du remoux (qui ne sauroit être trop répétée) est très-utile pour obvier à quelques uns de ces inconvéniens; mais elle ne peut faire découvrir toutes les erreurs de direction; parce que les eaux que le vaisseau déplace dans sa marche, & qui, après son passage, s'agitent pour revenir à l'équilibre, sont elles-mêmes emportées dans l'espace par les courans généraux qui peuvent exister.

L'incertitude des mesures qu'on prend en mer, soit de la longueur, soit de la direction de la route d'un vaisseau, impose donc l'étroite obligation aux navigateurs, de recourir aux observations astronomiques, pour connoître d'une manière plus sûre la latitude & la longitude de ce vaisseau. Mais quelles doivent être ces observations? & comment peuvent-elles satisfaire complètement à l'attente & aux besoins des marins? ces questions ne peuvent être abordées sans prendre préalablement une connoissance suffisante de l'astronomie? Il faut donc se former d'abord une idée juste & complète de l'état réel du ciel, des mouvemens des astres, & de leurs situations respectives & changeantes. Il faut savoir comment ces astres sont vus de la terre, comment ceux qui les observent à la surface du globe, doivent déterminer leur place réelle ou apparente dans la sphere céleste, mesurer leurs distances, & juger leur vitesse. Enfin il faut distinguer parmi les grands phénomènes célestes, ceux dont l'observation peut avoir des rapports utiles à l'art de la navigation. Ces considérations générales indiquent donc trois parties bien distinctes dans l'astronomie de l'homme de mer, & nous allons les traiter successivement, avec toute l'étendue

tendue qui convient à l'importance de l'objet qui nous occupe.

160. *Etat réel du ciel.* Parmi tous les astres qui peuvent être vus de la terre, les uns sont fixes, & les autres se meuvent dans l'espace. Considérés ensemble, ils forment notre univers, notre sphere, dont le soleil est le centre constant. Les étoiles, qui dans le ciel sont des astres immobiles, sont placées à des distances immenses de la terre; & les planetes, ainsi que les comètes, qui parcourent autour du soleil des orbites de diverse grandeur, sont bien moins éloignées de cet astre central & de notre globe. Les étoiles sont innombrables, & les planetes sont peu nombreuses. Les premières, dont les diametres insensibles échappent presque à nos mesures, & qui sont éparses dans les diverses légions du ciel, sont supposées former différens groupes nommés constellations, & servent à diviser toute l'étendue du ciel en plusieurs parties, pour mieux les faire distinguer & reconnoître. Dailleurs elles sont classées (sans égard à leur éloignement de la terre) suivant leur grandeur, ou suivant la lumiere, plus ou moins vive, dont elles frappent nos yeux; & le nom qu'on leur donne, dans chaque constellation, ne sont le plus souvent que des lettres d'alphabet.

Les planetes sont différenciées avec beaucoup plus de soin, & elles peuvent l'être sous plusieurs rapports, parce qu'on connoît l'inégalité de leurs grosseurs, de leurs distances, de leur éclat. La lumiere qu'elles répandent sert aussi à les faire distinguer des étoiles & du soleil, qui sont des astres lumineux par eux-mêmes, parce que ces corps opaques ne font que réfléchir la lumiere de ces derniers plus ou moins parfaitement.

Les planetes au nombre de sept, portent chacune un nom particulier; & si on en fait l'énumération suivant l'ordre de leurs distances au soleil, elles sont *Mercuré, Venus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne & Herschel*. Chacune décrit autour du soleil une orbite, qui, par sa forme, s'éloigne plus ou moins de celle d'un cercle, ou qui est elliptique; & les durées de leurs révolutions sont dans un rapport déterminé avec leurs distances

moyennes au soleil. Si on veut prendre une idée générale des situations des planetes à l'égard du soleil & des étoiles, supposons (fig. 52) le soleil en O, & imaginons que, Mercure en M, Venus en V, la terre en T, Mars en MA, Jupiter en J, Saturne en S, & Herschel en H tournent autour du soleil dans des orbites plus ou moins vastes, & dont on s'est contenté d'indiquer une partie élémentaire. Des cometes C & c décrivent aussi autour du même centre des orbites particulieres, mais qui sont si grandes & si étendues, que ces corps ne deviennent visibles pour la terre, que lorsqu'ils sont dans les points les moins éloignés du soleil. Les plans de toutes ces orbites ne sont pas les mêmes, & en prenant pour terme de comparaison l'orbite de la terre (qui porte le nom d'écliptique), les plans des autres orbites lui sont différemment inclinées. Quelques-uns de ces plans sont situés entr'eux comme le sont les plans (fig. 53) *mei*, *ldh*, *kog* & *adcb* qui représente l'écliptique. Celui de tous qui avec ce dernier forme le plus grand angle, n'est pas incliné de plus de 9 degrés. D'ailleurs les orbites des planetes coupent celle de la terre en deux points opposés; & ces points, qui varient suivant les planetes, reçoivent le nom de nœuds. Voici le tableau des diametres des planetes, de leurs distances moyennes au soleil, des inclinaisons de leurs orbites, & des durées de leurs révolutions sydérales, ou rapportées aux étoiles.

*Suit le Tableau:*

Noms des planetes.	Diametres des planetes.	Distances moyennes au Soleil	Inclinaison des orbites sur l'écliptique.	Durée des revolutions fydérales.
	Diametres de la Terre.	Dif. du Sol. à la Terre.	deg. min. sec.	jo. he. mi. sec.
Mercure	0,3889	0,38709	7 0 0	87 23 15 37
Venus	0,9278	0,72333	3 23 20	224 16 49 12
la Terre	1,0000	1,00000	0 0 0	365 6 9 18
Mars	0,6333	1,52369	1 51 0	686 23 30 43
Jupiter	10,761	5,20097	1 19 10	4332 8 51 25
Saturne	9,539	9,53936	2 39 20	10761 14 36 42
Herschel	. . .	19,0818	0 46 12	30445 18 0 0
le Soleil	106,778	0,0000	. . . .	. . . . .
la Lune	0,3141	. . .	{ 5 0 0 5 18 0 }	27 7 43 4

Entre toutes les orbites qui viennent d'être indiquées, considérons particulièrement celle de la terre, parce que sous plusieurs rapports elle nous importe à connoître. La durée de sa révolution est l'intervalle de tems qui s'écoule, depuis le moment où la terre est placée dans un plan, qui perpendiculaire à celui de l'écliptique, passe par le soleil & une étoile, jusqu'au moment où elle revient à ce même plan. C'est cette durée qui est celle d'une année, & qui est divisée en douze parties égales, nommées mois; comme la circonférence de l'écliptique est partagée en douze portions, égales qui ont le nom de signes.

Ce mouvement avec lequel la terre parcourt son orbite autour du soleil, n'est pas le seul dont elle soit animée. Elle tourne aussi sur elle-même, un peu plus de 365 fois, pendant le cours de sa révolution à l'égard du soleil. La durée de cette rotation reçoit le nom de

jour ; & ce dernier mouvement a été reconnu de la plus grande uniformité. Mais la vitesse orbitale de la terre est variable , & elle augmente à mesure que sa distance au soleil diminue. Il est d'ailleurs à remarquer que , malgré la combinaison de ces 2 mouvemens , l'axe de rotation de la terre conserve presque constamment une même position dans l'espace ; il reste sans cesse parallèle à lui-même , & toujours ses extrémités répondent aux mêmes étoiles , à quelques dérangemens près , qui n'intéressent pas assez particulièrement la sûreté des navigateurs , pour en rendre le développement nécessaire. C'est ainsi que le plan de l'équateur , auquel cet axe est perpendiculaire , conserve toujours , à l'égard de l'écliptique , une inclinaison qui ne change qu'insensiblement , & qui est actuellement de 23 degrés 28 minutes à-peu-près.

La terre n'est pas la seule planète qui tourne sur elle-même : car déjà on a reconnu que le Soleil , Venus , Mars , Jupiter ont aussi un mouvement semblable , qui est plus ou moins rapide.

Pendant que la terre fait sa révolution annuelle autour du soleil , elle est accompagnée par un astre secondaire , dont tous les mouvemens sont d'autant plus importants à connoître pour l'art de la navigation , qu'ils s'exécutent dans le ciel avec beaucoup de rapidité , & à peu de distance de la terre. La lune est cet astre , & elle tourne périodiquement autour de la terre , dans une orbite qu'elle parcourt ( si on la compare aux étoiles ) en 27 jours 7 heu. 43' 4". L'inclinaison variable de cette orbite sur l'écliptique , ainsi que le diamètre de cet astre , sont indiqués dans le tableau précédent ; & sa distance moyenne est 85464 lieues. La lune a , ainsi que la terre , un mouvement de rotation sur elle-même , & la durée de cette rotation est égale à celle de sa révolution dans son orbite. C'est ce rapport singulier qui explique clairement pourquoi , dans tous les points de son orbite , cet astre présente à la terre une face toujours la même. D'ailleurs sa vitesse orbitale ainsi que son diamètre apparent , ne restent jamais d'une égale grandeur , parce que les distances de cet

astre à la terre, changent dans tous les points de son orbite.

Jupiter, dans sa révolution autour du soleil, est aussi accompagné de quatre lunes qu'on nomme satellites, & qui parcourent chacune une orbite dont cette planète principale est le centre. Le premier de ces satellites, dont tous les mouvemens peuvent être prédits avec beaucoup de précision, & dont les positions varient rapidement, puisque la durée de sa révolution est de 1 jour 18 heures 27 min. 33 sec., doit sur-tout être remarqué par les hommes de mer, parce que les observations qu'on peut en faire sont faciles & utiles à la détermination des longitudes. Saturne est entouré de sept satellites qui décrivent chacun une orbite particulière dont il est le centre; & déjà on a découvert que la planète Herschel a deux satellites.

Si on considère actuellement toutes les situations que les planètes principales & secondaires peuvent prendre, soit entr'elles, soit à l'égard des étoiles; par la variété de leurs mouvemens, qui d'ailleurs sont tous dirigés d'occident en orient: on voit que leurs distances doivent changer à chaque moment de la durée. On voit que dans leurs courses différentes, ces astres peuvent être amenés les uns vis-à-vis des autres, & que quelque fois ils peuvent se trouver sur une même ligne droite. Dans ce dernier cas, les uns ne sont plus visibles pour les autres; & pour ceux-ci, ils sont cachés ou éclipsés par des planètes intermédiaires. C'est ainsi que certaines planètes peuvent intercepter la lumière dont le soleil éclaire d'autres astres semblables. C'est ainsi que la lune paroît éclipsée, lorsque le corps de la terre, placé intermédiairement sur la ligne qui réunit les centres du soleil & de la lune, enveloppe celle-ci de son ombre. C'est ainsi que le soleil est lui-même éclipsé, pour certains points de la terre, lorsque la lune vient se placer entre la terre & le soleil. Des étoiles peuvent aussi être éclipsées par la lune, suivant les positions de cet astre; & enfin les satellites des planètes doivent paroître éclipsés toutes les fois qu'ils traversent l'ombre qui est projetée dans l'espace par les corps opaques de ces astres.

Cette immobilité des étoiles, ces distances variables des planetes, ces éclipses, ces occultations sont les grands phénomènes qui méritent l'attention des hommes de mer, parce qu'ils sont comme autant de fanaux placés dans le ciel, pour éclairer la marche des vaisseaux. C'est pourquoi des almanachs nautiques, la connoissance des tems, des éphémérides célestes, annoncent d'avance tous les objets d'observations qui, pendant le cours d'une ou de plusieurs années, peuvent intéresser l'art de la navigation. Ainsi les travaux que ces prédictions exigent, & qui sont entrepris sur-tout pour le service des navigateurs, sont à ceux-ci un devoir d'en faire, & d'apprendre à en faire des applications utiles. Remarquons que ces almanachs indiquent les phénomènes célestes tels qu'ils doivent être vus de la de la terre. Ainsi après avoir présenté une idée générale & suffisante de l'état réel du ciel, il faut examiner comment les astres sont vus de la terre, dans les diverses situations où ils peuvent être supposés, en ayant égard à la rapidité & à la direction de leurs mouvemens.

161 *Etat apparent du ciel vu de la terre.* Un habitant du globe, qui est placé sur un point de sa surface, & qui voit les corps célestes correspondre successivement à différens points de l'espace, doit imaginer, parce qu'il se croit dans le repos le plus absolu, que ces corps ont un mouvement qui leur est propre. Cette première idée est celle de tous les hommes qui observent le ciel pour la première fois; & une telle illusion ne permet pas de distinguer parmi ces astres, ceux qui fixement attachés à une même place, sans aucune vitesse absolue, n'ont qu'une vitesse relative & apparente, qui est l'effet de celle dont l'observateur lui-même est animé. C'est ainsi qu'emportés par la rotation de la terre sur son axe, & nous imaginant dans un repos parfait, nous nous persuadons que tous les astres visibles tournent autour de nous dans un sens qui est contraire à notre propre mouvement. Nous sommes tels que le batelier, qui, descendant une rivière, & oubliant sa vitesse particulière, la transporte au rivage, ainsi qu'aux objets qui l'entourent, & les imagine emportés dans l'espace



aussi rapidement que le bateau qui l'entraîne dans un sens contraire.

Le spectacle du ciel porte donc tout habitant de la terre à croire que , non seulement les étoiles fixes, mais aussi les planetes & leurs satellites, ainsi que les cometes, se meuvent avec plus ou moins de vitesse, & sur des directions variées, dans les diverses régions du ciel.

En conséquence du mouvement annuel de la terre autour du soleil, l'observateur terrestre attribue aussi à tous les astres environnans, la vitesse avec laquelle il s'avance dans l'écliptique. Les mouvemens apparens des planetes, ainsi que de la lune, sont donc toujours composés des vitesses propres de ces astres & de vitesses relatives. Le soleil par conséquent semble faire autour de la terre des révolutions complètes; & il est devenu si naturel d'attribuer ce mouvement relatif au soleil, qu'on est convenu de considérer l'écliptique comme une orbite décrite annuellement par cet astre autour de la terre, afin que par ce moyen la terre pût être supposée dans l'espace, aussi fixe que le soleil qui lui est comparé. Une telle convention peut d'ailleurs être admise d'autant plus aisément, qu'elle n'altère en rien les rapports réels des situations de la terre & du soleil. Car soit la terre au point *d* de l'écliptique *adcb* (fig. 53), dont le centre *q* est occupé par le soleil. L'habitant de la terre rapporte alors le soleil *q* au point *z*. Arrivé au point *e*, après avoir parcouru la partie *de* de l'écliptique, il rapporte le soleil au point *u*, & les angles *uqz* & *dqe*, étant égaux comme opposés au sommet, on voit que la route *zu*, qu'il suppose faite par le soleil dans l'écliptique, est d'un nombre de degrés parfaitement égal à celui des degrés parcourus réellement par la terre de *d* en *e*. On voit aussi que ces espaces *de* & *uz* sont non seulement décrits dans un même tems, avec une même vitesse angulaire apparente, mais aussi sur une même direction, qui est celle de l'est à l'ouest.

On peut donc supposer désormais, comme on l'a annoncé, que le soleil se meut annuellement autour de la terre, au-lieu de considérer le mouvement réel de

celle-ci ; & la grandeur de la vitesse angulaire & apparente du soleil doit donner la mesure du mouvement réel de la terre. Les autres astres présentent , par les mêmes raisons , des mouvemens relatifs qui se combinent avec leurs mouvemens réels ; & c'est ensuite en séparant tous les effets illusoires , que la réflexion fait distinguer parmi ces astres , & ceux qui sont fixes , & ceux qui ont un mouvement propre , & la grandeur , comme la direction de leur vitesse réelle.

162. La rotation de la terre produit encore une illusion particulière dans l'habitant du globe , qui toujours imagine jouir du repos le plus parfait. Il transporte à tous les astres , la vitesse qu'il peut avoir , & par conséquent chacun lui paroît parcourir , dans un même tems , autour du globe , un cercle qui est parallèle à l'équateur. Il imagine que ces astres commencent & achevent en même tems des parallèles différens , & leur vitesse lui paroît être aussi uniforme que la vitesse réelle du lieu de l'observation.

Telles sont les apparences qui résultent du double mouvement de notre globe. Elles sont trompeuses , & elles le sont encore différemment , suivant les divers points que l'observateur habite sur la surface de la terre. Il nous reste par conséquent à développer ces diverses perspectives , qui sont infiniment variées pour les navigateurs , puisqu'à chaque instant ils changent de place sur l'étendue des mers.

Imaginons un observateur en  $a$  (fig. 54) sur la surface du globe  $aEpQP$ . La pesanteur , comme on le fait , le contraint de prendre & de garder une situation verticale , ou de se placer sur une ligne  $oaM$  , qui est perpendiculaire à la ligne  $xS$  , supposée tangente au globe en ce point  $a$ . La ligne  $oa$  passe donc nécessairement par le centre de la terre , parce que celle-ci est considérée comme sphérique ; & si elle est prolongée jusqu'au ciel en  $M$  , on donne à ce point  $M$  , qui est par conséquent placé verticalement au-dessus de la tête de l'observateur , le nom de *zenith*.

Dans l'état réel des choses , le point  $a$  tourne avec la terre autour de l'axe des poles  $Pp$  , & il décrit le

petit cercle *ac* parallèle à l'équateur *EyQ*. Pendant cette rotation, si l'observateur en *a*, & qui se croit en repos, voit d'abord à son zénith le point *M*, ou une étoile qui y est placée. Cette étoile, dans les instans suivans, lui paroît correspondre successivement aux divers points du parallèle *ML*, à mesure qu'il s'avance lui-même dans son propre parallèle *ac*. Car la ligne *oa*, appartenant à la terre, tourne comme elle autour de *Pp*, & l'extrémité *M* de cette ligne prolongée, ou le zénith de l'observateur, doit paroître par conséquent décrire la circonférence de la base d'un cône dont le côté est *MO*. Considérons séparément ce cône, qu'on supposera être *acdb* (fig. 6). Soit l'observateur au point *i* de son parallèle *ief*, & *ib* la ligne menée du point *i* à son zénith *b*, ou à une étoile placée à ce zénith. Cette étoile paroît tracer dans le ciel une circonférence *bdc*, qui est parallèle au cercle *ief* décrit par l'observateur. Celui-ci s'avance-t-il de *i* en *g*? son zénith parvient alors en *h*, & dans cette nouvelle situation, il ne voit plus l'étoile *b* correspondre à son zénith, mais elle lui paroît placée sur la ligne *gb*. De sorte que comme il croit n'avoir eu aucun mouvement de rotation, il imagine que l'étoile qu'il avoit observé à son zénith, lorsqu'il étoit en *i*, a parcouru l'arc *hb* que ce même zénith a décrit dans le ciel, pendant le tems qu'il a employé à passer de *i* en *g*. Cet arc *hb* est évidemment du même nombre de degrés que l'arc *ig* (128); & l'étoile paroît ainsi à l'observateur avoir parcouru cet espace, non-seulement dans un sens opposé à celui du mouvement réel *ig*, mais aussi dans un intervalle de tems parfaitement égal (fig. 54). Un observateur qui est en *a* sur la surface du globe, croit donc voir décrire dans le ciel à une étoile qui est placée à son zénith, la circonférence d'un cercle parallèle à l'équateur. Si au-lieu d'être au point *a*, cet observateur se trouvoit au point *u*, alors l'étoile *M* ne pourroit jamais correspondre au zénith de *u*; & cependant elle paroîtroit à l'observateur en *u*, décrire dans le ciel le même parallèle *ML*. Car soit mené de *u* en *M* un rayon visuel, & supposons-le prolongé au-dedans du globe, jusqu'à ce qu'il rencontre

en  $p$  l'axe de rotation de la terre. La ligne  $up$  doit tourner, comme la terre, autour de cet axe; & pendant que le point  $u$  décrit un parallèle dont le rayon est  $ur$ , l'extrémité  $M$  de la ligne  $pM$ , décrit la circonférence d'un cercle qui lui est parallèle, & qui est la base d'un cône dont  $Mp$  est le côté. On démontreroit, comme précédemment (fig. 6), que ce cercle  $ML$  est décrit dans le ciel, non seulement dans un tems égal, mais aussi dans un sens contraire au mouvement réel de rotation du point  $u$ ; & comme (fig. 54) ce parallèle  $ML$  a encor pour rayon  $MB$ , il est le même que celui qu'un observateur en  $a$  voit parcourir à l'étoile  $M$ . Le changement de lieu d'un observateur sur la surface du globe, ne produit donc aucune différence dans la grandeur des parallèles dans lesquels semblent se mouvoir journellement les corps célestes autour de la terre.

Remarquons qu'en donnant les noms d'équateur & de méridiens célestes aux plans prolongés  $RqF$  &  $RNL$  de l'équateur terrestre  $Eye$ , & du méridien  $EaP$  du lieu  $a$  supposé, les arcs  $RM$  &  $Ea$  sont égaux, comme servant l'un & l'autre de mesure au même angle  $Eoa$  ou  $RoM$ . C'est par cette raison que la latitude d'un lieu sur la terre est égale à la distance de son zénith à l'équateur céleste. Remarquons aussi que le rayon  $MB$  du parallèle que l'étoile  $M$  décrit dans le ciel, est toujours le cosinus de l'arc  $MR$ , ou celui de la distance de cette étoile à l'équateur.

Au milieu de toutes ces illusions, les observateurs ont dû chercher à connoître l'état réel des choses, & à éviter toutes les erreurs qui peuvent égaler leur jugement. Il leur a donc fallu trouver le moyen d'assigner dans le ciel à tous les astres qu'on y découvre, une position qui fût indépendante de toutes ces apparences, & qui pût être déterminée & vérifiée dans tous les tems, afin que dans tous les tems il fût facile de juger de la mobilité des uns & de l'état fixe des autres. C'est pourquoi les hommes imaginèrent de se regarder comme placés au centre de l'espace, ou au centre d'une vaste sphère, dont le rayon égaleroit la distance des étoiles à la terre & dont la surface présenteroit dans

les divers points des lieux fixes auxquels ils pourroient rapporter tous les corps célestes & visibles. Si cette idée eût été adoptée dans toute sa simplicité, elle eût imposé l'obligation de supposer autant de sphères qu'il y a de points sur la surface du globe. C'est en considérant un aussi grand inconvénient, qu'on est convenu de prendre pour centre de la sphère céleste, non tel ou tel point de la surface du globe, mais le centre de ce globe; & par conséquent de réduire toutes les observations, faites à la surface de la terre, à ce qu'elles eussent été, si l'observateur se fût trouvé au centre; & ce centre est ainsi devenu celui de la sphère céleste.

C'est conformément à ces vues & à ces raisons, qu'on a imaginé prolongés dans l'espace, ou dans l'interieur de cette sphère (qui dans son étendue embrasse tous les corps célestes), les plans des divers cercles qu'on a supposés décrits sur le contour du globe terrestre, tels que ceux de l'équateur, des méridiens & des parallèles. Alors dans la sphère céleste, ces cercles ayant une situation fixe, sont devenus des termes de comparaison propres à être employés à déterminer la position de tous les astres, & aussi convenables que les cercles pareils qui ont servi sur la terre à fixer la longitude & la latitude des points de sa surface. Nous avons vu que, par la latitude  $aE$  d'un point  $a$ , ou sa distance à l'équateur  $Eye$  (comptée sur le méridien  $Eap$  du lieu  $a$ ); & par sa longitude  $Ey$ , ou par l'arc de l'équateur (compris entre  $Eap$  & le premier méridien, qu'on suppose passer par le point  $y$ ), la position du point  $a$  est parfaitement déterminée. Il doit donc en être de même de l'astre  $M$ , si on peut savoir, & la grandeur de sa distance  $MR$  au plan de l'équateur (comptée sur le méridien céleste qui passe par  $M$ ), & l'arc  $Rq$  de l'équateur céleste, (qui est compris entre le méridien céleste, & le point  $q$ , qu'on est convenu d'adopter dans ces mesures, pour le premier point de la circonférence de l'équateur). Un méridien céleste, qui, tel que  $NMR$ , passe par un astre  $M$ , est nommé le cercle de déclinaison de cet astre; & l'arc  $MR$ , ou la distance de  $M$  à

l'équateur est la déclinaison de cet astre. L'arc de l'équateur  $Rq$  reçoit d'ailleurs le nom d'ascension droite de l'astre. ces arcs, comme on voit, sont dans le ciel, ceux qu'on connoît sur la terre sous les noms de latitude & de longitude; & par des raisons semblables, ils sont mesurés & indiqués de la même manière; c'est-à-dire que l'ascension droite d'un astre est comptée d'occident en orient; & que sa déclinaison est boréale ou australe, selon que cet astre se trouve dans l'hémisphère nord ou sud.

On voit d'après ces premières dispositions, que les déclinaisons & les ascensions droites de tous les astres étant connues pour une époque de la durée; & les mêmes moyens étant employés à une autre époque, pour les connoître de nouveau; on peut, en comparant les résultats, prononcer que tels astres sont fixes, si leurs déclinaisons & leurs ascensions droites sont restées les mêmes; & que tels astres ont eu un mouvement réel dans l'espace, si leur position à l'égard de l'équateur paroît avoir varié. C'est ainsi qu'on peut parvenir à apprécier, & le degré, & la direction de la vitesse de ces astres mobiles, en considérant les changemens qu'ont pu éprouver, soit leurs déclinaisons, soit leurs ascensions droites primitivement observées.

Déjà on doit appercevoir les ressources que promet l'astronomie aux navigateurs, pour déterminer la latitude & la longitude de chaque point de la surface du globe, puisqu'un astre  $M$ , qui est au zénith d'un lieu & dans le plan de son méridien, a une déclinaison qui est égale à la latitude de ce lieu, & une ascension droite qui a des rapports immédiats avec sa longitude terrestre.

163. Nous avons vu ailleurs les motifs qui ont porté à adopter l'équateur terrestre & un premier méridien, pour fixer la position de tous les points de la surface du globe; mais nous devons penser que dans les mêmes vues, & malgré les raisons qui ont conduit à un tel choix, il eût été permis de prendre deux autres grands cercles quelconques perpendiculaires entre eux. Ainsi, dans la sphere céleste, on peut rapporter

les astres à tout autre cercle que l'équateur, & ils peuvent l'être par conséquent au plan de l'écliptique, ou à cette orbite qu'on suppose décrite par le soleil, autour de la terre, qui doit en être regardée comme le centre. Cette orbite peut être imaginée dans le plan prolongé d'un des grands cercles du globe. Soit donc (fig. 54)  $fbT$  le plan de ce grand cercle ou de l'écliptique. Supposons aussi un autre grand cercle qui soit perpendiculaire au premier, & qui passe par l'intersection de l'écliptique & de l'équateur  $RqF$ . C'est par les distances d'un astre à chacun de ces cercles, que sa position dans le ciel peut être déterminée. Si le cercle  $LMR$  passe par le pôle  $X$  de l'écliptique, ainsi que par le pôle  $N$  de l'équateur & par l'astre  $M$ ; il est en même tems perpendiculaire à l'écliptique & à l'équateur, & l'arc  $Mf$  compris entre l'astre &  $fT$ , reçoit le nom de latitude de l'astre. D'ailleurs cette latitude est boréale, si l'étoile  $M$  est dans l'hémisphère  $fXT$  où est placé le pôle nord; & elle est australe lorsque l'astre est dans l'hémisphère opposé. Un cercle mené par un astre & par le pôle  $X$  de l'écliptique, porte le nom de cercle de latitude; & le premier de tous ces cercles est celui qui passe par le point d'intersection  $b$  de l'équateur & de l'écliptique. (Ce point d'intersection est nommé le premier point de la constellation du belier, un des 12 signes du zodiaque). L'arc de l'écliptique  $fb$ , qui est compris entre le cercle de latitude de l'astre, & celui qui passe par  $b$ , est la longitude de cet astre. Celle-ci se compte de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ ; & d'occident en orient, parce que telle est la direction des deux mouvemens réels de la terre.

Remarquons que, si la position d'un astre est donnée dans le ciel, par sa déclinaison & son ascension droite, on peut aisément en conclure sa latitude & sa longitude; en supposant connue l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, qui est actuellement de  $23^\circ 27' 48''$ . En effet, soit un astre en  $A$ . Soient menés, par le point  $A$  & par les points  $N$  &  $X$ , qui sont les pôles de l'équateur & de l'écliptique, deux grands cercles, l'un de déclinaison  $NAD$ , & l'autre de latitude  $XAE$ .

La déclinaison de l'astre  $A$  est  $AD$ , & son ascension droite est  $Db$  ( $b$  étant le premier point du bélier, ou un point d'intersection de l'équateur & de l'écliptique). Avec ces deux élémens connus, on peut aisément calculer la latitude  $Ae$  de l'astre & sa longitude  $eb$ . Car considérons le triangle sphérique  $NAX$ . On y connoît le côté  $AN$ . On suppose aussi donnée, l'inclinaison  $Rof$  des plans de l'écliptique & de l'équateur; ou la distance  $NX$  des poles de ces cercles. Enfin l'arc  $Db$  a pour complément l'arc  $DR$  (en supposant que le cercle  $XNR$  passe par les poles des deux cercles); ainsi l'angle  $RND$  est connu, & par conséquent son supplément  $ANX$ . On peut donc calculer, dans le tri.  $ANX$ , & le côté  $AX$ , qui est le complément de la latitude de l'astre, & l'angle  $AXN$ , qui est celui de sa longitude.

Puisque la position d'un astre à l'égard de l'équateur, peut servir à faire connoître celle qu'il peut avoir relativement à l'écliptique, nous nous bornerons ici à ne considérer que les déclinaisons & les ascensions droites des astres, parce que ces quantités ont des rapports avec les latitudes & les longitudes terrestres. Mais ces cercles imaginaires, tels que les méridiens & l'équateur, ne sont ni tracés ni visibles sur la surface du ciel. Alors quelle ressource reste-t-il aux observateurs terrestres, pour juger de la déclinaison & de l'ascension droite d'un astre quelconque. La nature présente à l'homme industrieux tous les moyens nécessaires, pour n'être pas arrêté par ces difficultés. On fait qu'elle anime tous les corps terrestres d'une force toujours active, qui, sous le nom de pesanteur, les sollicite sans cesse à se précipiter vers le centre de la terre. Ainsi un corps en  $a$  étant suspendu librement par un fil, ce fil, par sa direction, indique la situation d'une ligne  $oaM$ , qui passe par le zénith du lieu  $a$ , & désigne par conséquent l'étoile  $M$  dont la déclinaison est égale à la latitude de  $a$ . On voit donc qu'étant donnée la déclinaison de l'étoile  $M$ , on peut en conclure la latitude du lieu  $a$ , & réciproquement. De même la position du



DE L'HOMME DE MER 367  
méridien de  $a$  est propre à faire connoître celle du cercle de déclinaison de  $M$ .

Un fil à plomb est sans doute très-convenable à employer, comme on le fait à terre, dans un observatoire fixe; mais à la mer, dans un vaisseau agité par les lames, tourmenté par les vents, & poussé plus ou moins vivement dans l'espace, l'usage du fil à plomb ne peut plus être adopté, parce que sa situation naturelle est alors troublée par toutes les causes indiquées. Il reste cependant aux navigateurs un nouveau moyen qui supplée au premier. C'est un plan  $zas$ , qui, au point  $a$ , est tangent à la surface de la terre, & auquel par conséquent la ligne verticale  $Ma$  est perpendiculaire. Ce plan est nommé l'horison sensible d'un observateur qui est au point  $a$ ; & un navigateur en mer peut le voir & en embrasser l'étendue. Prolongé jusqu'au fond de la sphere céleste, ce plan sépare tous les objets de cette sphere qui sont visibles du point  $a$ , de ceux qui ne le sont pas. Car toute autre ligne qu'on imagineroit dirigée de  $a$  au-dessous de  $aSG$ , traverseroit une partie solide de la terre; & par conséquent aucun rayon de lumière ne peut arriver au point  $a$ , lorsqu'il est lancé d'un point placé au-dessous de l'horison sensible. Cet horison paroît avoir une forme circulaire, parce qu'un observateur en  $a$ , & en mer, semble avoir une vue qui est terminée de tous les côtés également, & parce qu'il s'imagine toujours être le centre de tous les objets qui l'environnent. Remarquons qu'une différence considérable distingue les horizons de ceux qui habitent ou les terres ou les mers. L'horison de ceux-là est rarement une surface plane, mais une surface inégale, variée, & plus ou moins bornée par divers objets qui sont placés irrégulièrement à différentes distances. Celui des navigateurs est uniforme au contraire: il n'est terminé de tous côtés que par le ciel, qui semble s'abaisser sur tous les points de son contour, pour marquer ses limites; & il n'y a que quelques lames plus ou moins élevées, mais toutes de même couleur, qui diversifient quelquefois l'aspect d'un tel horison.

Supposons un navigateur en  $a$ . S'il observe un astre placé en  $N$ , & s'il le compare au point  $G$  de la circonférence de son horizon sensible, qui correspond verticalement à cet astre; l'angle  $NaG$  des deux rayons visuels dirigés du point  $a$ , l'un au point  $G$ , & l'autre au centre de l'astre  $N$ , a pour mesure un arc qui est nommé la hauteur apparente de cet astre sur l'horizon sensible du lieu  $a$ . Le titre d'apparente qu'on donne à cette hauteur, sert à la distinguer de la hauteur  $NH$  du même astre, qui seroit observé du centre  $o$  de la terre, à l'égard d'un plan  $OH$  d'un grand cercle, qu'on suppose être parallèle à l'horizon sensible  $aG$ . (Ce dernier cercle est, par cette raison, nommé l'horizon rationel du lieu  $a$ ). C'est cette hauteur  $NH$  qui doit être employée dans les calculs de latitude ou de déclinaison, parce que, comme nous l'avons dit, les arcs qui représentent, ou la latitude, ou la déclinaison, ou la longitude, ou l'ascension droite d'un point quelconque, ont pour centre celui du globe, auquel nous sommes convenus de rapporter tous les corps célestes.

On voit que l'angle  $NaG$ , qui est observé du point  $a$ , est toujours plus petit que l'angle  $NoH$  observé du centre  $o$ . Leur différence est l'angle  $aNo$ , & ce dernier est connu sous le nom de parallaxe de l'astre  $N$ . Ainsi lorsqu'on connoît la grandeur réelle de l'angle  $NaG$ , (corrigée de l'influence de l'atmosphère), ou la hauteur réelle de l'astre  $N$  au-dessus de l'horizon sensible, il faut l'augmenter de la parallaxe ou de l'angle  $aNo$ ; & somme est alors la hauteur de l'astre, telle qu'elle eût été observée du centre de la terre; au-dessus de l'horizon rationel.

Remarquons que dans le triangle  $Nao$ , le sinus de l'angle  $aNo$ , ou de la parallaxe de hauteur de l'astre, est au sinus de l'angle  $oan$ , ou de l'angle  $MaN$ , c'est-à-dire de la distance apparente de l'astre au zénith, comme le rayon de la terre, est à la distance de l'astre au centre de la terre. De tels rapports conduisent à conclure que les parallaxes d'un même astre varient comme les sinus de ses distances au zénith; que sa parallaxe la plus grande doit avoir lieu au moment où il

paroît

paroît à l'horifon ; & que pour une même diftance au zénith , les aftres ont une parallaxe d'autant plus petite qu'ils font plus éloignés de la tere. c'eft par cette dernière confidération qu'on doit juger infiniment petite la parallaxe des étoiles. Celle de la lune doit être au contraire très-confidérable , parce que cet aftre eft voifin de la terre ; & fi la parallaxe des étoiles peut être négligée dans les calculs , on doit tenir un compte très-exact de celle de la lune.

C'eft en corrigeant , comme on l'a dit , de fa parallaxe , la hauteur d'un aftre , mefurée au-deffus de l'horifon fenfible , qu'on parvient à trouver fa hauteur vue du centre de la terre , au-deffus de l'horifon rationel. Cette correction étant rendue toujours poffible , foit par des observations directes , foit par des tables de parallaxes calculées par des aftronomes , nous ceflerons de confidérer les observations comme étant faites dans l'un quelconque des points de la furface de la terre , mais comme étant faites au centre même de la fphere. Supposons par conféquent (fig. 55) que C foit le centre de la terre , que SONE foit l'horifon rationel d'un obfervateur , dont le zénith eft le point Z , qui eft en même tems le pole du cercle SONE ; Et fi le plan de l'équateur célefte eft EMO , il coupe celui de l'horifon aux deux points E & O. Si l'arc PZS représente le méridien du lieu (prolongé dans le ciel ,) l'interfection SN de ce plan avec l'horifon eft nommée la ligne méridienne de ce lieu , ou la ligne nord & fud ; parce que fes extrémités N & S correspondent verticalement aux deux poles de l'équateur. Enfin comme les cercles de l'équateur & de l'horifon font fupposés perpendiculaires au plan du méridien SZP qui paffe par les poles de ces cercles , l'interfection EO de ces derniers doit être auffi perpendiculaire au plan ZMS , & par conféquent à la ligne méridienne SN. Cette ligne OE , qui réunit les points d'interfection des circonférences de l'équateur & de l'horifon , eft donc la ligne Eft & oueft.

L'horifon & le méridien d'un lieu étant deux cercles qui font perpendiculaires l'un à l'autre , on peut rap-

porter un astre à leur plans, pour assigner sa position dans le ciel (en remarquant cependant que ces cercles étant variables, comme les lieux auxquels ils sont relatifs, ces positions ne sont point absolues, & qu'elles ne sont que relatives à tel horison déterminé); si on fait usage de ces deux cercles, & si on leur rapporte tous les astres qui sont sur un horison, c'est parce qu'on est obligé de comparer les astres à des plans qui sont seuls offerts aux yeux d'un observateur. Ces premières observations servent ensuite à déterminer la position de ces astres, à l'égard des cercles fixes de la sphere, qui sont l'équateur & le premier cercle de déclinaison. Soit donc supposé un astre en *e*. Si par ce point & par le zénith du lieu, on mene un arc *zea* (qui reçoit le nom de vertical); l'arc *ea* est ce que nous avons nommé la hauteur de l'astre vue du point C. L'arc *Sa*, ou l'arc de l'horison, compris entre le vertical *zea* de l'astre & le méridien *ZMS* du lieu, est nommé l'azimuth de l'astre. Ainsi la position de cet astre, comme de tout autre corps céleste sur l'horison, est déterminée par sa hauteur & par son azimuth.

Actuellement appliquons ici les considérations présentées précédemment sur le mouvement apparent des astres. Si la déclinaison d'un astre est *uM*; soit tracé, par le point *u*, dans la sphere céleste, un petit cercle *uemrn*, qui, parallèle à l'équateur *OME*, est, par cette raison, nommé le parallèle de l'astre. Ce cercle représente la route que l'astre supposé paroît décrire chaque jour, aux yeux d'un observateur qui a le cercle *SONE* pour horison rationel; & on voit que cet astre, dans chaque point de sa course, ne cesse de changer de hauteur, ainsi que d'azimuth sur l'horison. Remarquons d'ailleurs que ce cercle, qui ne passe pas par le centre *C*, est coupé par l'horison en deux parties inégales *mun* & *mrn*; & que, dans ce parallèle les seuls points qui soient visibles du point *C*, sont ceux qui sont placés au-dessus du plan *SONE*. L'astre qui décrit un tel cercle, ne commence donc à paroître sur l'horison *SONE*, que lorsqu'il est arrivé au point *m* de son parallèle. Ensuite il parcourt la partie visible

*mun* de son parallèle, avec d'autant plus de rapidité, que le rayon de ce cercle est plus grand, & toujours en dirigeant sa course de l'est à l'ouest. Au moment où il est au point *m*, sa hauteur est nulle, son azimuth est *mES*; & on doit remarquer qu'il se leve à une distance *mE* du vrai point d'est du monde. Cet arc *mE* est nommé l'amplitude arrive de l'astre, & nous verrons ailleurs que cet arc est bon à connoître, pour déterminer les variations de la boussole. On doit voir, par une conséquence directe de ces principes, que tout astre qui n'a pas de déclinaison, ou qui est dans l'équateur *Emo*, n'a aucune amplitude.

Cet astre étant arrivé en *u*, sa hauteur est *us*. Si alors il est dans le méridien du lieu, son azimuth est nul, & il est parvenu à sa plus grande hauteur au-dessus de l'horizon. En effet considérons l'astre en *e*, & formons le triangle *zeP*, en menant le vertical *ze*, & le cercle de déclinaison *Pe* de cet astre. Nommons *h* le côté *ze*, *d* le côté *Pe*, *l* le côté *zP* (en remarquant que ce dernier est le complément de *zM*, ou de la latitude du lieu; comme *Pe* est le complément de la déclinaison de l'astre, & *ze* celui de sa hauteur). Nommons aussi *P* l'angle horaire *zPe* (160). Nous avons vu (153) que entre les trois côtés de ce triangle & l'angle *zPe*, on a l'équation suivante,  $\cos.h = \cos.e.\cos.d + \sin.e.\sin.d.\cos.P$ ; ainsi le cosin. de *h*, ou le sinus de la hauteur de l'astre, doit être le plus grand, lorsque le cosinus de *P* est le plus grand, ou lorsque l'angle horaire *P* est nul. C'est donc quand l'astre est au méridien, qu'il est parvenu à sa plus grande hauteur au-dessus de l'horizon. Comme il doit y avoir deux points sur le parallèle *mun* (l'un placé avant le passage de l'astre au méridien, & l'autre après ce passage) dans lesquels l'astre correspond à un ang. horaire *P* de même grandeur. La hauteur de l'astre dans ces deux points, doit aussi être la même (lorsque sa déclinaison ne change pas dans l'intervalle de tems qu'il faut à l'astre, pour passer d'un de ces points à l'autre, & lorsque la latitude du lieu est constamment la même). Car alors si on imagine, pour chacun de ces points, un triangle formé comme *zeP*; les valeurs

de *cos.h*, dans les 2 cas, sont nécessairement les mêmes d'après la formule précédente.

Réciproquement la hauteur d'un astre étant observée de chaque côté du méridien, & étant trouvée la même, les angles *P* sont égaux aux époques des deux observations. En conséquence, la demi-somme des valeurs de ces deux angles *P*, doit indiquer l'heure du passage de l'astre au méridien. C'est sur ce principe qu'on a imaginé la méthode d'observer des hauteurs égales & correspondantes d'un même astre, pour connoître l'heure de son passage au méridien d'un lieu.

163. Remarquons qu'un astre qui s'avance dans son parallèle *meu*, ne s'élève pas d'une même quantité au-dessus de l'horison dans chaque égal intervalle de tems. En effet, supposons que dans un instant *t* infiniment petit (que nous prenons pour l'unité de tems), cet astre se soit avancé de *a* en *u* (fig. 97. G). Ce tems *t* indique la mesure de l'angle *uPa* (*P* étant le pole de la sphere céleste, & *z* le zénith du lieu supposé). Soit *za* ou *H* la distance de cet astre au zénith, en un point *a* de son parallèle; & en un point *u*, soit cette distance *zu* représentée par *h*. Adoptons aussi les dénominations précédentes, & regardons avec raison la déclinaison de l'astre, comme ne variant pas pendant l'instant *t*, qui est infiniment petit. Alors dans le triangle *zaP*, on a l'équation  $\cos.H = \cos.e.\cos.d + \sin.e.\sin.d.\cos.P$ . Lorsque l'astre est en *u*, on a aussi  $\cos.h = \cos.e.\cos.d + \sin.e.\sin.d.\cos.(P-t)$ . Si on retranche ces deux équations l'une de l'autre; si on nomme *q* la différence des quantités *H* & *h*, qui ne peut être que très-petite; & si on fait attention que les arcs *q* & *t* étant très-petits, le cosinus de chacun doit être égal à-peu-près au rayon, tandis que le sinus diffère peu des arcs eux-mêmes; on doit avoir, toute réduction faite,  $\sin.q.\sin.H = \sin.l.\sin.d.\sin.t.\sin.P$ . Considérons d'ailleurs que dans le triangle *Pza*, on peut faire la proportion suivante,  $\sin.P:\sin.H::\sin.z:\sin.d$ ; & par conséquent  $\sin.P.\sin.d = \sin.H.\sin.z$ . Ainsi on peut substituer le produit  $\sin.H.\sin.z$  à celui  $\sin.P.\sin.d$ , & l'équation précédente peut être transformée en celle-ci,  $\sin.q = \sin.l.\sin.t.\sin.z$ . Donc le chan-

gement de la hauteur de l'astre, pendant l'unité de tems  $t$ , est la plus grande possible, lorsque l'angle  $z$  est de  $90^\circ$ ; c'est-à-dire lorsque l'astre est placé verticalement au-dessus des points est & ouest du monde. On dit qu'il est alors dans le premier vertical. On est conduit aussi par la même formule, à conclure que le mouvement en hauteur est nul, lorsque l'angle  $z$  s'évanouit, ou lorsque l'astre est dans le méridien du lieu. Un astre qui se leve au vrai point d'est  $E$ , (fig. 55) doit donc s'élever très-vivement au-dessus de l'horison; & au contraire sa direction devient parallèle à ce plan, lorsqu'il est arrivé au mérid. Suivons cet astre lorsqu'il descend à l'horison, en parcourant son parallèle  $un$ . Il disparoît aussitôt qu'il a passé le point  $n$ ; & ce dernier point est nommé le coucher de l'astre. L'arc  $no$  de l'horison qui est compris entre ce point & le vrai point d'ouest  $o$ , est nommé l'amplitude occase de cet astre; & les deux arcs égaux  $un$  &  $um$ , qui marquent sa route apparente dans le ciel pendant son séjour sur l'horison, sont nommés ses arcs semi-diurnes. Quant au reste  $nrm$  de ce parallèle, l'astre le parcourt au-dessous de l'horison, & devient, pendant ce tems, invisible à l'observateur dont le zénith est  $z$ . Si ce parallèle  $munn$  est celui du soleil, le tems qui s'écoule entre son passage en  $u$  au méridien d'un lieu, & son retour au même méridien, est ce que nous nommons un jour; & cet intervalle de tems est d'ailleurs divisé en 24 parties égales nommées heures. Si on considère le soleil au point  $e$  de sa course diurne, & lorsque, depuis son lever en  $m$ , il a tracé l'arc  $me$  dans le ciel, il lui reste à parcourir l'arc  $eu$ , pour arriver au méridien du lieu; c'est-à-dire au point où il doit marquer midi pour ce lieu, & annoncer le commencement des 24 heures du jour. Cet arc  $eu$  est du même nombre de degrés que l'arc  $Md$  (qui sur l'équateur est compris entre les méridiens  $Pu$  &  $Pe$ ; & qui est la mesure de l'angle  $uPe$ ). Ainsi comme le nombre des degrés de cet arc doit indiquer (à raison de  $360^\circ$  pour 24 heures) combien il doit s'écouler de tems, depuis le moment où le soleil est en  $e$ , jusqu'à celui de son pas-

sage au méridien  $zu$ , cet angle  $P$  est nommé par cette raison l'angle horaire de l'astre.

Le mouvement diurne du soleil a été généralement choisi pour indiquer une mesure du tems ou de la durée. Il sert par conséquent à régler la marche des pendules & des montres dont on fait usage, soit dans la société, soit dans la marine; & il devient important de faire connoître cet objet sous tous ses rapports utiles.

164. Pendant que le parallele *unrm* est décrit par le soleil; c'est-à-dire dans l'espace d'un jour, par un mouvement qui est dirigé d'orient en occident, & qui est relatif au mouvement de rotation de la terre sur elle-même; le soleil s'avance aussi d'occident en orient, en raison de son mouvement annuel dans l'écliptique. C'est pourquoi si à tel jour, il passe par le méridien d'un lieu, au même moment qu'une étoile fixe, le lendemain l'étoile le précède au même méridien, de tout le tems qu'il lui faut pour parcourir l'arc dont il s'est avancé en ascension droite; ou de l'ouest vers l'est, pendant 24 heures. Ainsi l'intervalle de deux passages consécutifs du soleil au méridien (intervalle qui est nommé le jour vrai), est toujours plus grand que l'intervalle de deux passages d'une étoile.

Cette différence n'est pas d'ailleurs la même chaque jour, & la longueur du jour vrai varie sans cesse, parce que le mouvement du soleil en longitude, ou en ascension droite, n'est jamais uniforme & égal. Si le soleil parcourait l'écliptique avec une vitesse toujours la même: on trouveroit, (en divisant  $360^\circ$  par la durée de sa révolution, qui est de 365 j. 5 h. 48 min. 48 sec.) son changement diurne en longitude. Cette quantité est de  $59' 8''$ , & elle est nommée le mouvement moyen & journalier du soleil en longitude.

Supposons donc que le changement journalier du soleil en ascension droite fut de  $59' 8''$ ; tous les jours seroient égaux; & c'est à chacun de ces jours qu'on a donné le nom de jour moyen. Celui-ci est égal à l'intervalle de tems qui s'écoule pendant le passage au méridien, de  $360^\circ 59' 8''$ . C'est un tel jour, composé de 24 heures moyennes, qui seul est marqué par les pendules, parce



que ces instrumens ne peuvent avoir qu'une marche uniforme & régulière: & c'est sur ce mouvement moyen qu'on mesure, & la longueur du jour vrai, & les variations diurnes, ou les intervalles de tems qui s'écoulent entre deux passages consécutifs & effectifs du soleil au méridien d'un même lieu. C'est aussi sur ce mouvement moyen qu'on mesure la révolution diurne des étoiles, qu'on nomme le jour des étoiles; & ce jour ne dure à proportion que le tems qu'il faut à  $360^{\circ}$  pour passer au méridien; ainsi sa longueur est de 23 heures 56' 4".

On distingue donc trois especes de jours; le jour vrai qui est annoncé par le soleil de la nature; le jour moyen qu'on a imaginé de faire marquer par les pendules; & enfin le jour des étoiles, ou le tems qu'on compte à une pendule, depuis le passage d'une étoile à un méridien, jusqu'à son retour au même méridien. La différence du jour vrai au jour moyen est nommée la différence du tems vrai au tems moyen, & elle est utile pour reduire le tems vrai d'une observation, au tems moyen qui seroit marqué par une pendule; ou pour juger par l'heure d'une pendule, du moment vrai d'une observation.

L'heure de midi est déterminée chaque jour par le passage du soleil au méridien: toute autre heure du jour doit l'être aussi par la distance du soleil à ce méridien, ou par la valeur de l'angle horaire  $P$ . Lorsqu'un arc  $eu$  sépare cet astre du méridien, comme le parallele entier composé de  $360^{\circ}$ , est parcouru en 24 heures vraies, chaque arc de  $15^{\circ}$  correspond à une heure de tems; c'est-à-dire que si le soleil est à  $15^{\circ}$  du méridien avant son passage, on ne doit compter qu'onze heures dans le lieu supposé. On voit donc qu'on peut connoître à terre comme à bord d'un vaisseau qu'elle est l'heure qu'on doit compter à chaque instant du jour, en observant la hauteur instantannée, telle que  $ea$ , du soleil; lorsque d'ailleurs on fait sa déclinaison, ainsi que la latitude du lieu de l'observation. En effet dans le triangle  $\angle Pe$  (fig. 55), les trois côtés sont alors donnés, & on peut calculer l'angle  $\angle Pe$ , dont la

valeur reduite en tems, à raison de  $15^{\circ}$  par heure, exprime le tems qui doit s'écouler depuis le point  $e$  jusqu'au moment du passage du soleil au méridien. C'est ainsi qu'on peut trouver l'heure vraie de l'observation de tous les phénomènes célestes. Un pareil triangle, s'il étoit construit pour le point  $m$ , serviroit par conséquent à faire connoître l'heure du lever du soleil. Il en seroit de même pour l'heure du coucher. Avec tous ces moyens on juge aisément comment on peut régler la marche d'une pendule sur le mouvement moyen & diurne du soleil, & comment enfin ses irrégularités ou ses écarts peuvent être déterminés.

165. Lorsque le soleil est au point  $e$  de son parallèle, ce point est parfaitement le même à l'égard de tous les lieux de la terre pour lesquels cet astre est visible; & la position de son cercle de déclinaison  $Pe$  est indépendante de celle de l'horison & du méridien, qui sont particuliers à chaque lieu. C'est pourquoi comparons les deux figures (43 & 55). Supposons que le cercle de déclinaison  $\zeta um$  ne soit que le prolongement du plan du méridien  $Nao$  (fig. 43) du lieu  $a$ ; & que  $Pe$  soit celui du méridien terrestre  $nud$  du lieu  $u$ . On voit que le soleil placé au point  $e$  de son parallèle, est alors dans le méridien du lieu  $u$ , tandis qu'au même instant il se trouve à une distance  $Md$  du méridien du lieu  $a$ . Il est donc alors midi au lieu  $u$ ; & si l'arc  $Md$  (supposé dans l'est du méridien) est de  $30^{\circ}$ , on ne doit compter encore que 10 heures du matin au lieu  $a$ . Ainsi l'arc  $Md$  (fig. 55) étant de même nombre de degrés que l'arc  $od$  (fig. 43), qui mesure la différence des longitudes des points comparés, ce dernier arc  $od$ , réduit en tems à raison de  $15^{\circ}$  par heure, indique la différence des heures qu'on compte en même tems aux deux points  $a$  &  $u$  de la terre. La différence des longitudes de ces lieux doit donc être toujours connue, par celle des heures qui sont comptées sous les deux méridiens au même moment. L'inverse de cette proposition est également vraie.

Il est donc de la plus haute importance pour les navigateurs de savoir trouver en mer l'heure qu'on doit

DE L'HOMME DE MER. 377  
compter à tout instant donné, sur un vaisseau; parce qu'alors, en la comparant à celle qui est comptée en même tems sous un méridien déterminé, on parvient à connoître la longitude du vaisseau d'observation.

Le soleil, dont la marche journaliere est la mesure du tems, n'est pas le seul astre dont l'observation puisse être employée à la détermination de l'heure qui doit être comptée à bord d'un vaisseau. Toutes les étoiles (excepté celles qui seroient exactement aux poles du ciel) & les planetes, peuvent servir à cette recherche. En effet supposons qu'on observe en mer, par une latitude connue, la hauteur d'une étoile dont la déclinaison est donnée. On peut calculer son angle horaire  $\angle Pe$  (fig. 55), ou l'arc  $Md$ , qui est la distance de l'étoile  $e$  au méridien  $\angle MS$ . Si on trouve que cet arc soit de  $30^\circ$ , & si la différence des ascensions droites de l'étoile, & du soleil, (qui est supposé ici dans l'ouest de l'étoile), est en ce moment de  $30^\circ$ , il est évident que le soleil doit être dans le méridien du vaisseau; parce que la différence de ces ascensions droites est toujours l'arc  $Md$  de l'équateur, qui est compris entre les cercles de déclinaison  $Pe$  &  $PM$  de ces deux astres. Dans ce cas, la position de l'étoile sur l'horison du vaisseau, & la différence de son ascension droite à celle du soleil (différence toujours indiquée par les tables), font donc connoître qu'il doit être midi à bord du vaisseau d'observation.

Si le soleil n'est pas au mérid. au moment où l'étoile est observée en  $e$  du côté de l'est; cette observation peut encore servir à connoître l'heure à laquelle elle est faite, ou l'heure qui est marquée par le soleil. La valeur de  $P$  doit être cherchée dans le triangle  $\angle Pe$ , & ensuite être retranchée de la différence des ascensions droites de l'étoile & du soleil. Le reste est l'arc de l'équateur qui est compris entre le méridien du vaisseau & le cercle de déclinaison du soleil; & cet arc converti en tems, à raison de  $15^\circ$  pr heure, donne l'heure indiquée par le soleil, ou l'heure à laquelle l'étoile a été observée. (Cette différence d'ascensions droites doit toujours être prise, en retranchant celle du soleil de celle de l'étoile;

parce que le soleil [qui sert à marquer le tems, ainsi que le commencement de chaque jour & sa fin], est supposé, de tous les corps célestes, celui qui passe le premier au méridien de chaque lieu. D'ailleurs son mouvement diurne de l'est à l'ouest est contraire au sens suivant lequel on compte les ascensions droites. Tous les astres doivent donc être supposés dans l'est du soleil, & avoir une ascension droite plus grande que la sienne. Si l'étoile est observée au moment de son passage au méridien du vaisseau, l'angle P est nul, & l'heure est alors donnée par la seule différence des ascensions droites du soleil & de cette étoile. Réciproquement on peut déterminer l'heure du passage d'une étoile au méridien d'un vaisseau, en retranchant de son ascension droite celle que le soleil peut avoir au moment de ce passage, en supposant que ces ascensions droites soient réduites en tems.

Remarquons que l'ascension droite du soleil n'est indiquée par la connoissance des tems, que pour le moment du midi de chaque jour à Paris; & si c'est cette ascension droite qu'on retranche (comme cela se fait ordinairement) de celle de l'étoile, on n'obtient que l'heure approchée du passage de l'étoile au méridien. Ce premier résultat a donc besoin d'une correction. En effet supposons que ce résultat annonce que depuis l'instant de midi, jusqu'au passage de l'étoile au méridien, il doit s'écouler 6 heures de tems, ou que la différence des ascensions droites est de  $90^{\circ}$ : le soleil, dans cet intervalle de tems, doit se rapprocher de l'étoile (conséquemment à son mouvement annuel), & à l'instant des 6 heures écoulées, l'étoile doit être moins éloignée du soleil, qu'au moment de midi. L'étoile doit donc passer au méridien une minute de tems avant l'heure indiquée par le 1.<sup>er</sup> résultat. Car en ne considérant que le tems moyen, l'étoile, en 24 heures moyennes, parcourt dans le ciel  $360^{\circ} 59' 8''$ , ou  $90^{\circ}$  en 5 heures  $9'$  à-peu-près. Le premier résultat doit donc être diminué d'une minute de tems, pour indiquer le moment réel du passage de l'étoile supposée au méridien d'un lieu. Par conséquent on doit établir pour règle générale, que l'heure du pas-

sage d'une étoile au méridien, est bien la différence de de son ascension droite à celle que le soleil peut avoir à midi, mais diminuée d'une minute à-peu-près par 6 heures.

Lorsque la connoissance des tems présente, au-lieu de l'ascension droite du soleil, la distance de l'équinoxe au soleil au moment de midi à Paris, cette distance sert également à trouver l'heure du passage d'une étoile au méridien. Car elle est la différence de l'ascension droite du soleil, à  $360^{\circ}$  (au moment de midi), réduite en tems à raison de  $15^{\circ}$  par heure. Ce tems est alors celui du passage du premier point du belier au méridien. Ainsi tous les astres doivent succéder dans le méridien, au point de l'équinoxe, à des intervalles de tems d'autant plus grands que leur ascension droite est plus considérable. L'heure approchée du passage d'une étoile au méridien, est donc nécessairement la somme de son ascension droite & de la distance de l'équinoxe au soleil. Par exemple, on demande à quelle heure l'épi de la vierge doit passer au méridien de Paris le premier mars 1792. L'ascension moyenne de cette étoile est 13 h. 14' 16'', 3, & la distance de l'équinoxe au soleil à midi étoit ce jour-là 1 heure. 7' 36'', 4. La somme 14 h. 21' 52'', 7 est l'heure approchée du passage cherché. Voici actuellement comment on doit calculer la correction qu'il faut appliquer à ce résultat, & qui a été expliquée précédemment. Les tables indiquent que le lendemain 2 mars, la distance de l'équinoxe au soleil étoit diminuée de 3' 43'', 6 après 24 heures; par conséquent, en 14 h. 21' 52'', 7, cette distance a dû diminuer de 2' 13'', 6. L'heure du passage, corrigée de cette quantité, est donc 14 h. 19' 39'', 1. On néglige dans de tels calculs quelques autres corrections, telles que celles qui résultent de l'aberration & de la nutation, parce qu'elles sont si petites, que dans la pratique de la navigation on peut sans danger se dispenser d'en tenir compte. Dans l'exemple présent, ces dernières corrections ne s'éleveroient qu'à 1'', 2.

Si on cherche l'heure du passage d'une étoile au méridien d'un vaisseau, ou d'un lieu éloigné de Paris, la

distance de l'équinoxe donnée par les tables, doit être reduite d'abord à raison de la différence des longitudes du lieu & de Paris. Ensuite le reste du calcul est parfaitement semblable au précédent.

C'est avec toutes ces ressources, que les navigateurs dans tous les tems, peuvent déterminer en mer, l'heure qu'ils doivent compter sous le méridien où ils sont placés. Ainsi lorsque des circonstances favorables leur permettent d'observer un de ces phénomènes célestes, qui ont lieu au même instant pour tous les points du globe; lorsqu'ils ont employé les moyens indiqués pour connoître l'heure de telles observations; la connoissance des tems, qui annonce l'heure à laquelle ce même phénomène a dû être observé à Paris, fait connoître, par la différence des heures comptées sous les méridiens de Paris & du vaisseau, quelle doit être la longitude de celui-ci à l'égard du méridien de Paris. Ces phénomènes instantanés sont, comme on l'a déjà dit, les éclipses du soleil, de la lune, des satellites de Jupiter; les occultations des étoiles; & sur-tout les distances de la lune aux étoiles ou au soleil. Ces distances, qui varient si rapidement, & qui, par cette raison, sont si favorables à la recherche des longitudes en mer, sont annoncées dans la connoissance des tems, telles qu'elles seroient observées chaque jour à Paris, de 3 heures en 3 heures; & il est aisé de juger comment elles ont pu être calculées. En effet, si à une certaine heure supposée, on connoît par les tables les arcs  $Pu$  &  $Pa$  (fig. 97. G), qui sont les complémens des déclinaisons de la lune & de l'astre qui lui est comparé, ainsi que l'an.  $uPa$ , qui est la différence de leurs ascensions droites; on peut, dans le triangle  $uPa$ , calculer le côté  $ua$ , & par conséquent annoncer que la lune, à telle heure indiquée, doit être à telle distance du soleil, ou d'une étoile connue.

166. Tel est le rapport général de certaines observations astronomiques, avec la détermination des longitudes en mer. L'astronomie favorise également la recherche des latitudes des vaisseaux. En effet considérons les astres au moment de leur passage au méridien

d'un lieu (fig. 97. G); & supposons leurs déclinaisons connues par les tables, pour le moment des observations. Si un astre passant au méridien en  $b$ , entre l'équateur  $QF$  & le zénith  $z$ , on observe sa hauteur (nommée méridienne) qui est  $bo$ ; & si on retranche de  $bo$  la déclinaison  $bQ$  de cet astre, le reste  $Qo$  est un arc dont le complément  $Qz$  est la latitude du lieu. Si un astre est observé au point  $q$  d'un méridien, entre l'équateur  $QF$  & l'horison  $ON$ , sa hauteur déterminée  $oq$  étant augmentée de la déclinaison  $qQ$  de l'astre, devient  $Qo$ , dont le complément est la latitude du lieu. Si le passage d'un astre au méridien, a lieu en  $c$  entre le pole & le zénith; supposons qu'on observe sa hauteur  $cN$ ; comme l'arc  $PN$  est égal à  $Qz$  (puisque ces deux arcs sont chacun complémens du même arc  $zP$ ) la différence de  $cN$  au complément  $cP$  de la déclinaison de l'astre, est l'arc  $PN$ , ou la latitude du lieu. Enfin si la hauteur méridienne de l'astre est  $rN$ , parce que l'astre est placé entre le pole & l'horison; il faut faire une somme de cette hauteur observée & du complément de la déclinaison de l'astre, pour déterminer la latitude du lieu de l'observation. Ces regles sont générales, quels que puissent être les astres observés.

Si des nuages, ou d'autres circonstances contraires s'opposent à l'observation des hauteurs méridiennes des astres, il reste encore des moyens de déterminer la latitude d'un vaisseau; & celui qui peut être employé avec plus de confiance est celui-ci. On doit observer 2 hauteurs d'un même astre, & mesurer, à l'aide d'une bonne montre, l'intervalle de tems qui sépare les deux observations. C'est ensuite avec ces données qu'on peut calculer la latitude du lieu, si d'ailleurs on connoît la déclinaison de l'astre, aux momens des deux observations. En effet soient  $u$  &  $a$  les points ou se trouve l'astre lorsqu'il est observé; & soient construits les triangles  $zPu$  &  $zPa$ . On connoît, dans le triangle  $uzP$  (d'après les suppositions), & le côté  $zu$  qui est le complément de la hauteur observée de l'astre en  $u$ , & le côté  $Pu$  qui est le complément de sa déclinaison. Ainsi il faudroit déterminer l'angle  $zup$ , pour calculer le côté

$zP$ , qui, dans ce même triangle, représente le complément de la latitude cherchée. Cet angle est la différence des angles  $zua$  &  $Pua$ . Dans le triangle  $Pua$ , on peut calculer & le côté  $ua$ , & l'angle  $Pua$ , parce qu'on y connoît les deux côtés  $Pu$  &  $Pa$ , qui sont les complémens des déclinaisons de l'astre en  $u$  & en  $a$ , & parce que l'angle  $uPa$  a pour mesure l'intervalle des observations (reduit en degrés). Alors, dans le triangle  $zua$ , les trois côtés sont connus & peuvent conduire à trouver la valeur de l'angle  $zua$ , qui, diminué de l'angle  $Pua$ , devient égal à l'angle  $zup$ . C'est enfin, avec ce dernier angle calculé, & avec les côtés connus  $zu$  &  $up$  qu'on trouve facilement dans le triangle  $zup$ , le côté  $zP$ , qui est le complément de la latitude cherchée.

Si au même instant on observoit à bord d'un vaisseau, les hauteurs de deux astres, dont les déclinaisons & les ascensions droites seroient connues; on parviendroit encore, par le même procédé, & en employant les mêmes triangles, à déterminer la latitude de ce vaisseau. Ce cas-là ne diffère du précédent qu'en ce que l'angle  $uPa$  est dans celui-ci donné par la mesure du tems qui sépare les observations; & que dans l'autre cas, cet angle a pour valeur la différence connue des ascensions droites des deux astres observés.

167. Il est souvent nécessaire dans la navigation, de savoir quel est l'azimuth d'un astre, ou quelle est son amplitude; & on peut calculer ces arcs, lorsqu'on connoît la déclinaison de l'astre & sa hauteur, ainsi que la latitude du lieu. Quel que soit le point du ciel  $e$  (fig. 55), dans lequel est placé un astre au moment où sa hauteur  $ea$  est observée; on peut faire un triangle  $zeP$ , (dont les côtés ont une dénomination déjà indiquée précédemment). Les trois côtés de celui-ci sont donnés, puisque la hauteur de l'astre est supposée observée; & sa déclinaison est connue, ainsi que la latitude du lieu. Il est donc aisé de calculer l'angle  $ezP$ , dont le supplément  $uze$  a pour mesure l'arc  $as$ , qui est l'azimuth cherché de l'astre observé.



Quant à l'amplitude  $am$  d'un astre qui se leve en  $a$  (fig. 95. G), On peut la calculer, en formant le triangle  $zPa$ , & en calculant dans ce triangle, dont les trois côtés sont supposés connus, l'angle  $azP$ , qui a pour mesure  $aR$ . Car le complément de  $aR$  est l'arc  $am$ , qui est l'amplitude cherchée. Le triangle  $amQ$  rectangle en  $Q$  peut aussi être employé dans cette recherche. Car on y connoît le côté  $aQ$ , qui est la déclinaison de l'astre, & l'angle  $amQ$ , qui a pour mesure le complément de la latitude du lieu.

Telles sont les bases de tous les rapports qui lient l'astronomie avec l'art de la navigation; & après les avoir établies, nous allons indiquer, avec des détails convenables, tous les usages & toutes les applications qu'on peut faire, ou qui sont nécessaires, pour la sûreté comme pour le succès des projets des navigateurs.

168. *Observations astronomiques utiles à la marine.* Les réflexions précédentes ont prouvé sans doute, que la position d'un vaisseau sur la surface des mers, peut être indiquée par celle des astres dans le ciel. Il ne reste donc plus qu'à considérer, & les calculs astronomiques dont les navigateurs doivent s'occuper, soit pour rectifier leur estime, soit pour perfectionner les cartes marines; & les instrumens qui peuvent être propres à ces observations nécessaires. (Nous devons supposer d'ailleurs que tout navigateur qui entreprend de conduire un vaisseau à un port proposé, est toujours muni d'un almanach nautique quelconque, qui présente les indications des phénomènes célestes & des positions des astres, pendant le cours de la campagne projetée). Comme ces observations astronomiques qui sont utiles à la marine, ont déjà été désignées, & qu'il ne reste à exposer que les calculs qui leur sont relatifs, nous croyons devoir présenter des détails essentiels sur les instrumens astronomiques qui sont employés par les hommes de mer, avant de chercher les résultats des usages qu'on peut en faire.

Il faut aux navigateurs des instrumens pour mesurer les hauteurs des astres, leurs distances réciproques; & pour déterminer le moment de l'apparition d'un phéno-

mene céleste quelconque. A terre & dans un observatoire fixe, on peut avec une lunette disposée convenablement, comparer les astres qui passent successivement au méridien; on peut aussi, avec de grands instrumens, mesurer leurs distances, & employer des pendules pour marquer le mouvement moyen du soleil, ou celui des étoiles. Mais à la mer, où un vaisseau n'est jamais un seul instant dans un état de repos, ni dans un état constant, il est impossible d'employer les mêmes instrumens avec succès. L'état des choses ne permet à un navigateur que de mesurer instantannément des angles qui sont formés par deux rayons visuels, dirigés vers deux points quelconques de l'espace; & à cause de sa position fugitive, les instrumens qui lui conviennent doivent être tels, qu'au même instant son œil puisse embrasser les deux objets dont il cherche la distance.

Ceux que nous avons fait connoître (99) précédemment, ne servent à mesurer des angles, qu'à l'aide, soit de deux alidades réunies, soit d'un fil à plomb, ou d'un niveau, & d'une lunette, dont on vérifie successivement la direction ou la position; c'est-à-dire que leur usage exige le concours de deux observateurs, lorsque la position de ces instrumens peut être supposée varier à chaque instant, comme celle de tous les objets qui sont à bord d'un vaisseau à la voile.

C'est pourquoi il a fallu imaginer des instrumens qui fussent particulièrement convenables aux observations des marins. Parmi ceux qui sont connus, nous ne devons citer que le sextant, ou l'octant, ou le cercle (qui ne sont qu'un même instrument plus ou moins étendu & perfectionné). Car les autres qui sont adoptés, mais moins généralement, ne méritent pas d'être mis en parallèle avec les premiers, & ne peuvent pas conduire à des résultats aussi précis & aussi certains.

La construction de cet instrument de réflexion est fondée sur une propriété physique, qui a été observée, & qui est commune aux miroirs plans, ou aux glaces préparées pour réfléchir parfaitement les images des objets qui leur sont présentés. Cette propriété générale est que si d'un point

point *a* (fig. 98. G) lumineux ou éclairé, un globule s'avance sur une direction *ab*, & frappe le plan *cd* du miroir, sous un angle d'incidence *abc*, ce globule, qui ne peut traverser le miroir, en est réfléchi suivant une ligne *be*, qui fait avec *cd* un angle *abd* (nommé de réflexion), parfaitement égal à l'angle *abc*; c'est-à-dire que l'angle d'incidence d'un rayon de lumière sur un miroir, est toujours égal à son angle de réflexion.

Ainsi un miroir *ts* (fig. 99. G) est-il frappé en *i*, par un rayon de lumière dirigé de *y* en *i*; il le réfléchit suivant *ib*, de manière que l'angle d'incidence *yit* est égal à celui de réflexion *bis*. Remarquons que l'angle *yib* des rayons direct & réfléchi, doit être par conséquent le supplément du double de l'angle *yit*.

Si on imagine un autre miroir égal, qui soit placé dans la position *mn*, & qui fasse avec le premier un angle *tim*. Si on suppose aussi qu'un rayon de lumière qui vient de *u* suivant *ui*, soit réfléchi par le nouveau miroir *mn*, suivant la ligne *ib*; les angles *uim* & *bin* sont égaux; & l'angle *uib* des rayons direct & réfléchi est encore le supplément du double de l'angle *uim*. Comparons actuellement les effets de ces deux miroirs, nous verrons que la différence des deux angles *yib* & *uib*, qui est l'angle *uiy*, est égale à la différence de leurs suppléments, ou à celle du double de *yit* au double de *uim*; c'est-à-dire au double de *tim*. On juge par conséquent que si du point *y* (sommet de l'angle qui indique l'inclinaison des miroirs *mn* & *ts*) on trace un arc *zap* avec un rayon quelconque *iz*; l'arc *az*, qui est la mesure de l'angle *tim* des deux miroirs, doit indiquer la moitié de la grandeur de l'angle *uiy*. On voit donc que si les côtés de l'angle *uiy* sont dirigés à deux objets placés l'un en *u* & l'autre en *y*, ou sur tout autre point des lignes *ui* & *yi*, la mesure de la distance de ces objets est indiquée exactement par le double de l'arc *az*.

C'est d'après ce principe qu'on a construit en cuivre, ou en bois dur, un instrument qui présente un arc *par*, décrit du point *i* comme centre, & une alidade *ia*, qui, tournant autour du centre *i* dans le seul plan *iaz*,

fait varier les positions d'un miroir  $mn$ . Celui-ci est fixé sur cette alidade de manière, qu'étant placé successivement en  $mn$ ,  $ts$ , &c. il reste toujours perpendiculaire au plan  $iaz$ , afin que les angles, tels que  $nis$ , puissent avoir pour mesures des arcs tels que  $az$ . On ne doit pas douter qu'il soit nécessaire que les plans des deux miroirs  $mn$  &  $ts$ , ou du même miroir dans ces diverses positions, soient perpendiculaires au plan  $izap$ . Car l'angle de ces plans est égal à celui qui est formé par deux lignes perpendiculaires au même point de la commune section de ces plans. Cette section est une ligne menée par le point  $i$ ; elle doit donc être perpendiculaire aux deux rayons  $ia$  &  $iz$ : ainsi elle doit l'être au plan  $iaz$ ; ce qui ne peut avoir lieu, qu'autant que les deux plans  $mn$  &  $ts$ , dont elle est la section commune, sont eux-mêmes perpendiculaires au plan  $iaz$ . On ne peut donc employer un tel instrument pour prendre la mesure d'un angle, tel que  $nis$ , sans avoir vérifié si le miroir est constamment perpendiculaire, dans chacune de ses positions  $mn$  &  $ts$ , au plan  $izap$ .

Voici comment on fait cette vérification. Soient deux petites pièces de cuivre nommées viseurs, & telles que  $abdec$  (fig. 92. G). Chacune est composée d'un plan  $acdb$ , qui est perpendiculaire à un autre plan  $ced$ , & le côté  $ab$  est parallèle au plan  $ced$ . Deux viseurs parfaitement égaux sont établis sur deux points tels que  $z$  &  $p$  du limbe  $zp$  de l'instrument (fig. 99. G); alors le plan qu'on imagineroit passer par leur côté supérieur  $ab$ , est parallèle au plan du limbe; & si le miroir est perpendiculaire au premier plan, il doit l'être aussi au dernier.

Après ces préparatifs, un observateur se place en  $u$ , par exemple, ou de manière qu'il puisse voir directement & en même tems, le sommet du viseur qui est en  $z$ , ainsi que l'image de celui qui est en  $p$ , réfléchie par le miroir  $mn$ . Alors si les bords supérieurs des deux viseurs paroissent former ensemble une seule & même ligne droite, le miroir est perpendiculaire au plan  $iaz$ : car si les images directe & réfléchie de ces deux bords formoient un angle, cet effet proviendrait neces-

fairement de l'inclinaison du miroir *mn* sur le plan du limbe. En plaçant les viseurs sur de nouveaux points de *paz*, & en changeant la position du miroir, on reconnoîtroit, par le même procédé la perpendicularité de celui-ci, & on s'assureroit ainsi que le miroir de cet instrument est placé convenablement sur l'alidade. Si l'état de ce miroir n'étoit pas tel qu'il doit être, on le rectifie : & l'instrument est construit de manière qu'on puisse corriger ce défaut, par le moyen d'une vis de pression qui est propre à cet effet.

Il y a encore une remarque à faire sur le miroir lui-même. Une seule de ses faces est étamée, & si elle réfléchit les rayons de lumière qui viennent la rencontrer, la face antérieure réfracte ces mêmes rayons, non seulement à leur entrée, mais aussi à leur sortie de la glace. C'est pourquoi si les deux faces planes de ce miroir ne sont pas parallèles entr'elles, alors l'angle d'incidence *abc* (fig. 98. G) ne peut pas être égal à l'angle de réflexion *ebd*; & la différence de ces angles est une erreur qu'il faut connoître ou faire disparaître pour obtenir des mesures exactes, avec un tel instrument. Examinons en quoi consiste cette différence.

Soit *mptu* (fig. 56) une section de ce miroir, telle qu'on puisse supposer dans son plan, & le rayon de lumière *sa*, ( qui, venant de l'objet *s*, frappe la face *mt* de la glace sous un angle d'incidence *sam* ), & le même rayon réfléchi *oe*. Le rayon qui vient de *s*, en abordant la face non étamée *mt* du miroir, s'infléchit par l'effet de l'attraction du verre, & se rapproche de la ligne *kab*, qui est perpendiculaire à la face *mt*, en formant un angle *bac*, tel que  $kas = \frac{3}{2}bac$ . (Ce rapport est donné par l'expérience). Arrivé en *c* sur la face étamée *pu*, il en est réfléchi, en formant un angle *ocr* égal à l'angle *acb*; & lorsqu'il sort de la glace en *o*, il s'infléchit encore de manière que *ir* étant parallèle à *kab*, l'angle  $coi = \frac{3}{2}cor$ .

Remarquons que l'angle  $cor = ori - ocr = abc - acb = abc - abp + cab$ . On voit aussi que la différence des angles d'incidence *sam*, & de réflexion *eot*, est la même que celle de leurs complémens *sak* & *coi*; par conséquent

$am-eot = \frac{1}{2}(cor-bac) = \frac{1}{2}(abc-abp) = \frac{1}{2}(180-2abp)$ . Cette différence est donc nulle lorsque  $kb$  est perpendiculaire à la 2<sup>e</sup>. face  $pu$ , comme à la première  $mt$ ; c'est-à-dire lorsque les deux faces du miroir sont parallèles. Enfin comme  $abp = nab + anb = 90^\circ + mnp$ , il s'ensuit que la différence des angles d'incidence & de réflexion est  $3mnp$ , & qu'il vaut trois fois l'angle des faces du miroir supposé.

Dans l'instrument que nous décrivons ici, l'œil de l'observateur n'est pas placé au point  $b$  (fig. 99. G), lieu où arrive le rayon  $ui$ , qui est réfléchi du grand miroir; mais il est placé en  $o$ , vis-à-vis d'un autre miroir plus petit  $qr$ , qui, à demi étamé, & fixement attaché sur le plan de l'instrument, n'est pas mobile, comme le grand miroir  $ts$ . Le rayon lumineux qui part d'un point  $u$ , & qui vient frapper le miroir en  $mn$ , doit donc être toujours réfléchi de manière qu'il suive après cette réflexion, la route unique  $ibo$ ; & cet angle  $ibo$  est constant, quel que soit l'angle  $uiy$ , entre les objets observés, ou celui  $niz$  des deux positions  $ts$  &  $mn$  du grand miroir.

Appliquons actuellement aux deux rayons  $ib$  &  $bo$ , que le petit miroir reçoit & réfléchit, ce qui a été dit de l'inflexion des rayons dans le grand miroir; & nous en concluons de même l'inégalité des angles d'incidence & de réflexion dans le petit miroir, si ses faces ne sont pas parallèles. En représentant, comme précédemment, par  $mtup$  (fig. 56), une section de ce petit miroir; on doit reconnoître qu'entre tous les rayons de lumière, qui abordent cette glace, celui qui arrive en  $o$ , n'est pas réfléchi suivant  $oe$ , du petit miroir à l'œil de l'observateur; mais au contraire, cet observateur ne reçoit que l'impression du rayon qui, étant entré dans le miroir par un point variable  $a$ , est deux fois réfracté & forcé de suivre la route  $sacoe$ . Tout rayon qui est dirigé sur le grand miroir, d'où il est réfléchi sur le petit, qui le renvoie à l'œil  $o$ ; éprouve ainsi quatre réfractions & deux réflexions: & comme l'expérience seule doit faire connoître cette double erreur des miroirs, c'est elle qui doit être consultée. C'est pourquoi on observe avec

ces miroirs la distance de deux objets fixes très-éloignés l'un de l'autre, ou un angle *uiy* qui soit très-grand. Ensuite on ôte le grand miroir de sa boîte, & on le place dans la même situation qu'il avoit précédemment à l'égard des plans du petit miroir & de l'arc *izap*, avec cette condition seule, que le côté de cette glace qui étoit en contact avec le plan de *izap*, soit remplacé par le côté opposé de la même glace. Dans cet état des choses, le même angle *uiy* est de nouveau mesuré. Si l'arc qui lui sert de mesure est le même dans les deux observations, alors les faces du grand miroir sont parallèles; mais s'il y a une différence dans les mesures, la moitié de cette différence est l'erreur de l'instrument.

Le petit miroir n'est étamé, comme nous l'avons annoncé, que sur la moitié d'une de ses faces. L'autre partie est transparente. Par ce moyen l'œil placé en *o* (fig. 99. G) peut appercevoir directement à travers cette partie de la glace, les objets qui sont éloignés; & en même tems, il peut voir sur sa partie étamée, l'image de tout objet qui est réfléchi par le grand miroir sur le petit. Il peut placer ainsi l'un à côté de l'autre les objets qu'il veut comparer; & c'est ainsi, par la possibilité de ces dispositions, que cet instrument convient parfaitement aux observations nautiques. Car elles exigent, comme on l'a dit, qu'au même moment l'observateur puisse appercevoir les objets dont il se propose de mesurer la distance variable & instantannée.

Ces deux miroirs *mn* & *qn*, qui sont perpendiculaires au plan de l'arc *izap* dont le centre est celui du grand miroir; sont les parties essentielles de cet instrument, dont le corps est d'ailleurs construit ou en cuivre ou en bois, avec tous les moyens qui peuvent le rendre solide & commode. Il est susceptible d'ailleurs de mesurer des angles d'autant plus grands, que l'arc *zap* est d'un plus grand nombre de degrés: car les principes de sa construction ne limitent aucunement l'étendue de cet arc. D'abord on s'étoit contenté de ne faire cet arc que de  $45^{\circ}$  ou de la 8.<sup>e</sup> partie de la circonférence, & dans cet état, l'instrument avoit reçu le nom d'octant.

On lui donna ensuite le nom de sextant, parce que l'arc  $zap$  fut porté à  $60^\circ$ , pour qu'il pût mesurer jusques aux angles de  $120^\circ$ . Enfin on a remarqué que dans ces premiers instrumens, l'arc  $zap$  est toujours celui qui sert seul à marquer la mesure des angles observés, & que si des erreurs ont été commises dans la graduation ou dans la longueur, soit de cet arc, soit d'une de ses parties, elles se portent entièrement sur les mesures des angles. On a vu aussi que la nécessité de faire réfléchir l'image de l'objet le plus éclairé, ne permet de mesurer que dans un sens sa distance à un objet moins éclairé qu'on lui compare; & c'est par toutes ces raisons qu'on a imaginé de reculer les limites de l'arc  $zap$ , en le rendant égal à la circonférence entière d'un cercle  $zbpq$  (fig. 57). Alors l'instrument a reçu le nom de cercle de réflexion. Dans celui-ci le grand miroir  $re$  ou  $oi$  est toujours placé au centre sur l'alidade  $za$ , tandis que le petit miroir  $st$  est fixé sur une autre alidade  $mp$ , (dont la mobilité est indépendante de celle de  $az$ ), & placé en  $q$ , à peu de distance de la circonférence, vis-à-vis une lunette  $mh$ . Les angles que le grand miroir peut former avec lui-même, ont d'ailleurs pour mesure des arcs dont la grandeur est indiquée, comme précédemment, par l'alidade  $za$ .

Si un astre est en  $c$ , le rayon  $ca$  qui frappe sur  $oi$ , se réfléchit suivant  $aq$ , & tombe en  $q$  sur le petit miroir, qui le réfléchit à l'œil placé en  $m$ . Ainsi  $mq$  étant une ligne horizontale, ou une ligne dirigée à un second astre, l'angle  $caq$  a pour mesure la distance des objets comparés. La valeur de cet angle est donnée par le double de la mesure de celui que la position  $oi$  de ce miroir fait avec sa position  $re$  qui est parallèle au petit miroir  $st$ . Car soit un point  $u$  très-éloigné de l'observateur  $m$ , qui l'aperçoit directement à travers la partie non-étamée du petit miroir  $st$ . Le même objet se peint aussi sur le grand miroir  $re$ , & si celui-ci est parallèle au petit miroir, l'angle  $uag$  est égal l'angle  $mqa$ . En effet les angles  $eau$  &  $raq$  sont égaux; mais  $raq = aqt$ , parce que les miroirs sont supposés parallèles, &  $aqt$  est égal à  $hqs$ ; par conséquent les angles  $eaq$  &  $hqs$



font égaux ; c'est-à-dire que le rayon  $hq$  est parallèle à  $ua$ . L'image de l'objet  $u$  qui se peint sur le petit miroir, doit donc paroître sur la même ligne qui passe par l'objet  $u$  vu directement. Ainsi  $g$  étant le lieu de l'alidade  $az$ , lorsque les deux miroirs sont parallèles, &  $z$  étant le lieu de cette alidade, lorsque le miroir dans la position  $oi$ , réfléchit l'image de  $c$  en  $m$ ; le double de l'arc  $gz$  est la mesure de la distance des deux objets.

Imaginons ensuite qu'on fasse tourner l'instrument sur lui-même, & autour de la lunette  $mhp$ ; alors le miroir  $oi$  se trouveroit placé de manière, que le rayon réfléchi du grand miroir, au lieu d'être situé à droite, se dirigeroit sur la gauche; & par conséquent ce miroir ne pourroit alors réfléchir l'image de  $c$  sur le petit miroir. On n'obtient alors cette réflexion nécessaire, qu'en plaçant l'alidade  $za$  dans un nouveau point  $l$ ; c'est-à-dire à une distance  $lg$  du point  $g$ , aussi grande que  $zg$ . L'arc  $lz$  devient alors la mesure du double de la distance cherchée; & si une erreur étoit commise en plus sur la mesure de  $gz$ , elle le feroit en moins sur  $gl$ ; par conséquent la moitié de l'arc  $lz$  est la mesure de la distance cherchée, indépendamment de la connoissance du point  $g$ , qui correspond au parallélisme des miroirs.

D'ailleurs on peut prendre sur le contour du cercle, tel arc qui convient à la mesure de la distance cherchée; & cette mesure pouvant être multipliée à volonté sur la circonférence du limbe, on peut atténuer considérablement les erreurs qui pourroient se trouver dans les divisions du cercle. C'est à cause de cet usage que la circonférence entière est divisée en 720 parties égales, (qui représentent chacune un degré, à cause de la construction de l'instrument), & dont chacune est partagée en trois parties égales. Ensuite un nonius placé à une extrémité des alidades, rend sensible jusqu'à une minute, dans la mesure des angles qui sont observés avec ce cercle de réflexion.

S'agit-il de mesurer un angle  $uiz$  avec un sextant (fig. 99. G), l'observateur examine, (à l'aide des viseurs dont on a déjà parlé plus haut), si le grand miroir  $ts$  est perpendiculaire au plan  $izap$ . Il doit juger ensuite si

le petit miroir est dans la même situation ; & il fait cette dernière vérification en considérant un objet éloigné, tel, par exemple, que le bord de l'horison. Il fait réfléchir son image du grand miroir sur le petit, tandis qu'il le regarde directement par la partie transparente du dernier ; & si cet objet, ainsi que son image, paroissent se confondre parfaitement en passant l'un sur l'autre, il est alors certain que les deux miroirs ont une même position à l'égard du plan  $izap$ , ou que le petit miroir est, comme le grand, perpendiculaire à ce plan. Il doit remarquer aussi quel est sur le limbe  $zap$  le point de division  $z$ , qui est indiqué par l'alidade  $az$ , lorsque les miroirs sont parallèles. Car ce point est le commencement de tous les arcs qui doivent être les mesures des divers angles qu'on se propose d'observer. Cependant la mesure d'un angle, tel que  $uiy$ , ne seroit pas exactement donnée par cet instrument, si les côtés  $ui$  &  $iy$  de cet angle n'étoient pas parallèles au plan de  $izap$ . Car on a vu [128] que des angles tels que  $aou$  &  $knm$  [fig. 39], qui sont dans des plans différens, ne sont égaux que lorsque leurs côtés parallèles sont placés dans des plans qui sont aussi parallèles. Ainsi l'angle  $uiy$  [fig. 99. G] ne peut avoir strictement pour mesure le double de  $az$ , qu'autant que ses côtés sont parallèles au plan du limbe. Il est donc, sur chacun des deux miroirs, un point déterminé, ou doivent concourir tous les rayons réfléchis, & tel, que le plan  $uiy$  soit parallèle au plan  $izap$ . Afin de marquer ce point presque invariablement sur le petit miroir, on adapte à l'instrument, près du lieu  $o$  de l'œil, une petite lunette dirigée convenablement. Deux fils [fig. 93. G] peu éloignés l'un de l'autre, sont placés au foyer de son objectif, dans une direction qui est parallèle au plan du sextant ; & la lunette est située de manière, qu'une ligne menée du milieu de ces fils au centre de l'oculaire, se trouve parallèle au plan du limbe. On parvient à cet état des choses, ainsi qu'à le vérifier, en employant les deux viseurs déjà décrits. On les établit sur le plan du limbe  $zap$  [fig. 99. G] qu'on fait reposer horizontalement sur une base solide. On cherche dans l'horison

un objet éloigné, qui se trouve dans le plan prolongé où sont placés les bords supérieurs de ces viseurs; & si cet objet, qui est réellement dans un plan parallèle à celui du limbe, paroît aussi dans la lunette se peindre au milieu des fils supposés; le milieu de ces fils est le point nécessaire du concours, ou de la réflexion des images des objets qu'on comparera dans d'autres observations. C'est en disposant ainsi l'instrument, qu'on le rend propre à donner des mesures exactes des ang. qu'on se propose d'observer.

169. Cet instrument doit-il être employé à mesurer la hauteur méridienne du soleil? l'observateur regardant à travers la partie transparente du petit miroir, dirige sa vue sur le point du bord de l'horison qui est verticalement au-dessous du soleil placé en *u* (fig. 99. G). Il ramene l'alidade, qui étoit au point *z*, lorsque les deux miroirs étoient parallèles, en un point *a*, tel que le bord inférieur de l'image du soleil, réfléchi en *b*, & de ce point à l'œil en *o*, paroisse à l'observateur en contact immédiat avec le bord de l'horison. Il s'assure d'un tel contact, en balançant légèrement l'instrument autour du rayon horisontal *ob*; & ce contact est parfait lorsque dans ce mouvement, l'image du soleil ne fait que raser le bord de l'horison. Enfin le nombre des degrés de l'arc *az*, marqué par l'alidade sur le limbe *zap*, est la mesure de l'angle *uiy*, ou de la hauteur méridienne apparente du soleil.

Des corrections restent alors à faire à cet arc mesuré, pour en conclure la hauteur vraie du centre du soleil au-dessus de l'horison rationel de l'observateur. 1.<sup>o</sup> L'observateur en mer est ordinairement placé (123) à une certaine hauteur *an* (fig. 91. G) au-dessus du niveau de la mer; & par conséquent la hauteur apparente *sam* surpasse la hauteur réelle de l'astre au-dessus de l'horison sensible, de toute la valeur de l'angle *eam*. Il faut donc retrancher de la hauteur observée, ce dernier angle (qu'on nomme la dépression de l'horison, & dont la grandeur est indiquée par des tables qui se trouvent dans tous les ouvrages nautiques): & la différence

devient la hauteur apparente du soleil, telle qu'elle eût été observée du point  $n$ , au niveau de la mer.

2.<sup>o</sup> Ce rayon de lumière, qui parvient du soleil  $s$  (fig. 58) à l'œil qui l'observe en  $a$ , traverse dans sa route *sua* l'atmosphère qui enveloppe la terre. Dans cette route, & par une influence semblable à celle qu'on a attribuée au verre, ce rayon de lumière, qui s'avance directement du soleil jusqu'à la limite  $u$  de l'atmosphère, éprouve, à l'approche de l'air, une inflexion ou réfraction qui va en augmentant depuis  $u$  jusqu'en  $a$ , où il arrive après avoir décrit la courbe  $ua$ , dont le dernier élément a pour tangente  $ax$ . L'observateur a donc l'œil frappé par ce rayon dans la direction  $ax$ ; & par conséquent il doit rapporter l'astre, qui est réellement en  $s$ , à un point  $x$  apparent du ciel. Cet effet est nommé la réfraction de l'astre. Celle-ci est nulle lorsque le rayon lumineux  $su$  est perpendiculaire à la courbure extérieure de la surface de l'atmosphère; & elle est la plus grande lorsque l'astre est à l'horison. Car alors pour arriver en  $a$ , le rayon lumineux rencontre la dernière couche de l'air très-obliquement, & traverse un plus grand espace dans l'atmosphère. La hauteur observée du soleil est donc encore trop grande de l'angle de réfraction; & des tables qui ont été calculées par des géomètres phisiciens, donnent la grandeur de cette seconde correction, qui est en raison de la hauteur apparente  $xam$  d'un astre. C'est en faisant ces corrections, qu'on obtient la hauteur réelle de cet astre au-dessus de l'horison sensible de l'observateur.

3.<sup>o</sup> Cette observation qui est faite à la surface du globe, doit être réduite à ce qu'elle seroit pour un observateur placé au centre, relativement à l'horison rationnel. Ainsi la hauteur trouvée doit être augmentée (après les précédentes corrections) de la parallaxe  $bac$  (fig. 90. G) en supposant que  $bc$  soit le rayon de la terre, &  $cm$  l'horison rationnel qui est parallèle à l'horison sensible  $be$ . La hauteur de l'astre au-dessus de ce dernier est  $abe$ : elle seroit, pour un observateur en  $c$ , de la grandeur de  $acm$ ; ainsi la première est plus petite que la seconde de toute la valeur de  $bac$ , qui est

la parallaxe de hauteur de l'astre observé. Ainsi en consultant encore des tables calculées de cette parallaxe, on augmente la hauteur de l'astre au-dessus de l'horison sensible, d'une parallaxe proportionnelle à cette hauteur, & on détermine la hauteur réelle du bord observé du soleil au-dessus de l'horison rationnel de l'observateur. Enfin cette hauteur augmentée du demi-diametre de l'astre, devient celle de son centre, ou celle qui seule doit être employée dans les calculs.

De telles observations, (si d'ailleurs on connoît la déclinaison de l'astre au moment où elles ont été faites,) sont utiles, comme nous l'avons annoncé, pour déterminer la latitude du lieu de l'observateur. Mais nous devons remarquer que dans les éphémérides, la déclinaison du soleil n'est annoncée que pour le midi de chaque jour, au méridien de Paris; & que comme elle change d'un jour à l'autre, on doit, avant d'en faire usage, la reduire à ce qu'elle doit être au moment de l'observation. Cette reduction peut toujours être faite d'une maniere suffisamment approchée, en calculant ce changement de déclinaison, en raison de la différence des longitudes de Paris & du vaisseau, & cette différence est toujours connue à-peu-près sur un vaisseau dont on a estimé la route avec soin.

170. Voici en général les regles qu'il faut observer pour déterminer la latitude d'un vaisseau, étant donnée la hauteur méridienne d'un astre connu. En mer on fait toujours si son vaisseau est dans l'hémisphere nord ou sud, & on reconnoît aisément si on observe un astre du côté de l'un ou de l'autre pôle. La hauteur méridienne d'un astre est-elle observée du côté opposé au pôle qui est élevé: alors à cette hauteur corrigée, qui est  $qo$  ou  $bo$  (fig. 97. G), on doit ajouter la distance  $qP$  ou  $bP$  de l'astre au pôle élevé; & le supplément  $Pn$  de cette somme, est la latitude du lieu ou du vaisseau.

Si l'observation a été faite du côté du pôle élevé, la hauteur méridienne de l'astre doit être  $cN$  ou  $rN$ . Dans le cas où l'astre passe au méridien au-dessus du pôle élevé, sa distance à ce pôle doit être retranchée de sa hauteur observée, & le reste est la latitude du

vaisseau. Si au contraire l'astre passe en  $r$  au-dessous du pôle élevé, c'est la somme de semblables quantités qui est égale à la latitude cherchée. D'ailleurs si on remarque que dans le premier cas, la hauteur observée doit surpasser la latitude trouvée, tandis que dans le second, la première doit être inférieure à la seconde, on a un sûr moyen de reconnoissance pour distinguer si l'astre a été observé, ou au-dessus ou au-dessous du pôle élevé. L'exemple suivant présente le calcul de la latitude d'un vaisseau dans tous ses détails, & il doit suffire pour indiquer la marche qu'on doit suivre pour appliquer à cette recherche l'observation d'un astre quelconque.

Un navigateur (étant, le 8 mars 1787, par une longitude estimée de  $51^{\circ}$ ) observe à la mer, & du côté opposé au pôle élevé Nord, la hauteur méridienne du bord inférieur du soleil. Il la trouve de  $43^{\circ} 37'$ . Son œil est élevé de 22 pieds au-dessus du niveau de la mer; & on demande quelle doit être sa latitude.

La dépression de l'horison correspondante à 22 pieds d'élévation, est, par les tables, de  $4' 49''$ : ainsi la hauteur apparente du bord au-dessus de l'horison sensible, est de  $43^{\circ} 32' 11''$ , & comme la réfraction est de  $1'$ , sa hauteur vraie sur cet horison sensible est  $43^{\circ} 31' 11''$ . Mais la parallaxe du soleil à cette hauteur est environ de  $6''$ , & son demi-diamètre est de  $16' 9''$ ; par conséquent en ajoutant ces deux quantités à la hauteur trouvée, la hauteur vraie du centre du soleil, au-dessus de l'horison rationel de l'observateur, est  $43^{\circ} 47' 26''$ . Il faut actuellement trouver la déclinaison du soleil pour le moment de l'observation. On voit dans les tables que le 8 mars à midi, elle est, à Paris, de  $4^{\circ} 47' 52''$  australe; & que du 8 au 9, elle diminue en 24 heures, de  $23' 29''$ : ainsi le vaisseau étant supposé environ à  $51^{\circ}$  de longitude dans l'ouest de Paris, le soleil au méridien de ce dernier lieu, doit avoir une déclinaison différente de celle qu'il a au méridien du vaisseau. Cette différence qui doit être calculée pour  $51^{\circ}$ , à raison de  $23' 29''$  pour  $360^{\circ}$ ; est par conséquent de  $3' 20''$ . On la retranche de  $4^{\circ} 47' 52''$ , & le reste  $4^{\circ} 44' 32''$  est la déclinaison

DE L'HOMME DE MER. 397  
 australe du soleil au moment de l'observation faite à bord du vaisseau. Enfin additionnant ensemble & la distance du soleil au pôle élevé ( $94^{\circ} 44' 32''$ ), & sa hauteur méridienne ( $43^{\circ} 47' 26''$ ), la somme est  $138^{\circ} 31' 58''$ ; on trouve le supplément ( $41^{\circ} 28' 2''$ ) de cette somme, qui est la latitude cherchée du vaisseau au moment de l'observation.

171. Nous avons déjà annoncé que si les circonstances peu favorables ne permettent pas de déterminer la latitude d'un vaisseau, par l'observation de la hauteur méridienne d'un astre connu; on peut néanmoins la trouver par des observations de deux hauteurs d'un même astre, séparées par un intervalle de tems qui seroit mesuré exactement à une bonne montre. Voici un exemple.

Le 2 avril 1787, un vaisseau étant dans l'hémisphère nord, & par  $40^{\circ}$  de longitude, estimée à l'ouest de Paris; on a observé d'abord, à 0 h. 22 min. 39 sec. d'une montre, une hauteur du centre du soleil, qui, réduite & corrigée, étoit de  $61^{\circ} 1'$ ; & ensuite à 3 h. 10' 31'' de la même montre, une 2.<sup>e</sup> hauteur vraie du centre du même astre, de  $37^{\circ} 6'$ . Dans l'intervalle des observations, le vaisseau s'est avancé, suivant l'estime, de  $7'$  de degrés à l'ouest, & de  $9'$  au sud; & on demande quelle devoit être la latitude du vaisseau à l'époque de l'une ou de l'autre des observations.

Soient les points  $u$  &  $a$  [fig. 97. G] les lieux de l'astre au moment des observations;  $z$  le zénith de l'observateur, à l'époque de la mesure de la première hauteur;  $P$  le pôle; enfin  $Pu$  &  $Pa$  les distances successives du soleil au pôle  $P$ , qui sont, la première de  $84^{\circ} 56' 45''$ , & la 2.<sup>e</sup> de  $84^{\circ} 54'$ . L'intervalle de tems écoulé entre les deux observations est, suivant la montre, de 2 h. 47' 52''; ou en degrés, il est de  $41^{\circ} 58'$ . Cet arc, qui est la mesure de l'angle  $uPa$ , doit être diminué de  $7'$ , parce que dans ce même intervalle de tems, le vaisseau s'est avancé de  $7'$  dans l'ouest de Paris. La mesure véritable de l'angle  $uPa$  est donc de  $41^{\circ} 51'$ . Il résulte aussi du changement de  $9'$  du vaisseau en latitude, que le même point  $z$  n'étoit pas le zénith de l'ob-

servateur, au moment de l'observation de la seconde hauteur; c'est pourquoi il faut corriger cette hauteur observée, & la réduire à ce qu'elle eût été pour un même zénith  $z$ .

Soit  $a$  (fig. 59) le lieu de l'astre dans le ciel.  $an$  est sa distance mesurée au zénith réel de l'observateur; tandis que sa distance au zénith (qui étoit celui de l'observateur pendant la première observation) est  $za$ . Il faut donc calculer la valeur de  $za$ , d'après celles de  $an$  & de  $nz$ . Celle-ci est de  $9^\circ$ . Si on imagine que du point  $a$  comme pôle, on ait décrit un arc  $zs$ , alors l'arc  $sn$  est la différence des arcs  $an$  &  $an$ . Le changement  $zn$  du zénith, qui est de  $9'$ , étant très-petit, cet arc peut être considéré sans erreur comme une petite ligne droite; & le triangle rectangle  $snz$  comme rectiligne. On peut donc faire cette proportion,  $sn:nz::\cos. snz$  ou  $Qna:1$ . C'est pourquoi si, au moment où la 2.<sup>e</sup> hauteur a été observée, on eût relevé l'astre à la boussole pour en conclure son azimuth, & par conséquent l'angle  $Qna$ , la quantité  $sn$  eût été facile à déterminer. (Remarquons en passant que cette différence est nulle, lorsque l'angle  $Qna$  est de  $90$  degrés, ou lorsque l'astre est au premier vertical). Ainsi (les circonstances étant favorables) cette méthode de déterminer la latitude, dans un vaisseau qui conserve sa marche progressive, exige que l'une des hauteurs observées soit prise au passage de l'astre au premier vertical. Puisque cet angle n'est pas connu dans le cas que nous considérons, il faut chercher  $sn$  d'une autre manière. Soient prolongés jusqu'à  $90$  deg. & l'arc  $as$  & l'arc  $az$ ; alors l'arc  $rt$  qu'ils comprennent entr'eux, est la mesure de l'angle  $naz$  des deux verticaux, & cet angle est égal à celui des 2 horizons successifs de l'observateur. Car deux cercles qui sont perpendiculaires à deux autres, forment ensemble un angle égal à celui des deux derniers plans. L'arc  $rt$  est donc de  $9^\circ$ ; mais on peut faire cette proportion (puisque'il est parallèle à  $sz$ ),  $rt:sz::1:\sin.az$  ou  $sz=rt.\sin.az$ . On peut d'ailleurs dire, dans le triangle  $snz$ , que  $sn^2=nz^2$  (ou  $rt^2$ )- $zs^2$ : donc  $ns=rt.\cos.az$ . On auroit démontré que  $ns=rt.\cos.an$ , si l'arc  $sz$ , au



lieu d'être décrit par le point  $z$ , l'eût été par le point  $n$ . La valeur de  $ns$ , dans la question supposée, est donc de  $5' 26''$ . C'est cette quantité qu'il faut ajouter à la distance observée de l'astre au zénith  $n$ , pour avoir sa distance  $az$  au zénith  $z$ . L'arc  $az$  est donc de  $52^\circ 59' 26''$ , & son complément, qui est la hauteur réduite de l'astre, doit ainsi être supposée de  $37^\circ 0' 34''$ . C'est la valeur de l'arc  $as$  (fig. 97. G).

La déclinaison du soleil au moment de la première observation, avoit pour complément un arc  $uP$  de  $84^\circ 56' 45''$ , & au moment de la 2<sup>e</sup>, sa distance au pôle  $Pa$  étoit de  $84^\circ 54'$ .

C'est avec toutes ces données qu'on doit chercher le complément  $zP$  de la latitude du vaisseau d'observation; & voici les détails de ce calcul.

Soit abaissé de  $a$  un arc  $ax$  perpendiculairement sur  $Pu$ ; on doit, pour déterminer le segment  $Px$ , faire cette proportion ci-jointe;

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & . . . . . & c \ 0,0000000 \\ : \cos. uPa \ (41^\circ \ 51') & . . . . . & 9,8720945 \\ :: \tan. Pa^1 (84 \ 54) & . . . . . & 1,0494033 \\ : \tan. Px & . . . . . & 0,9214978 \end{array}$$

& on trouve que l'arc  $Px$  est de  $83^\circ 10' 30''$ ; par conséquent le segment  $ux$  est de  $1^\circ 46' 15''$ . C'est avec ces segmens qu'il faut calculer le côté  $au$  & l'angle  $Pua$ . Le premier peut être déterminé par cette proportion,

$$\begin{array}{lcl} \cos. Px. \ (83^\circ \ 10' \ 30'') & . . . & c. \ 0,9250475 \\ : \cos. xu. \ (1 \ 46 \ 15) & . . . & 9,9997930 \\ :: \cos. Pa. \ (84 \ 54 \ 0) & . . . & 8,9488739 \\ : \cos. au. \ [41 \ 36 \ 33] & . . . & 9,8737144 \end{array}$$

(en ajoutant les logarithmes des termes qui doivent être des facteurs, & les complémens arithmétiques de ceux qui doivent être des diviseurs).

L'angle  $Pua$  est donné par cette autre proportion ,

$$\begin{array}{l} \sin. Px [83^{\circ} 10' 30''] . . . . . c \overset{\circ}{0},0030885 \\ : \sin. xu [1 \ 46 \ 15] . . . . . 8,4899859 \\ :: \cot. P [41 \ 51 \ 0] . . . . . \overset{\circ}{0},0478497 \\ : \cot. Pua [88 \ 0 \ 36] . . . . . \underline{8,5409241} \end{array}$$

Si on considère le triangle  $zua$ , dont les trois côtés sont connus, pour y calculer l'angle  $zua$ , la formule qui doit donner cet angle est celle-ci,  $\cos. za = \cos. zu \cos. ua + \sin. zu \sin. ua \cos. zua$ , ou  $\sin. as = \sin. uf \cos. au + \cos. uf \sin. au \cos. zua$ . On peut à la place de  $\cos. zua$ , écrire  $1 - 2 \sin. \frac{1}{2} zua^2$ , & on doit dire que  $2 \cos. uf \sin. au \sin. \frac{1}{2} zua^2 = \sin. (uf + au) - \sin. as$ . On fait aussi quelle est la différence des sinus de deux angles (121); ainsi  $\cos. uf \sin. au \sin. \frac{1}{2} zua^2 = \cos. \frac{1}{2} s \sin. (\frac{1}{2} s - as)$  (en représentant par  $s$  la somme des trois arcs  $uf$ ,  $au$  &  $as$ ). On peut donc faire la proportion ,

$$\begin{array}{l} \sin. au [41^{\circ} 36' 33''] \sin. uf [61^{\circ} 1' 0''] \left\{ \begin{array}{l} C. \overset{\circ}{0},3167157 \\ C. \overset{\circ}{0},1778011 \end{array} \right. \\ : \cos. \frac{1}{2} s [69^{\circ} 49' 3''] . . . , . . . . . 9,5378398 \\ :: \sin. [\frac{1}{2} s - as] [32^{\circ} 48' 29''] . . . . . \underline{9,7338602} \\ : \sin. \frac{1}{2} zua^2 . . . . . 19,7662168 \\ \sin. \frac{1}{2} zua [-49^{\circ} 49' 13''] . . . . . 9,8831084 \\ \& zua = 99^{\circ} 38' 26'' \end{array}$$

Connoissant ainsi la valeur des angles  $zua$  &  $Pua$ , leur différence, ou l'angle  $zup$ , est nécessairement de  $11^{\circ} 37' 50''$ . Alors dans le triangle  $zup$ , on connoît un angle & les deux côtés  $zu$  &  $up$ ; Par conséquent on peut y calculer le côté cherché  $zP$ . On employe ici la même formule que précédemment,  $\cos. zP = \sin. uf \cos. up + \cos. uf \sin. up \cos. zup = \sin. (uf + up) - 2 \cos. uf \sin. up \sin. \frac{1}{2} zup^2$ . Ainsi pour trouver  $\cos. zP$ , ou le sinus de la latitude  $zQ$ , il faut calculer d'abord un angle  $Q$ ,

dont

le sinus est égal à  $2 \cos uf \cdot \sin up \cdot \sin \frac{1}{2} \zeta up^2$ , & on le trouve par cette proportion,

$$\begin{array}{rcl}
 1 & . . . . . & c \quad 0,0000000 \\
 : \cos uf [61^{\circ} 1'] \sin up [84^{\circ} 56' 45''] & \left\{ \begin{array}{l} 9,6853432 \\ 9,9983081 \end{array} \right. \\
 :: 2. [\sin \frac{1}{2} \zeta up] [5^{\circ} 48' 55'']^2 & . . . & \left\{ \begin{array}{l} 0,3010300 \\ 18,0114038 \end{array} \right. \\
 : \sin Q [0^{\circ} 34' 4''] & . . . . . & 7,9960851
 \end{array}$$

Enfin comme on peut dire alors que  $\sin \zeta Q = \sin (uf + up) \cdot \sin Q$ , on peut en conclure que  $\sin \zeta Q = 2 \cos \frac{1}{2} R \cdot \sin (\frac{1}{2} R - Q)$  (en nommant R la somme des arcs  $uf$ ,  $Pu$  &  $Q$ ); par conséquent  $\sin \zeta Q$  doit être connu par la proportion suivante.

$$\begin{array}{rcl}
 1 & . . . . . & C. \quad 0,0000000 \\
 : 2 \cos \frac{1}{2} R (73^{\circ} 15' 55'') & . . . & \left\{ \begin{array}{l} 0,3010300 \\ 9,4593034 \end{array} \right. \\
 :: \sin (\frac{1}{2} R - Q) (72^{\circ} 41' 50'') & . . & 9,9798880 \\
 : \sin \zeta Q (33^{\circ} 21' 17'') & . . . . . & 9,7402214
 \end{array}$$

La latitude du vaisseau dans lequel ont été faites les observations supposées, est donc de  $33^{\circ} 21' 17''$ .

Telle est la méthode détaillée qu'il faut suivre pour conclure la latitude d'un vaisseau, de la mesure de deux hauteurs du soleil & de l'intervalle de tems qui sépare ces observations. Elle seroit la même, si l'astre observé étoit une étoile. Il faudroit aussi la suivre, dans le cas, où, à bord d'un vaisseau, on observeroit au même moment les hauteurs de deux étoiles connues, dont l'une seroit vue au point  $a$  (fig. 97. G), & l'autre au point  $u$ . L'angle  $uPa$  n'auroit pas alors pour mesure un intervalle de tems écoulé entre des observations, mais la différence des ascensions droites des deux étoiles observées; (Différence que les catalogues des étoiles servent à faire connoître exactement). Au reste, les formules de calcul à employer dans ce cas particulier, se-

roient parfaitement semblables à celles qui ont été présentées dans l'exemple précédent, & elles conduiroient de la même manière à la détermination de la latitude du vaisseau d'observation.

172. Si dans ce dernier cas un seul observateur est obligé de prendre successivement la mesure des hauteurs de deux étoiles; il lui reste ensuite à calculer la hauteur qu'auroit eu l'une de ces étoiles (la seconde, par exemple), au moment où la première a été observée. Il faut alors non seulement que l'intervalle de tems qui sépare les observations soit très-court & connu; mais aussi que deux ou plusieurs hauteurs du 2<sup>e</sup> astre soient mesurées exactement, afin qu'on puisse conclure, de la différence de ses hauteurs & de celle des tems, la correction qu'il convient de faire à une des hauteurs observées pour la réduire à ce qu'elle eût été au moment de l'observation du 1.<sup>er</sup> astre.

Imaginons qu'on ait observé dans un même lieu, 2 distances au zénith  $za$  &  $zu$  d'un même astre; & qu'on veuille connoître quelle a dû être sa distance au même zénith lorsqu'il étoit au point  $m$  de son parallèle, ou à telle heure intermédiaire, connoissant d'ailleurs le tems écoulé entre les observations supposées. Les intervalles de tems donnés ou observés sont les mesures des ang.  $aPu$ ,  $mPu$  &  $mPa$ . Soit  $h$  une distance  $za$  de l'astre au zénith. On représentera  $zu$  par  $h-m$ , &  $zm$  par  $h-x$ ; de sorte que  $m$  &  $x$  sont les différences des distances  $zu$  &  $zm$  avec  $za$ . Soit  $zPa = p$ , faisons aussi  $zPm = p-r$ , &  $zPu = p-q$ . Soient enfin  $zP = l$ , &  $Pa$ , ou  $Pu$ , ou  $Pm$ ,  $= d$ . Car on peut supposer que la déclinaison du soleil ou de l'astre ne doit pas changer sensiblement, si l'intervalle de temps qui sépare les observations est très-petit.

En considérant les trois triangles  $zap$ ,  $zmp$ ,  $zap$ , la formule qui exprime le rapport entre les trois côtés d'un triangle & un de ses angles, fournit trois équations, qui sont, la première,  $\cos.h = \cos.l \cos.d + \sin.l \sin.d \cos.p$ ; la 2.<sup>e</sup>,  $\cos.(h-m) = \cos.l \cos.d + \sin.l \sin.d \cos.(p-q)$ ; & enfin la 3.<sup>e</sup>,  $\cos.(h-x) = \cos.l \cos.d + \sin.l \sin.d \cos.(p-r)$ .

Remarquons que les quantités  $q, r, m$  qui sont données, ainsi que la quantité  $x$  qui est cherchée, sont supposées très-petites : ainsi on peut dire que  $\cos.(p-q)$ , par exemple, est égal à  $\cos.p+q.\sin p$ . Alors en raisonnant de même pour les autres cosinus qui sont dans ces équations, celles-ci doivent se réduire, la seconde à (A)  $\cos.h+m.\sin.h=\cos.l.\cos.d+\sin.l.\sin.d(\cos.p+q.\sin.p)$ ; & la 3.<sup>e</sup> à (B)  $\cos.h+x.\sin.h=\cos.l.\cos.d+\sin.l.\sin.d(\cos.p+r.\sin.p)$ . Si on retranche les équations [A] & [B] l'une de l'autre, l'équation résultante est  $[x-m].\sin.h=\sin.l.\sin.d.\sin.p[r-q]$ ; & en retranchant de [A] la première de toutes ces équations, la différence est  $m.\sin.h=\sin.l.\sin.d.q.\sin.p$ . Enfin si on divise l'une par l'autre ces deux équations résultantes, on en conclut [après toutes les réductions nécessaires] que  $qx=rm$ , ou que  $q:m::r:x$ . Les différences des hauteurs sont donc proportionnelles aux intervalles des tems, & on en conclut qu'une hauteur moyenne correspond à l'heure moyenne de plusieurs hauteurs mesurées rapidement.

Un exemple va faire connoître l'application de cette règle. On a observé, à 9' 20'' d'intervalle de tems, deux hauteurs d'un astre qui diffèrent de 2° 13', & on demande qu'elle devoit être la différence de la première hauteur, à celle qui auroit été observée après un intervalle de 5' 15'' de tems. La règle précédente indique qu'il faut faire cette proportion, 9' 20'' : 5' 15'' :: 2° 13' :  $x$  (en nommant  $x$  la différence cherchée). On trouve que la variation de la hauteur devoit être de 1° 15'; & c'est cette quantité qui doit être ajoutée ou ôtée à la première hauteur, selon que l'astre monte ou descend sur l'horison.

C'est par ce moyen simple qu'on rend simultanées les hauteurs de deux astres; & si nous avons développé ses bases, c'est parce qu'il est utile à employer dans plusieurs circonstances qui deviennent communes dans la marine; ou parce qu'il doit paroître nécessaire d'observer plusieurs hauteurs d'un même astre, dans un intervalle de tems qui soit court & bien mesuré, pour en conclure, plus sûrement que par une seule observation

directe, la hauteur de cet astre, à un instant donné du même intervalle de tems.

173. Nous avons fait connoître (165) combien il est important pour la détermination des longitudes terrestres, de savoir trouver l'heure des observations astronomiques qu'on fait en mer; & cette heure qu'on compte à bord d'un vaisseau est toujours facile à calculer.

Voici un exemple. Etant par  $16^{\circ} 10'$  de latitude nord, on mesure en mer la hauteur du soleil, qui, corrigée complètement, est de  $18^{\circ} 50' 20''$ : la distance du soleil au pôle N, dans ce même moment, est  $76^{\circ} 20'$ ; & on demande l'heure de cette observation.

Soit formé, pour le point  $u$ , qui est supposé le lieu du soleil, le triangle  $\chi pu$  (fig. 97. G), dont les trois côtés sont connus (parcequ'ils représentent, comme on le fait, les distances de l'astre, soit au pôle, soit au zénith, & le complément de la latitude du vaisseau). On peut y calculer l'angle horaire  $\chi Pu$ , par une formule déjà développée ailleurs, & qui peut être transformée en celle-ci,  $\sin. Pu. \cos. \chi Q. \sin. \frac{1}{2} \chi Pu^2 = \cos. \frac{1}{2} s \sin. (\frac{1}{2} s - uf)$ ; en supposant que  $s$  représente la somme des arcs  $\chi P$ ,  $Pu$  &  $uf$ , ou des trois côtés du tri. indiqué. On peut donc faire cette proportion.

$$\begin{array}{l} \sin. Pu. (76^{\circ} 20') \cos. \chi Q (16^{\circ} 10'). \left\{ \begin{array}{l} C. 0,0175226 \\ C. 0,0124737 \end{array} \right. \\ : \cos. \frac{1}{2} s (55^{\circ} 40' 10''). \dots\dots\dots 9,7512533 \\ :: \sin. (\frac{1}{2} s - uf) (36^{\circ} 49' 50''). \dots\dots\dots 9,7777534 \\ : \sin. \frac{1}{2} \chi Pu^2 \dots\dots\dots 19,5590030 \\ \sin. \frac{1}{2} \chi Pu (37^{\circ} 0' 14''). \dots\dots\dots 9,7795015 \end{array}$$

& on trouve que l'angle horaire  $\chi Pu$  est de  $74^{\circ} 0' 28''$ , ou que sa valeur en tems est de 4 h.  $56' 2''$ .

Si une étoile eût été observée à l'ouest du méridien, on auroit trouvé l'heure de l'observation, ou en ajoutant à son angle horaire  $\chi Pu$ , calculé comme auparavant, l'heure du passage de cette étoile au méridien du vais-

seau; ou en prenant la différence de ces quantités, si l'étoile n'avoit pas encore passé au méridien.

On doit remarquer que si on compare cette heure observée avec celle qui est indiquée par une montre quelconque, au moment de l'observation, il est aisé d'en conclure l'avancement ou le retard de cette montre sur le tems vrai. C'est aussi en répétant à différens jours, de semblables observations & comparaisons, qu'on parvient à connoître, non seulement l'avancement ou le retard d'une montre sur le tems vrai, mais aussi la conformité de son mouvement ou ses différences avec le tems moyen. Par exemple, supposons que par une observation du soleil (faite le 24 mai 1787 au matin, sur un vaisseau mouillé; qui est par  $28^{\circ} 28'$  de latitude nord, & à 1 h.  $14' 24''$  de longitude dans l'ouest de Paris), on ait trouvé que l'heure vraie étoit alors 7 h.  $39' 55''$  à bord du vaisseau; & par conséquent, suivant l'estimation, 8 h.  $54' 17''$  à Paris. Mais à Paris, le midi moyen retardoit sur le midi vrai, le 23 mai, de  $3' 39''$ ; & le 24 du même mois, de  $3' 34''$ , 1: par conséquent à 8 h.  $54' 17''$  du matin du 24, le retard sur le soleil devoit être de  $3' 34''$ , 7. C'est cette quantité qu'il faut retrancher de 8 h.  $54' 17''$ , pour avoir l'heure moyenne comptée à Paris, au moment de l'observation faite sur le vaisseau. Il étoit donc 8 h.  $50' 42''$ , 3; & comme au même moment, l'heure marquée par la montre marine étoit 10 h.  $35' 17''$ , la différence de ces heures, qui est 1 h.  $44' 34$ , 7, indiquoit l'avancement de cette montre, à l'égard du tems moyen marqué à Paris au même moment. Si le 31 du même mois & le matin, une nouvelle hauteur du soleil observée au même lieu, a fait connoître que le tems vrai sur le vaisseau devoit être 10 h.  $9' 56''$ , tandis que la montre marquoit 13 h.  $8' 1''$ , on en conclut que l'heure vraie à Paris étoit au même moment 11 h.  $24' 28''$ . Cherchons actuellement le tems moyen qui correspond à ce tems vrai, sous le méridien de Paris. Si on consulte les tables, le midi moyen retardoit à Paris sur le midi vrai, le 30, de  $2' 54''$ , 4, & le 31, de  $2' 46''$ , 2; ainsi ce retard ne devoit être que

de  $2^{\text{h}} 46^{\text{m}} 4$  au moment de l'observation supposée. Si on retranche cette quantité de l'heure vraie de Paris, le reste  $1^{\text{h}} 21^{\text{m}} 33^{\text{s}} 6$  étoit l'heure moyenne de Paris, & elle différoit de l'heure marquée par la montre marine au même instant, de  $1^{\text{h}} 46^{\text{m}} 27^{\text{s}} 4$ ; par conséquent cette différence n'étant pas égale à celle  $1^{\text{h}} 44^{\text{m}} 34^{\text{s}} 7$ , qui avoit été déterminée le 24 mai, l'accélération de la montre avoit été de  $1^{\text{m}} 52^{\text{s}} 7$  pendant 170 h.  $32^{\text{m}} 44^{\text{s}}$ , ou son accélération journalière (en supposant sa marche uniforme) étoit de  $15^{\text{s}} 9$ . De telles observations & ces calculs peuvent donc faire connoître, dans tous les tems, la marche d'une montre marine, ou d'une pendule quelconque, par rapport au temps moyen.

Si l'art de l'horlogerie étoit assez perfectionné pour produire des montres dont le mouvement fût toujours uniforme, & fût rendu indépendant de toutes les causes qui à la mer tendent à le troubler; de telles montres ne cesseroient d'indiquer aux navigat. l'heure moyenne qu'on compteroit sous le méridien pour lequel elles auroient été réglées. Alors l'heure moyenne qu'on doit compter à bord du vaisseau où elles seroient embarquées, étant aisée à déterminer par les observations indiquées précédemment; & l'uniformité ou les inégalités de la marche de ces montres pouvant être reconnues par des observations, dans tous les lieux de relâche d'un vaisseau; ces montres présenteroient le moyen le plus simple de découvrir les longitudes en mer. Jusqu'à l'époque, où l'industrie humaine pourra donner à ces ouvrages le degré de perfection qu'on leur desireroit encore; les navigateurs ne doivent cesser de consulter le ciel directement pour la recherche de leur longitude; & plusieurs moyens peuvent être employés pour cette détermination importante.

174. Les almanachs nautiques indiquent les phénomènes célestes qui peuvent être observés tous les jours de l'année, ainsi que l'heure qui est comptée à Paris au moment de leur apparition; & ces phénomènes sont des éclipses, du soleil, de la lune, des satellites de Ju-



piter, des occultations d'étoiles par la lune, des passages de planetes sur le soleil, &c.

Parmi ces observations, il en est qui ne sont pas susceptibles de donner toujours les résultats les plus précis. Dans les éclipses de lune, l'ombre de la terre est si mal terminée, qu'il en résulte toujours quelque incertitude sur le vrai moment des phases. Entre les satellites de Jupiter, il n'y a que le premier dont les éclipses peuvent être prédites avec la précision d'une minute. Les éclipses du soleil, les occultations des étoiles par la lune, & les passages des planetes sur le disque du soleil, sont, il est vrai, des phenomenes dont l'observation peut conduire sûrement à la détermination de la différence en longitude des lieux d'observations; mais c'est par des calculs longs & compliqués. D'ailleurs, plusieurs de ces éclipses dépendent de la situation de l'observateur; & la lune, par exemple, qui paroît aux yeux d'un habitant du globe passer devant une étoile, ne la cache pas à tel autre habitant de la terre. Il n'en est pas de ces éclipses comme de celles de la lune: car cet astre, alors privé de lumière, paroît tel en même tems à tous les points de l'univers.

Les phénomènes dont nous venons de parler semblent être autant de signaux placés dans le ciel, pour annoncer aux navigateurs le moment où une pendule réglée à Paris, marque telle heure déterminée. Ainsi les navigateurs étant attentifs à observer ces phénomènes, ainsi qu'à découvrir l'heure à laquelle ils les aperçoivent, peuvent, par la différence des tems qui sont comptés à Paris & à bord d'un vaisseau, dans le même moment de la durée, conclure la longitude de ce vaisseau à l'égard de Paris.

Au reste ces derniers phénomènes arrivent trop rarement pour les besoins de la marine; ils sont trop difficiles d'ailleurs à observer exactement: car au milieu d'une mer agitée, il n'est pas possible de conserver longtemps un astre dans le champ d'une lunette qui a une certaine longueur; & cependant il est presque toujours nécessaire de se préparer à voir un phénomène

annoncé, quelque moment avant celui où il doit arriver; afin de bien saisir l'instant de son apparition.

Tous ces motifs doivent donc engager les navigateurs à s'occuper d'observations plus fréquentes & plus faciles pour parvenir à découvrir la longitude d'un vaisseau. Ces observations sont celles des distances de la lune à une étoile ou au soleil, parce qu'elles peuvent remplir complètement les vues des hommes de mer. En effet la lune, comme on le fait, fait sa révolution autour de la terre; & si on la compare à une étoile, pour connoître le tems qui s'écoule entre son passage vis-à-vis de cette étoile, & son retour au même point, on trouve que ce tems est de 27 j. 7 h. 43' 12". Ce qui fait voir que si chaque jour son mouvement étoit uniforme, la lune parcourroit dans le ciel un arc de  $13^{\circ} 10' 35''$  ou  $32' 56''$  par heure. Sa distance à une étoile peut donc varier alors d'une quantité très-sensible dans un tems très-court; & par conséquent on doit penser que si elle est observée dans deux points de la terre (qui n'ont même qu'une petite différence en longitude), sa distance au soleil ou à une étoile ne peut paroître la même à la même heure dans chaque lieu. Il est donc évident que si en mer on observe, à une heure connue, la distance vraie de la lune au soleil ou à une étoile; & si un almanach nautique indique d'ailleurs l'heure à laquelle cette distance a dû avoir lieu à Paris, la différence des heures comptées sur le vaisseau & à Paris, à l'époque de l'observation, doit être la longitude du vaisseau à l'égard de Paris.

Examinons par conséquent comment en mer les navigateurs doivent diriger & leurs observations & leurs calculs, lorsqu'ils se proposent d'employer les distances de la lune au soleil ou aux étoiles dans la recherche des longitudes terrestres.

Ils savent que les hauteurs des astres sont altérées par la dépression de l'horison, par la réfraction & par la parallaxe. Ainsi *ua* (fig. 97. G) étant supposée la distance apparente de deux astres dans le ciel, ne peut être regardé comme étant leur distance réelle: & pour conclure celle-ci de la première, il faut connoître toute

l'influence de la réfraction & de la parallaxe sur la distance vraie. Les corrections qu'il convient d'appliquer à une telle mesure, sont, comme on fait, dépendantes des distances des astres au zénith du lieu de l'observation. C'est pourquoi au moment où la distance de la lune à un astre est observée, il faut mesurer les hauteurs des astres comparés. On ne peut donc en mer employer à la détermination des longitudes terrestres, la mesure des distances de la lune aux astres, sans faire trois observations simultanées, qui sont celles des distances des astres, soit entr'eux, soit au zénith du lieu. Les circonstances peuvent ne pas permettre à trois observateurs de se réunir, pour s'occuper de concert & au même moment des trois observations annoncées; alors un seul observateur peut les faire séparément. Mais il doit répéter plusieurs fois celles des distances; & il doit multiplier aussi celles des hauteurs de ces astres, pour réduire celles-ci plus aisément à ce qu'elles eussent été au moment de l'observation d'une des distances. La réduction de ces hauteurs doit être exécutée par la méthode qui a été indiquée précédemment [172]. Si on recommande d'ailleurs de mesurer plusieurs fois la distance de la lune à l'astre qui lui est comparé, & dans tous les cas; c'est parce que la distance moyenne qu'on en conclut mérite une plus grande confiance que le résultat d'une observation unique, qui peut être mêlée d'erreurs qu'on n'a pas lieu de soupçonner.

Nous allons faire connoître par un exemple tous les détails de cette opération. La facilité de réduire les observations dans tous les cas à un même moment, permet de borner ces développemens au seul cas où trois observateurs en mer ont mesuré en même tems & à plusieurs reprises, l'un plusieurs distances du bord de la lune au bord du soleil; le second autant de hauteurs du soleil, & le troisième un même nombre de hauteurs de la lune.

Six distances des bords de ces deux astres ont été mesurées en mer, le 26 avril 1787 à 5 heures du soir, & leur distance moyenne a été trouvée de  $116^{\circ} 8' 50''$ . Six hauteurs du soleil & de la lune ont aussi été obser-

vées au moment de la mesure des distances, & d'un point du vaisseau qui étoit élevé de 16 pieds au-dessus du niveau de la mer : de sorte que la hauteur moyenne du bord inférieur de la lune a été trouvée de  $44^{\circ} 15' 25''$ , & celle du bord inférieur du soleil de  $18^{\circ} 40' 55''$ . Le vaisseau étoit alors par  $16^{\circ} 10'$  de latitude nord, & sa longitude à l'ouest de Paris étoit estimée  $27^{\circ}$ . On demande sa longitude réelle, d'après les observations annoncées.

Il faut chercher la distance vraie des astres comparés, ou les corrections qui doivent être appliquées à leur distance apparente observée; & comme la connoissance des tems ne présente que pour Paris les diamètres de ces astres, ainsi que leur parallaxe; il faut, pour les déterminer par ces tables, calculer quelle heure il étoit à Paris, au moment de l'observation faite à bord. La longitude du vaisseau à l'ouest de Paris, étoit estimée de  $27^{\circ}$ , ou de 1 h.  $48'$ , à raison de  $15^{\circ}$  par heure. Ainsi au moment de l'observation supposée, on comptoit à Paris 6 heur.  $48'$ . En consultant les tables, qui donnent, pour le midi de chaque jour à Paris, les diamètres du soleil & de la lune, on peut aisément en conclure ces mêmes diamètres, pour l'époque de 6 h.  $48'$  du soir du 26 avril. Ainsi par des parties proportionnelles, on trouve qu'à une telle heure à Paris, le demi-diamètre de la lune devoit être de  $15' 43''$ , & celui du soleil de  $15' 56''$ . Ces demi-diamètres étant ajoutés à la distance observée des bords de ces astres, la somme  $116^{\circ} 40' 29''$  est la distance apparente de leurs centres. Ensuite on fait à cette distance les corrections qui dépendent des déviations des rayons visuels à l'égard du plan de l'instrument, & du défaut de parallélisme des faces des miroirs (corrections qui s'élèvent à  $46''$ , & qui tendent à diminuer la distance observée), & on obtient enfin la distance apparente des centres, qui est de  $116^{\circ} 39' 43''$ .

Les hauteurs observées des deux astres doivent être diminuées chacune de  $4' 3''$ , qui sont l'effet de la dépression de l'horizon; & elles sont réduites ainsi à  $44^{\circ}$ .

11' 22'' pour la lune, & 18° 36' 52'' pour le soleil. Si on les augmente aussi des demi-diamètres de ces astres; la hauteur apparente du centre de la lune, est de 44° 27' 5'', & celle du centre du soleil est de 18° 52' 48''.

On réduit ces dernières hauteurs aux hauteurs vraies des mêmes astres, en les corrigeant des effets de la parallaxe & de la réfraction; & comme la réfraction fait paroître trop grandes les hauteurs que la parallaxe rend trop petites; l'excès de la parallaxe sur la réfraction de cet astre, doit être seul ajouté à sa hauteur apparente, pour que la somme représente sa hauteur vraie. La parallaxe horizontale de la lune au moment de l'observation, est, suivant les tables, de 56' 55'', & la quantité 39' 50'' est l'excès de la parallaxe sur la réfraction, relativement à sa hauteur observée; par conséquent la hauteur vraie du centre de la lune est 45° 6' 55''. La parallaxe du soleil, qui est relative à sa hauteur, est plus petite que la réfraction correspondante à cette même hauteur. Ainsi leur différence 2' 29'' doit être retranchée de la hauteur apparente, pour qu'elle soit changée en hauteur vraie du centre de cet astre. Celle-ci est par conséquent de 18° 50' 9''.

On doit remarquer que ces corrections dernières rendent la hauteur apparente de la lune plus petite que sa hauteur vraie; & qu'elles font un effet contraire sur la hauteur apparente du soleil; ainsi représentons par *is* (fig. 94. G) la distance apparente des centres des deux astres, en supposant la lune en *i*, à une distance apparente *iz* du zénith *z* de l'observateur; & le soleil en *s*, à une distance *sz* du même zénith. Soit l'arc *iL* égal à l'excès de la parallaxe sur la réfraction de la lune, alors *L* est le lieu vrai du centre de la lune dans le ciel; comme celui du soleil est en *M*, si l'arc *sM* est l'excès de la réfraction sur sa parallaxe. L'arc *LM* qui passe par les deux points *L* & *M*, est donc la distance vraie des centres des deux astres comparés, & leurs distances réelles au zénith *z* sont *Lz* & *Mz*. C'est cet arc *LM* qu'il faut actuellement se proposer de dé-

terminer, par le moyen de toutes les données précédentes.

Considérons le triangle sphérique  $zis$ . Ses trois côtés sont connus, & il a un angle  $z$  en commun avec le triangle sphérique  $zLM$ , dans lequel nous devons calculer le côté  $LM$ . Nommons  $a$  la hauteur apparente du soleil, &  $A$  sa hauteur vraie : soient  $b$  &  $B$  celles de la lune : soient enfin  $d$  &  $D$  les distances apparentes & vraies des centres de ces deux astres. La formule que nous avons développé ailleurs, & qui exprime les rapports des trois côtés d'un triangle sphérique avec un de ses angles, fournit une équation pour chacun des triangles  $zis$  &  $zLM$ . Dans le premier on peut dire,  $\cos. d = \sin. a. \sin. b + \cos. a. \cos. b. \cos. z$ ; & dans le second,  $\cos. D = \sin. A. \sin. B + \cos. A. \cos. B. \cos. z$ . En égalant les valeurs qui résultent de chacune pour  $\cos. z$ , on a l'équation suivante,  $(\cos. d - \sin. a. \sin. b) \cos. A. \cos. B = (\cos. D - \sin. A. \sin. B) \cos. a. \cos. b$ . Si à l'un & l'autre membre on ajoute la quantité  $\cos. a. \cos. b. \cos. A. \cos. B$ , on transforme l'équation précédente en celle-ci,  $(\cos. d + \cos. (a+b)) \cos. A. \cos. B = (\cos. D + \cos. (A+B)) \cos. a. \cos. b$ , ou  $2 \cos. A. \cos. B. \cos. \frac{1}{2}(a+b+d) \cos. (\frac{1}{2}S-d) = (\cos. D + \cos. (A+B)) \cos. a. \cos. b$ . Supposons que la quantité  $2 \cos. A. \cos. B. \cos. \frac{1}{2}(a+b+d) \cos. (\frac{1}{2}S-d)$ , soit égale à  $\cos. Q. \cos. a. \cos. b$ ; alors on a  $\cos. Q - \cos. (A+B) = \cos. D$ ; & par conséquent  $\cos. D = -2 \sin. \frac{1}{2}(A+B+Q) \sin. (\frac{1}{2}R-Q)$ ; [En représentant par  $R$  la somme des arcs  $A$ ,  $B$  &  $Q$ , comme on a représenté par  $S$  celle des arcs  $a$ ,  $b$  &  $d$ ]. La distance vraie peut donc être aisément déterminée par le moyen des logarithmes, comme on peut s'en convaincre en appliquant les formules précédentes à la question proposée ci-dessus. Nous avons vu que pour calculer le cosinus de la distance vraie, il faut connoître la valeur d'un angle  $Q$  supposé, & on peut la trouver par la proportion suivante, qui est tirée de l'équation  $2 \cos. A. \cos. B. \cos. \frac{1}{2}S. \cos. (\frac{1}{2}S-d) = \cos. Q. \cos. a. \cos. b$ .

$$\begin{aligned}
 \cos.a (18^{\circ} 52' 48'') \cos.b (44^{\circ} 27' 5''). & \left\{ \begin{array}{l} C. 0,0240178 \\ C, 0,1463961 \end{array} \right. \\
 : 2 \cos.A (18^{\circ} 50' 9'') \cos.B (45^{\circ} 65' 5''). & \left\{ \begin{array}{l} 0,3010300 \\ 0,8486094 \\ 9,9760965 \end{array} \right. \\
 :: \cos.\frac{1}{2}s (89^{\circ} 59' 48'') \cos.(\frac{1}{2}s-d) (26^{\circ} 39' 50'') & \left\{ \begin{array}{l} 5,7647561 \\ 9,9511696 \end{array} \right. \\
 : \cos.Q [89^{\circ} 59' 39'']. & \dots\dots\dots 6,0120755
 \end{aligned}$$

& enfin on détermine  $\cos.D$  en mettant en proportion les facteurs des membres de l'équation  $\cos.D = -2 \sin.\frac{1}{2} [A+B+Q] \sin.(\frac{1}{2}R-Q)$ , sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}
 1 & \dots\dots\dots C. 0,0000000 \\
 : 2 \sin.\frac{1}{2}R (76^{\circ} 58' 21''). & \left\{ \begin{array}{l} 0,3010300 \\ 9,9886758 \end{array} \right. \\
 :: \sin.(\frac{1}{2}R-Q) (13^{\circ} 1' 18''). & \dots\dots\dots 9,3527988 \\
 : -\cos.D [116^{\circ} 2' 33'']. & \dots\dots\dots 9,6425046
 \end{aligned}$$

On doit remarquer que la valeur de  $\cos.D$  étant négative, comme l'indique l'équation précédente, la distance vraie  $D$  est le supplément de la valeur de l'angle, dont le cosinus a pour logarithme celui qui résulte de toute l'opération. La distance vraie des centres de la lune & du soleil étoit donc, au moment de l'observation, de  $116^{\circ} 2' 33''$ , & dans ce même moment on devoit compter à bord du vaisseau 4 h. 56' 2'', comme on le trouve par le procédé indiqué précédemment, en calculant l'angle horaire du soleil, par le moyen, de la hauteur vraie  $[18^{\circ} 50' 9'']$  de cet astre, de sa déclinaison boréale présumée  $[13^{\circ} 39' 56'']$ , & de la latitude nord  $[16^{\circ} 10']$  du vaisseau.

Actuellement il s'agit de connoître à quelle heure à Paris la distance de la lune au soleil étoit telle qu'elle a été trouvée de  $116^{\circ} 2' 33''$ . La connoissance des tems facilite cette recherche, en présentant pour chaque jour

à Paris, & de 3 heures en 3 heures, les distances réelles des centres de la lune & du soleil. On y annonce que le 26 avril 1787, à 6 heures du soir, la distance de ces astres étoit de  $115^{\circ} 39' 5''$ , & qu'à 9 heures, elle étoit augmentée de  $1^{\circ} 30' 4''$ . On doit donc faire la proportion suivante  $1^{\circ} 30' 4'' : 23' 28'' :: 3 \text{ h ou } 180' : x$  ( $x$  représente le tems qu'il a fallu à la lune pour augmenter sa distance au soleil de  $23' 28''$ ). & on conclut que cette quantité  $x$  est de  $46' 54''$ . On comptoit donc à Paris 6 h.  $46' 54''$ , lorsque la lune étoit à  $116^{\circ} 2' 33''$  du soleil; c'est-à-dire, au même moment où on comptoit à bord du vaisseau 4 h.  $56' 2''$ . La différence de ces heures, qui est 1 h.  $50' 52''$ , étoit donc la longitude du vaisseau, dans l'ouest de Paris, au lieu de l'observation; & cette longitude exprimée en degrés étoit de  $27^{\circ} 43' \text{ O}$ .

Lorsqu'on détermine la longitude d'un vaisseau, par les distances de la lune aux étoiles; les hauteurs de ces astres, qui deviennent nécessaires pour la réduction de leur distance apparente à leur distance vraie, sont rarement faciles à mesurer pendant la nuit. Le bord de l'horison, auquel on doit les comparer, est éloigné & n'est pas toujours visible, & souvent il est incertain. Alors, par des observations convenables & déjà indiquées, on règle une bonne montre à secondes, pendant le jour qui précède, ou pendant celui qui suit l'observation. Par ce moyen, on peut savoir l'heure vraie à laquelle on mesure la distance des astres comparés; Et on peut calculer les hauteurs qui n'ont pu être observées. On parvient à connoître celle-ci en employant les angles horaires & connus des deux astres, ainsi que leurs déclinaisons & la latitude du vaisseau. Ces premiers calculs servent à déterminer les hauteurs vraies des astres, & on en conclut ensuite leurs hauteurs apparentes. Enfin avec ces quantités, on calcule comme précédemment, & la distance vraie des astres, & la longitude cherchée du vaisseau.

275. *Corrections de la position estimée des vaisseaux en mer.* Toutes les observations astronomiques qui viennent d'être indiquées ne sont devenues nécessaires,



qu'à cause de l'incertitude, qui toujours est malheureusement, attachée aux mesures mécaniques de la route d'un vaisseau, ainsi que de sa direction. Celles des longitudes terrestres exigent, d'après l'exposé précédent, un plus grand concours de circonstances favorables que celles qui servent à déterminer les latitudes; & souvent on est borné à ces dernières, parce que les occasions de faire les premières ne peuvent se présenter aussi fréquemment. C'est pourquoi il est utile aux navigateurs, qui par l'observation de leur latitude, ont reconnu des erreurs dans leur estime, de savoir corriger leur longitude estimée; d'autant plus que celle-ci ne peut être défectueuse que par l'influence des mêmes causes.

Nous supposons avec raison que les longitudes & les latitudes étant exactement observées, méritent toute la confiance des marins, & qu'elles doivent servir à vérifier celles qui n'ont été qu'estimées. Ainsi les erreurs que des observat. astronomiques peuvent faire reconnoître dans l'estime de la latitude d'un vaisseau, ne peuvent être douteuses: & elles doivent faire présumer qu'on en a dû commettre dans l'estime de la longitude. Cherchons par conséquent comment, des premières erreurs reconnues, on peut conclure la correction qu'il faut faire à la longitude estimée d'un vaisseau, pour qu'elle devienne sa longitude vraie. On fait qu'étant donné le chemin d'un vaisseau en latitude, on détermine son changement en longitude, par la proportion suivante; le rayon est à la tangente du rhumb de vent, comme la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée est au chemin en longitude qui correspond à la route. C'est pourquoi, si on doit s'attacher dans la pratique de la navigation, à mesurer exactement le rhumb de vent, ou la direction de la route d'un vaisseau, on doit remarquer aussi avec attention toutes les causes d'erreur qui peuvent déguiser le véritable rhumb de vent. Car, plus cet angle est exactement déterminé, & plus la latitude est observée avec soin; plus aussi on peut compter sur la longitude que ces élémens servent à calculer.

Nommons  $d$  la différence  $ac$  (fig. 50) estimée des

latitudes de l'arrivée & du départ d'un vaisseau; soit  $l$  le changement estimé en longitude; soit  $c$  la longueur estimée de la route, & nommons  $r$  le rhumb de vent présumé. Représentons, par  $p$  l'erreur en latitude, par  $q$  celle qui est faite sur la mesure de la route, & par  $e$  celle qu'on a pu faire sur la grandeur du rhumb de vent. Enfin, pour abrégier le discours, donnons au tri.  $aeb$  le nom de triangle estimé, & au triangle  $feo$  celui de triangle corrigé. Dans celui-ci on peut dire  $1:\cos.(r+e)::c+q:d+p$ ; donc  $(d+p)=(c+q)\cos.(r+e)$ . On fait aussi que dans le triangle  $aeb$ , on a l'équation  $d=c.\cos.r$ ; ainsi retranchant ces équations l'une de l'autre, on parvient à celle-ci,  $p=c(\cos.(r+e)-\cos.r)+q.\cos.(r+e)=2c.\sin.\frac{1}{2}(2r+e)\sin.\frac{1}{2}e+q.\cos.(r+e)$ . Si l'angle  $r$  est très-considérable, son cosinus alors est très-foible; & le produit  $q.\cos.(r+e)$  peut par conséquent être négligé à l'égard de  $2c.\sin.\frac{1}{2}(2r+e)\sin.\frac{1}{2}e$ , sans qu'il en résulte une différence sensible dans la valeur de  $p$ . Cette erreur  $p$  en latitude, qu'on peut alors dire être égale à  $c(\cos(r+e)-\cos.r)$ , ne paroît donc dépendre, dans ce cas particulier, que de la seule erreur faite sur le rhumb de vent estimé. Mais si au contraire l'angle  $r$  est très-petit, son cosinus est très-grand & son sinus très-petit; c'est pourquoi dans cette nouvelle supposition, la valeur de  $p$  est proportionnelle à celle de  $q.\cos.(r+e)$  ou de  $q.\cos.r$ . Elle est donc dépendante alors de l'erreur  $q$  qui a pu être faite sur la longueur de la route, parceque l'erreur commise sur le rhumb de vent peut être négligée sans inconvénient. C'est par ces raisons qu'on confirme l'opinion générale qui est adoptée par les navigat., de n'attribuer qu'aux erreurs du rhumb de vent, celle qui est faite en latitude, lorsque la direction de cette route est voisine de la ligne Est & Ouest; & de ne faire dépendre que des erreurs de la route, celle qui est faite sur un air de vent peu éloigné de la ligne nord & sud. Dans le premier cas, on doit trouver l'erreur sur le rhumb de vent, par l'équation  $1=[\cos.(r+e)-\cos.r]$ , qui donne  $c.\cos.[r+e]=r+c.\cos.r=p+d$ : Donc on peut faire cette proportion simple,  $c:p+d::1:\cos.(r+e)$ ; ou la

ou la longueur de la route, est au chemin observé en latitude, comme le rayon, est au cosinus du rhumb de vent corrigé.

Par exemple, on a couru 134 lieues sur un air de vent qui est peu éloigné de l'ouest, & le chemin observé en latitude est de  $1^{\circ} 51'$ , ou de 111 milles. Si on réduit les 134 lieues en milles, on doit dire, suivant la règle indiquée,  $402:111::1:\cos(r+e)$ , & le rhumb de vent corrigé est alors de  $73^{\circ} 58' 20''$ . C'est après avoir ainsi déterminé cet angle, qu'on cherche ensuite le chemin en longitude, en employant dans la proportion connue, & cet angle, & la différence observée des latitudes croissantes de départ & d'arrivée.

Les mêmes considérations conduisent à conclure que si le rhumb de vent est estimé très-petit, il doit entrer tel qu'il a été mesuré, dans le calcul du chemin du vaisseau en longitude; en faisant usage d'ailleurs, pour trouver ce dernier, de la différence observée des latitudes. Si dans ce dernier cas on se proposoit cependant de chercher l'erreur qui a pu être commise dans la mesure de la route; elle est indiquée par l'équation  $p = q.\cos.r$ , ou par la proportion  $q:p::1:\cos.r$ ; c'est-à-dire que l'erreur sur la route est à celle qui a été faite en latitude, comme le rayon, est au cosinus du rhumb de vent estimé.

Lorsque l'air de vent sur lequel un vaisseau s'est avancé dans l'espace, ne permet pas d'attribuer l'erreur en latitude exclusivement, à celle, soit du rhumb de vent, soit de la route; alors il faut partager cette erreur sur la latitude en 2 parties. On regarde l'une de ces parties comme dépendante de l'erreur sur la route; tandis que l'autre est censée résulter de l'erreur sur le rhumb de vent. Remarquons que ce partage doit être tel, que si les erreurs de la route & de l'air de vent paroissent, d'après l'examen de toutes les circonstances de la navigation, devoir être toutes deux positives, alors l'erreur que des causes inconnues ont pu produire sur la mesure de la route, doit avoir été diminuée en raison de la plus grande ouverture de l'angle du rhumb de vent.

Représentons par  $a$  l'erreur partielle en latitude qui

est attribuée à la route, & par  $p-a$  celle qui dépend du rhumb de vent. Supposons que  $dec$  soit le tri. estimé (fig. 50), en conservant la dénomination  $p$  à l'erreur totale  $fd$  en latitude, dont la partie  $fa$  ou  $a$  est due à la route, tandis que la partie  $ad$  ou  $p-a$  est l'effet seul de l'erreur commise sur le rhumb de vent. C'est cette dernière qu'il importe de connoître, pour calculer la longitude corrigée du vaisseau; & nous devons remarquer que la quantité  $q$ , ou l'erreur de la route  $ec$ , étant représentée par  $zo$ , on doit avoir la proportion  $q:a::1:\cos.(r+e)$ . Car on ne peut supposer, comme on l'a fait, que  $zo$  est l'erreur sur la route, sans que  $ze$  soit égal à  $ec$ ; & sans que  $af$  soit la portion  $a$  de l'erreur en latitude, qui correspond à l'erreur commise sur la route. Le rapport de  $zo$  à  $fa$  est celui du rayon au cosinus de  $feo$  ou de  $(r+e)$ : donc  $a=q.\cos.(r+e)$ . Si on substitue cette valeur de  $q.\cos.(r+e)$  dans l'équation générale  $p=c(\cos.(r+e)-\cos.r)+q.\cos.(r+e)$ , elle devient  $p=c.\cos.(r+e)-ccos.r+a$ ; & par conséquent  $c.\cos.(r+e)=p-z+c.\cos.r=p-a+d$ . On peut donc trouver l'angle du rhumb de vent corrigé  $(r+e)$  par la proportion suivante  $c:d+p-a::1:\cos.(r+e)$ ; c'est-à-dire que la route estimée est au chemin observé en latitude, diminué de l'erreur attribuée à la route, comme le rayon, est au cosinus du rhumb de vent corrigé.

Par exemple, un vaisseau parti de  $52^{\circ} 40' N$ , est arrivé par  $54^{\circ} 22'$  suivant une observation, & après avoir couru 113 milles estimés entre le nord & l'ouest. L'erreur de l'estime en latitude a été reconnue plus petite de  $18'$  que celle qui a été observée. On croit devoir en attribuer  $3'$  à l'erreur commise dans l'estime de la route, & on demande quel est le rhumb de vent corrigé. Il faut alors faire cette proportion,  $113':1^{\circ}24'+18'$  ou  $99':1:\cos.(r+e)$ , & on trouve que le vrai rhumb de vent est de  $28^{\circ} 49' 30''$ . C'est avec ce nouvel air de vent qu'on calcule le changement en longitude, en faisant la proportion convenable.

Si dans cette circonstance on avoit besoin de connoître l'erreur de la route estimée, les mêmes formules rendent cette recherche très-facile. Car on a tou-

jours  $p = c \cdot \cos.(r+e) - c \cdot \cos.r + q \cdot \cos.(r+e)$  ou  $(c+q)(d+p-a) = c(p+d)$ , d'où on conclut la proportion  $d+p-a : p+d :: c : c+q$ ; c'est-à-dire que le chemin observé en latitude & diminué de l'erreur en latitude qui est attribuée à la route, est au chemin observé en latitude, comme la route estimée est à la route corrigée. L'application de cette règle à la question proposée, fait connoître que la route corrigée a dû être de 116,7 milles.

Cette erreur sur la route, ainsi que celle qu'on reconnoît avoir été faite sur le rhumb de vent, doivent attirer l'attention des navigateurs. Car elles peuvent donner des indices de certains courans de la mer, ainsi que de leurs directions. D'ailleurs des observations de ce genre étant faites souvent par divers navigateurs, & dans un même parage, deviennent autant d'avertissemens qui servent à mieux diriger les vaisseaux dans les mers, dont les mouvemens ont été ainsi connus.

176. *Déclinaison de l'aiguille aimantée.* La connoissance de la véritable direction de la route étant, comme on voit, extrêmement importante pour décider de la position réelle d'un vaisseau en mer, les navigateurs ne sauroient donner trop de soins à prévenir les faux jugemens qu'ils peuvent en porter : & une des sources principales des erreurs qu'ils ont à craindre dans leur estime, est l'ignorance de la véritable déclinaison de l'aimant, ou de l'angle que la direction d'une aiguille aimantée forme avec celle du méridien d'un vaisseau, à chaque point de sa route. Cet angle n'est pas le même dans les divers lieux du globe. Sa grandeur change annuellement, & même elle éprouve des variations diurnes. Cependant la boussole est l'unique instrument qui soit & qui puisse être aujourd'hui consulté par les marins pour diriger les routes des vaisseaux. Une raison de sûreté & de prévoyance engage donc à déterminer la variation de la boussole, dans toutes les occasions qui sont favorables à de telles recherches.

L'astronomie offre des moyens qui apprennent à juger de la véritable déclinaison de l'aiguille aimantée. En effet, imaginons tracées (fig. 55) sur l'horison SONE

d'un observateur, la ligne SN qui représente la direction du plan du méridien, & une ligne OE qui est dirigée de l'est à l'ouest. Si la direction de l'aiguille forme avec SN un angle quelconque, la variation est égale à la grandeur de cet angle. Ainsi on peut déterminer cette variation à terre, par le moyen d'une méridienne SN, dont on auroit déterminé les points par des observations astronomiques, telles que celles des hauteurs correspondantes. Un tel moyen n'est pas praticable en mer, & voici ceux qui conviennent à la situation toujours changeante d'un navigateur. Considérons un astre connu, & qui n'ayant aucune déclinaison, parcourt l'équateur EMO par son mouvement diurne. Comme il se leve au vrai point d'est E, supposons qu'en mer on observe avec une boussole à quel point de la circonférence de la rose, cet astre correspond à son lever. Le point observé sur cette rose doit être le vrai point d'est de l'horison, & l'arc qui peut être compris entre ce point & le point d'est magnétique, est la variation de l'aimant. Si cet arc est QE; c'est à-dire si le point d'est de la boussole est en Q, & si l'astre à son lever a été relevé en E; le nord de l'aiguille doit se trouver dans l'ouest du pôle nord du globe, à une distance qui égale QE. La variation de l'aiguille est donc alors d'un nombre de degrés égal à QE, & elle est nommée nord-ouest ou NO. Si au contraire l'astre paroït se lever au point E à une distance Ef d'un point *f* qu'on suppose le point d'est magnétique, le nord de l'aiguille seroit alors placé dans l'est du pôle nord du monde. La variation de l'aiguille seroit donc alors nommée nord-est par cette raison, & sa valeur seroit celle de l'arc Ef. Un pareil raisonnement conduiroit à de semblables conséquences, si l'observation étoit faite au moment du coucher d'un astre, au-lieu de l'être à celui de son lever.

Si la déclinaison d'un astre n'est pas nulle, & si son parallele diurne est représenté par *umrn*, parce que sa déclinaison est *un*; alors cet astre paroît se lever en *m*. Son amplitude ortive est l'arc *mE* de l'horison qui est compris entre le point de son lever & le vrai point d'est

E. Supposons qu'au moment où il paroît sur l'horison, on mesure l'arc  $Qm$  qui est compris entre le point  $m$  de son lever & le point d'est de la boussole. Cet arc  $Qm$  est son amplitude magnétique, & sa différence  $QE$  avec l'amplitude réelle  $mE$  est la variation de l'aiguille. Par exemple, si en consultant la boussole on reconnoît qu'à son lever un astre a  $10^\circ$  d'amplitude magnétique du côté du nord, tandis que son amplitude vraie est de  $15^\circ$ : alors le point d'est de la boussole est à  $5^\circ$  au nord du point d'est du monde, ou le nord de l'aiguille est de  $5^\circ$  dans l'ouest du nord du monde: la variation seroit donc dans cette supposition de  $5^\circ$  NO.

Tels sont les raisonnemens qui doivent servir à déterminer la variation de l'aimant. Toujours il faut comparer l'amplitude magnétique d'un astre connu à son amplitude réelle; ainsi il faut savoir calculer celle-ci & observer la première. L'observation indiquée est facile parce qu'elle consiste à juger avec précision du point de la rose auquel correspond un astre qui paroît dans le contour de l'horison. Le calcul de l'amplitude réelle est aussi très-simple. On a même formé des tables de ces arcs dont la grandeur dépend & de la déclinaison de l'astre, & de sa hauteur, & de la latitude du vaisseau d'observation. Voici les bases de ces tables.

Imaginons 1° un arc  $za$  [fig. 95. G] qui est le complément de la hauteur  $h$  de l'astre placé au point  $a$ ; 2° un arc  $Pa$  nommé  $D$  qui est le complément de la déclinaison de ce même astre; & 3° un arc  $zP$  [passant par les poles  $z$  &  $P$  de l'horison & de l'équateur] qui est le complément de la latitude  $l$  du vaisseau. Ces trois côtés du triangle  $zAP$  sont supposés connus: car le côté  $za$  est de  $90^\circ$ , puisque l'astre  $a$  est réellement dans l'horison. Soit enfin nommée  $A$  l'amplitude vraie  $am$ , qui est le complément de l'arc  $aR$  mesure de l'ang.  $azP$ , parce que le point  $m$  est le vrai point d'est. Alors dans le triangle  $zAP$ , on peut appliquer la formule [153] démontrée ailleurs qui conduit à cette équation  $\cos.D = \sin.h.\sin.l + \cos.h.\cos.l.\sin.A$ ; & comme  $h$  est zéro, son sinus égale 0, & son cosinus égale 1: cette équation devient donc celle-ci  $\cos.D = \cos.l.\sin.A$ ; c'est-à-dire

que l'amplitude vraie d'un astre connu, dans un lieu déterminé, est toujours le quatrième terme de cette proportion ;  $\cos.l:\cos.D::1:\sin:A$  : ou le cosinus de la latitude d'un vaisseau ; est au sinus de la déclinaison d'un astre, comme le rayon, est au sinus de l'amplitude de cet astre. [Cet arc *am* auroit pu être calculé dans le triangle particulier *amQ*, mais la proportion à faire alors auroit encore été la même].

Supposons que le 23 avril 1787, on ait relevé le soleil couchant à  $19^{\circ} 30'$  au nord de l'ouest magnétique, dans un vaisseau qui étoit par  $30^{\circ}$  de latitude nord &  $50^{\circ}$  à l'ouest de Paris. Si par le calcul indiqué, ou par les tables, l'amplitude vraie du soleil est trouvée de  $14^{\circ} 44'$ , on doit juger qu'elle diffère de l'amplitude observée de  $4^{\circ} 46'$  ; par conséquent le nord de l'aiguille est avancé de cette quantité dans l'ouest du pôle Nord du monde ; c'est-à-dire que la variation est de  $4^{\circ} 46'$  NO.

Ce calcul suppose, comme on l'a déjà dit, que l'astre est placé dans l'horison ; ainsi on ne peut regarder comme exacte la variation qui est conclue de l'observation de l'amplitude magnétique, qu'autant que l'astre a été relevé à la boussole au moment où son centre étoit réellement dans l'horison. Ce moment, pour le soleil par exemple, est celui où son bord inférieur paroît élevé au-dessus de l'horison sensible d'environ les deux tiers de son diamètre ; parce que la réfraction fait paroître dans l'horison les astres qui sont encore de  $33'$  au-dessous de ce plan.

Il faut d'ailleurs savoir que les réfractions horizontales sont aussi incertaines que leur causes sont inconstantes, & qu'il peut en résulter des erreurs sur la mesure de l'amplitude. Ainsi la variation de l'aimant ne peut être déterminée rigoureusement, que lorsque le ciel est pur & l'horison sans nuages. Dans la zone torride, de telles observations méritent, par cette raison, plus de confiance que celles qui sont faites dans les latitudes élevées.

177. Ces inconvénients & l'impossibilité trop fréquente d'apercevoir les astres au moment de leur le-



ver ou de leur coucher, laisseroient souvent aux navigateurs des doutes dangereux sur une des bases les plus essentielles du pilotage, s'il ne leur restoit quelque autre moyen de déterminer la variation de l'aîmant. Ce moyen est l'observation de l'azimuth d'un astre connu. Soit un astre au point  $e$  de son parallèle  $men$  & de son vertical  $zea$ ; son azimuth est l'arc  $Sa$  de l'horison SONE. Ainsi supposons qu'on relève à la boussole l'air de vent, ou le point de la boussole auquel correspond cet astre, lorsqu'il est à la hauteur  $ea$ ; la différence de cet azimuth observé ou magnétique, avec son azimuth réel  $Sa$ , est toujours la variation de l'aîmant.

S'il est facile de relever à la boussole un astre qui est dans l'horison, & presque dans le plan de la rose, il n'en est pas de même lorsqu'il est placé à une certaine hauteur. L'agitation irrégulière que la mer communique à une boussole, & l'extrême difficulté d'assigner sur l'horison la section de ce plan avec le vertical de l'astre, ne permettent pas de faire avec beaucoup de succès les observations des azimuths des astres. On a imaginé, il est vrai, d'armer les boussoles destinées à ces observations, & de pinnules, & d'alidades, pour aider l'observateur à juger de la position du vertical d'un astre; mais on n'a pu réussir à faire disparaître toutes les incertitudes qui sont attachées à ces observations.

Remarquons d'ailleurs que la seule observation de l'azimuth d'un astre ne peut suffire pour la recherche de la variation. Car on doit faire, comme on l'a déjà annoncé, la comparaison de cet azimuth magnétique avec l'azimuth réel de cet astre; & celui-ci ne peut être calculé sans la connoissance de la hauteur réelle  $ea$  de l'astre relevé.

Cet azimuth réel  $aS$  est le supplément de la mesure de l'angle  $ezP$  dans le triangle  $ezP$ , dont on n'est supposé connoître que deux côtés seulement, savoir,  $zP$  le complément de la latitude du vaisseau, &  $Pe$  le complément de la déclinaison de l'astre. Ainsi il faut à la connoissance de ces côtés ajouter celle du côté  $ez$ , en mesurant la hauteur  $ea$ , pour rendre possible le calcul

de ex P. Deux observateurs doivent donc s'accorder parfaitement pour observer au même moment, l'un la hauteur de l'astre en  $e$ , & l'autre son azimuth. Remarquons à ce sujet que si le second observateur, au-lieu de relever directement l'astre, ne s'attachoit qu'à juger à la boussole la direction du plan du sextant; au moment où le premier mesurerait la hauteur de l'astre, il apprécierait peut-être plus sûrement l'azimuth cherché. Car dans le moment de l'observation de la hauteur le sextant est situé véritablement dans le plan vertical qui passe par l'astre. On faciliteroit d'ailleurs un semblable relevement, en garnissant le limbe du sextant de 2 règles un peu longues, qui, appliquées sur ce limbe, prolongeroient le plan du sextant dans sa partie inférieure, & rendroient ainsi plus sensible la position du vertical d'un astre, au moment indiqué de l'observation de sa hauteur.

Il seroit encore possible d'arriver au même but, en garnissant une boussole de deux miroirs parfaitement pareils à ceux du sextant, & dont les centres, placés dans un plan vertical, correspondroient aux deux extrémités d'un des diamètres de la rose. Le petit miroir seroit fixé sur un point du bord de la boîte, tandis que le grand miroir placé du côté opposé, & mobile sur lui même, seroit susceptible de prendre, comme dans le sextant, toutes les positions convenables à l'égard du petit miroir. Celui-ci, semblable à celui du sextant, auroit une partie non étamée, afin que l'image de l'astre qui seroit réfléchi du grand miroir sur le petit, pût être comparée avec l'horison, par un observateur dont l'œil seroit placé à une pinnule vis-à-vis du petit miroir. De tels miroirs, qu'il seroit facile d'adapter ainsi à un compas de variation, rendroient très commode & très-sûre la mesure de l'azimuth d'un astre. On pourroit même par ce moyen suivre un astre dans son mouvement, & juger de son azimuth, au moment précis où un observateur mesurerait sa hauteur.

Quel que soit celui de ces moyens qui fixe le choix d'un navigateur, supposons qu'il connoisse avec précision & l'azimuth magnétique, & la hauteur d'un astre

déterminé. Il faut qu'il calcule ensuite son azimuth réel, ou l'angle  $e\zeta P$ , dans le triangle  $P\zeta e$  dont les trois côtés sont alors connus. Conservons les dénominations précédentes, en nommant toujours  $D$  la distance du centre de l'astre au pôle élevé, & employons la même formule. On a l'équation  $\cos D = \sin h \sin l + \cos h \cos l \cos \zeta$ ; & comme  $\cos \zeta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \zeta$ , ou  $\cos \zeta = 1 - 2 + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \zeta = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \zeta - 1$ , on la transformera en celle-ci  $\cos D = 2 \cos h \cos l \cos^2 \frac{1}{2} \zeta - \cos(h+l)$ ; & enfin par des substitutions déjà indiquées ailleurs, elle deviendra de cette forme,  $\cos h \cos l \cos^2 \frac{1}{2} \zeta = \cos \frac{1}{2}(d+h+l) \cos \frac{1}{2}(h+l-d)$ . Le terme cherché peut donc être trouvé par la proportion suivante [en nommant  $s$  la somme des trois arcs  $d$ ,  $h$  &  $l$ ].  $\cos h \cos l : \cos \frac{1}{2} s :: \cos [\frac{1}{2} s - d] : \cos \frac{1}{2} \zeta$ . Voici une application de cette formule. Un vaisseau étant, le 14 juillet 1787, par  $30^\circ 43'$  de latitude nord, & par  $48^\circ$  à l'ouest de Paris, on a observé à bord la hauteur du soleil, qui corrigée étoit de  $7^\circ 43'$ , & au même moment on a relevé au compas le centre de cet astre, qui a paru correspondre à  $62^\circ$  dans l'ouest du nord de l'aiguille. On demande quelle devoit être à cette époque & en ce lieu, la variation de l'aimant. [la distance du soleil au pôle  $N$  étoit de  $67^\circ 8'$ ].

On doit faire cette proportion.

$$\begin{array}{l} \cos l [30^\circ 43'] \cos h [7^\circ 43'] \dots \left\{ \begin{array}{l} C. 0,0656512 \\ C. 0,0039508 \end{array} \right. \\ : \cos \frac{1}{2} s [52^\circ 47'] \dots \dots \dots 9,7816339 \\ :: \cos [\frac{1}{2} s - d] [14^\circ 21'] \dots \dots \dots 9,9862340 \\ : \cos \frac{1}{2} \zeta^2 \dots \dots \dots 19,8374699 \\ \cos \frac{1}{2} \zeta (33^\circ 58' 10'') \dots \dots \dots 9,9187349 \end{array}$$

L'angle azimuthal  $\zeta$  est donc de  $67^\circ 56' 20''$ , & l'azimuth magnétique étant de  $62^\circ$ , leur différence  $5^\circ 56' 20''$  est la variation NO de l'aiguille : car le nord de celle-ci étoit au moment de l'observation dans l'ouest du pôle nord du monde, de  $5^\circ 56' 20''$ .

Nous remarquerons enfin que les observations des azimuths doivent, autant qu'il est possible, être faites lorsque l'astre est ou dans le premier vertical ou peu éloigné de ce cercle. Alors son mouvement en hauteur est très-rapide, & son mouvement en azimuth très-lent; ainsi on peut plus facilement observer la position de son vertical ainsi que la hauteur de l'astre, & en conclure plus exactement, non seulement son azimuth vrai; mais aussi la déclinaison réelle de l'aimant.

178. Lorsqu'un vaisseau se trouve à la vue d'une pointe de terre, ou d'une île, ou d'une montagne, ou d'un rocher, &c; dont il est important de connoître le gissement, & dans un moment où il devient nécessaire de déterminer avec précision la déclinaison de l'aimant; on peut y parvenir par des observations de distances, ainsi que d'azimuths, & par des relevemens. En effet soit  $i$  (fig. 100. G) le lieu du soleil, lorsque une île paroît en  $n$ , dans l'horizon  $Qq$  d'un observateur dont le zénith est  $z$ . L'azimuth de l'île est l'arc  $noq$  (parce que  $Qzq$  est le méridien du lieu), & celui du soleil est  $oq$ . Le pôle élevé  $P$  étant le pôle nord, le soleil est supposé au midi de l'île; & pour connoître la variation de l'aimant, il faut comparer l'arc  $noq$  qui est l'azimuth réel de l'île, avec l'azimuth magnétique du même point. Cet arc  $noq$  est composé de l'azimuth  $oq$  du soleil & d'un arc  $on$  qui est la mesure de l'angle  $nzi$ . L'un doit être calculé dans le triangle  $Pzi$ ; ce qui ne peut se faire qu'autant qu'on connoît & le complément  $zP$  de la latitude du lieu, & le complément  $Pi$  de la déclinaison du soleil, & le complément  $zi$  de sa hauteur. De même le calcul de  $no$ , ou de l'angle  $nzi$ , dans le triangle  $nzi$ , exige qu'on connoisse les trois côtés de ce triangle, qui sont, le premier  $zi$  déjà désigné, le second  $zn$  qui est le complément de la hauteur de l'objet relevé, & enfin le troisième  $ni$  qui est la distance de cet objet au soleil.

On voit donc que dans cette recherche trois observateurs doivent se réunir pour observer au même moment, l'un la hauteur du soleil, l'autre la distance de cet astre à un point de l'île supposée, & le dernier l'air

de vent de la boussole sur lequel est placé le point comparé de la même île. Employant ensuite les dénominations précédentes, & supposant de plus que l'angle  $nzi$  est représenté par  $O$ , la distance  $ni$  par  $n$ , & le complément de  $zn$  par  $m$ , on a l'équation suivante, dans le tri.  $Pzi$ ,  $\cos.D = \sin.h.\sin.l. + \cos.h.\cos.l.\cos.z$ , ou  $\cos.h.\cos.l.\cos.\frac{1}{2}z^2 = \sin.\frac{1}{2}[h^2 + l^2 - D]\sin.\frac{1}{2}[h^2 + l^2 + D]$ . Les trois côtés du triangle  $zni$  étant connus, on détermine l'angle  $nzi$  par une pareille équation, & on a  $\cos n = \sin.m.\sin.h + \cos.m.\cos.h.\cos.o$ ; mais en supposant que le point de l'île qui est relevé à la boussole & comparé au soleil, est au niveau de la mer, alors sa hauteur  $m$  est nulle;  $\sin m = 0$  &  $\cos.m = 1$ : donc l'équation précédente se change alors en celle-ci  $\cos.n = \cos.h.\cos.O$ . D'ailleurs si l'objet observé étoit élevé au-dessus de l'horison, sa hauteur mesurée seroit la valeur de  $m$ , & l'angle  $nzi$  seroit alors calculé par la formule générale.

L'exemple suivant va présenter l'application de ces regles utiles. Un vaisseau étant par  $30^{\circ} 35'$  de latitude sud, & à la vue d'un cap qui se montre au niveau de la mer, on observe simultanément; 1.<sup>o</sup> la hauteur  $34^{\circ} 17'$  du bord inférieur du soleil qui paroît dans l'est du méridien, avec une déclinaison de  $7^{\circ} 20'$  nord; & 2.<sup>o</sup> la distance  $65^{\circ} 30'$  de ce cap au bord le plus voisin de l'astre; 3.<sup>o</sup> ce cap est relevé à  $62^{\circ} 30'$  du sud de l'aiguille de la boussole dans la partie de l'est. On demande & la variation de l'aimant & le véritable gisement de ce cap.

La hauteur apparente du centre du soleil est de  $34^{\circ} 33'$ , parce qu'au moment de l'observation, il a un demi-diamètre de  $16'$ , & sa distance au cap est de  $65^{\circ} 46'$ . Comme le cap est supposé à fleur d'eau, sa hauteur  $m$  est nulle, & on doit trouver par cette proportion  $\cos.h[34^{\circ} 33'] : \cos.n[65^{\circ} 46'] :: 1 : \cos.o$ , que la valeur de  $o$  ou de  $nzi$  est de  $60^{\circ} 7'$ . (Les arcs qui entrent dans cette proportion sont employés sans être corrigés, de la réfraction, de la parallaxe, & de la dépression de l'horison; parce que leurs effets n'étant sensibles que dans le vertical de l'astre, ne changent pas la

valeur de l'angle  $nzi$ ]. L'angle azimuthal  $Pzi$  est ensuite calculé lorsqu'on a corrigé, comme à l'ordinaire, la hauteur apparente du soleil. Ces corrections s'élèvent à  $6'$ , & la hauteur réelle du centre du soleil est par conséquent de  $34^{\circ} 27'$ . Le résultat de la formule présentée précédemment est donc que l'angle  $Pzi$  étoit de  $125^{\circ} 49'$ . Remarquons actuellement que l'azimuth vrai du cap relevé est l'arc  $Qn$  ou la différence des arcs  $Qo$  &  $on$ : sa valeur est donc de  $65^{\circ} 42'$ ; c'est-à-dire qu'au moment où l'astre a été observé du vaisseau, il répondoit au  $SE\frac{1}{4}E$   $9^{\circ} 27'$  E. Le relevement qui a été supposé en être fait à la boussole, le plaçoit à  $62^{\circ} 30'$  du sud de l'aiguille du côté de l'est; par conséquent la différence  $3^{\circ} 12'$  est la quantité dont le pôle sud de l'aimant est dans l'est du pôle sud du monde, ou la variation est de  $3^{\circ} 12'$  NO.

Cette méthode de déterminer en mer & le gissement d'un point quelconque, & la variation de l'aimant, a des applications aussi nombreuses qu'elles sont utiles, & elle mérite particulièrement l'attention des navigateurs. A terre, comme nous l'avons dit, une ligne méridienne tracée exactement sur un plan sert à corriger les relevemens faits à la boussole, & comme il est à-propos que les navigateurs connoissent la manière de décrire cette ligne, nous allons présenter quelques vues générales sur cet objet.

On fait qu'un astre, depuis le moment de son lever en  $m$  (fig. 55) acquiert toujours plus de hauteur à mesure qu'il s'approche du méridien  $zus$ ; & qu'après son passage à ce dernier cercle, sa hauteur diminue de la même manière jusqu'à son coucher  $n$ . On fait aussi [fig. 36] que les ombres d'un corps qui est éclairé par le soleil, sont toujours égales toutes les fois que cet astre a une même hauteur au-dessus de l'horizon, & que le centre de chacune de ces ombres est dans le vertical qui passe par les centres de ce corps & du soleil. Ainsi du point  $o$  comme centre, soit décrite sur un plan horizontal  $BDCE$  une circonférence  $cibqmq$ , & soit planté verticalement en ce point  $o$  un stile  $ao$ . Après ces préliminaires, supposons qu'on marque avant

midi le point *b* de cette circonférence où paroît se terminer l'ombre *ob* du stile *oa*; & qu'après le passage du soleil au méridien, on marque aussi le point *c* de la même circonférence, qui est l'ombre du sommet *a* du même stile *oa*. Le milieu *i* de l'arc *bc* & le centre *o* de la circonférence doivent alors être deux points de la méridienne qu'on se propose de tracer sur ce plan, (en supposant néanmoins que dans l'intervalle des observations du matin & du soir, la déclinaison du soleil n'a pas changé sensiblement). En effet on fait que dans le triangle *Pze* (fig. 55) la valeur de l'angle *z* est donnée par la formule générale,  $\cos.D = \sin.L \sin h + \cos.L \cos h \cos.z$ . Cette équation démontre donc que dans un même lieu, & le soleil conservant une même déclinaison, les valeurs de l'angle *z* sont égales toutes les fois que la hauteur du soleil est la même; par conséquent les longueurs des ombres observées [fig. 36] étant égales avant & après midi, l'arc *bc* qui les sépare doit être le double de l'azimuth que le soleil a dû avoir au moment de chaque observation. le milieu de cet arc doit donc indiquer le point *i* vers lequel étoit dirigée l'ombre *oi* du stile, lorsque le soleil étoit dans le méridien, ou la position *iom* de la ligne méridienne cherchée. On voit qu'une telle ligne étant ainsi tracée, on peut juger aisément si une aiguille aimantée a la direction du méridien terrestre, ou si elle s'en écarte; & dans ce dernier cas, on peut mesurer non-seulement sa déclinaison, mais aussi reconnoître dans quel sens elle a lieu.

179. *Flux & reflux de la mer.* L'astronomie est non seulement utile aux navigateurs pour rectifier les erreurs de leur estime, & pour indiquer leur position au milieu des mers les plus étendues, mais elle peut encore les guider & les diriger, lorsqu'à leur approche des côtes, ils ont besoin pour les aborder avec sûreté, de la connoissance des marées. Car elle peut servir à trouver le tems où les eaux doivent affluer abondamment sur ces rivages, & ceux où ils doivent réfluer des ports vers la mer.

Tous les hommes qui habitent les côtes de l'océan ou des grandes mers, ont remarqué, sous le nom de

flot & de jusant, des courans reguliers, périodiques, & plus ou moins rapides, qui chaque jour élèvent & abaissent les eaux de la mer à l'égard de leur niveau naturel. Ces mouvemens & leurs variétés ont été observés de tout tems dans des mers vastes & libres, telles que celles du nord, du sud & de l'Inde; mais on ne les connoît pas, ou ils se montrent foiblement dans les mers petites & étroites, telles que les mers Méditerranée, Caspienne & Baltique. Par-tout où les marées sont sensibles, leur regularité & leurs retours périodiques ont frappé tous les observateurs. Tous ont remarqué que le moment de la haute mer est toujours le même à chaque pleine ou nouvelle lune; & c'est ainsi qu'appuyés sur une longue expérience, ils ont reconnu que ces mouvemens de la mer ont des relations constantes avec ceux de la lune.

Ces rapports de concordance ne peuvent être qu'indiqués ici, & nous ne pouvons faire connoître à présent que le rapport des mouvemens de la lune avec les marées de toutes les mers. Ailleurs nous expliquerons (autant qu'il peut être convenable à l'instruction de tout homme de mer) pourquoi chaque jour il y a deux flux & deux reflux, pourquoi les eaux s'élèvent plus haut aux époques des nouvelles & pleines lunes que dans toute autre position de cet astre; pourquoi parmi ces dernières grandes marées, celles des équinoxes sont les plus considérables; pourquoi dans certains parages les courans des marées ont des directions si différentes des directions générales; pourquoi les hauteurs des marées different si étrangement dans divers points du globe; pourquoi enfin l'heure de la pleine mer aux nouvelles & pleines lunes, ou l'établissement des ports, est variable suivant les rivages des mers. Ici nous devons nous circonscrire dans des bornes établies par les convenances, & nous ne devons considérer que les rapports des marées avec l'astronomie, pour l'utilité de la navigation.

Un vaisseau est-il devant une côte ou un port? il est important que l'heure de la haute mer à un jour proposé soit connue du navigateur qui le dirige, soit pour profiter du courant de la marée, soit pour juger



exactement de son influence sur la route prolongée de ce vaisseau; & l'astronomie fournit le moyen de remplir ces vues.

Déjà nous avons dit que l'heure de la haute mer dans un port quelconque, est toujours la même aux jours de pleine & nouvelle lune. L'Expérience a prouvé aussi que le moment de la pleine mer retarde assez régulièrement d'un jour au suivant, depuis la conjonction jusqu'à l'opposition de la lune, ou depuis la nouvelle lune jusqu'à la pleine lune suivante. Après avoir ainsi annoncé les mouvemens de la mer, comparons les avec ceux de la lune. Cet astre tourne réellement autour de la terre, indépendamment de son mouvement apparent & journalier (qui est relatif à la rotation du globe sur lui-même); & si le tems de sa révolution absolue, ou à l'égard des étoiles, est de 27 j. 7 h. 43' 12'', il s'écoule un intervalle de tems plus considérable entre deux pleines lunes ou deux nouvelles lunes consécutives. Cette dernière révolution est de 29 j. 12 h. 44' 3''; c'est-à-dire que si dans un certain jour du mois, la lune passe au méridien d'un lieu en même tems que le soleil, elle ne se trouve avec lui au même méridien, qu'après environ 29 jours & demi. Son passage au méridien, à chaque jour intermédiaire, retarde aussi sur le soleil; & de tout le tems qu'il faut à celui-ci pour parcourir dans le ciel, par son mouvement diurne, un arc de  $12^{\circ} 11' 27''$ , qui est le mouvement moyen relatif & diurne de la lune à l'égard de cet astre. Ce tems est de  $48' 45'' \frac{4}{5}$ , ou à-peu-près de 49' (toutes ces quantités sont moyennes parce qu'elles sont les seules qu'on puisse employer dans des regles générales).

Remarquons actuellement que l'intervalle de tems qui sépare une nouvelle & une pleine lune qui se suivent est d'environ 15 jours; que les retards journaliers des marées, pendant ces 15 jours, sont à peu près uniformes & réguliers, & qu'ils forment ensemble une somme de 12 h. Par conséquent le retard moyen de la marée d'un jour sur celle du jour précédent, doit être de 49' à-peu-près. Ce retard est donc à-peu-près égal à celui du passage de la lune au méridien (dans un certain jour) sur le pas-

sage du même astre qui a eu lieu le jour précédent. Cependant cette correspondance n'est pas telle que l'heure de la pleine mer dans un port soit exactement celle du passage de la lune au méridien de ce port. Car alors l'établissement seroit le même pour chaque port, & il seroit indiqué par l'heure de midi, ce qui est contraire à toutes les observations des hommes de mer, & sur-tout à celles des inégalités bizarres qu'on a remarqués dans les établissemens des ports de différentes côtes.

Les réflexions précédentes conduisent ainsi à deux méthodes propres à être employées pour déterminer l'heure moyenne de la marée à un jour donné; dans un port indiqué. On peut la trouver, en ajoutant à l'heure de l'établissement de ce port, soit autant de fois 49' qu'il y a de jours écoulés à cette époque, depuis la dernière nouvelle ou pleine lune; soit l'heure du passage de la lune au méridien de ce port.

Les almanachs nautiques facilitent de telles opérations: car ils indiquent & les époques des nouvelles & pleines lunes ou des sygygies, & l'heure des passages de la lune aux méridiens soit de Paris soit de Londres, &c. Ainsi supposons qu'un navigateur soit intéressé à savoir l'heure de la pleine mer à un jour donné, dans un port dont l'établissement est connu. S'il consulte la connoissance des tems, il y trouve l'heure qu'on comptoit à Paris le jour auquel est arrivée la dernière sygygie; alors si le port proposé est sous le méridien de Paris, il doit multiplier 49' par le nombre des jours écoulés, depuis cette sygygie, & la somme de ce produit ajouté à l'établissement du port proposé, est l'heure moyenne de la pleine mer dans ce même port. Mais si ce port est dans l'est ou dans l'ouest de Paris, l'heure de la syzygie annoncée pour Paris n'est pas l'heure qu'on comptoit dans ce port à la même époque, & on la connoît par la différence des longitudes de ces deux lieux, qu'on réduit en tems, à raison de 15° par heure. Par ce moyen, on peut juger la distance qui sépare le moment pour lequel on calcule la marée de celui de la dernière syzygie. Mais il ne suffit pas de savoir calculer ainsi l'heure de la pleine mer à un jour donné

donné dans un port proposé, il faut aussi, pour faire une application convenable d'un tel résultat, connoître l'heure qu'on compte dans ce port, au moment où toute autre circonstance peut permettre de l'aborder; on la détermine par l'observation de la hauteur d'une étoile ou du soleil, étant connues d'ailleurs, & la déclinaison de l'astre observé, & la latitude du lieu.

Un navigateur peut ne pas employer dans cette recherche l'âge de la lune, ou l'époque de la syzygie qui est la plus voisine du jour pour lequel il calcule la marée. Car s'il fait l'établissement, ainsi que la position du port proposé, il peut recourir à un autre moyen pour trouver, avec plus de précision que par la première méthode, l'heure de la pleine mer. Il doit chercher à connoître l'heure du passage de la lune au méridien de ce port pour le jour donné, parce que la somme de l'heure de ce passage & de celle de l'établissement, doit être l'heure de la pleine mer dans ce port. Sait-il par les tables l'heure du passage de la lune au méridien de Paris, il doit calculer celle de son passage au méridien du port dont la longitude est donnée. Il faut donc qu'il fasse cette proportion; 24 h. sont à la différence des longitudes de Paris & du port, comme la différence des passages consécutifs de la lune au méridien de Paris, ou d'un jour à l'autre, est à un nombre de minutes & de secondes, qui est la différence des heures qu'on doit compter aux momens des passages de la lune aux méridiens de Paris & du port. En effet, si la lune emploie 24h. 48' de tems à revenir d'un jour à l'autre au méridien de Paris, & par conséquent à parcourir 360°, il lui faut, pour s'avancer du méridien de Paris à celui du port, un tems qui est proportionnel à la différence des longitudes des lieux.

Cette différence des momens des passages étant calculée par la proportion indiquée, doit être ensuite ajoutée à l'heure du passage de la lune au méridien de Paris, si celui-ci est dans l'est du port, ou elle doit en être retranchée, s'il est dans l'ouest; & la somme ou la différence de ces quantités est l'heure du passage de la lune au méridien du port. Enfin la somme de l'heure

de ce passage & de l'établissement, est l'heure de la pleine mer dans le port proposé. Le navigateur, après ces premiers calculs, doit en faire aussi pour s'assurer de l'heure qu'on compte dans ce port, ou à bord de son vaisseau, à l'époque où il se propose de l'aborder; & ce n'est qu'avec toutes ces connoissances qu'il peut choisir le moment convenable pour remplir sans inconvénient un projet dont l'exécution dépend de la marée.

Les heures des marées qui sont ainsi calculées ne sont pas les heures réelles auxquelles elles arrivent surtout aux quadratures, & on trouve dans les tables les corrections qu'on doit faire à ces premiers résultats, pour parvenir à de plus justes. Cependant elles peuvent suffire pour les besoins ordinaires de la navigation. D'ailleurs le calcul le plus rigoureux ne conduit pas même à déterminer la minute de l'heure de la pleine mer, telle que la nature l'indique dans les divers points des mers. Car les vents & les courans y produisent des variétés très-irrégulières, par leur force & leur direction; & nous en citerions des exemples si nous parlions des causes générales & des circonstances particulières des marées.

Un navigateur se propose-t-il de déterminer l'établissement inconnu d'un port où il relâche? il lui suffit d'observer le moment d'une seule marée, même dans toute autre époque que celle d'une syzygie, pour conclure cet établissement, en observant d'ailleurs le passage de la lune au méridien, ou en déterminant le moment de ce passage par des observations convenables. Car la différence de l'heure de la pleine mer, à l'heure de ce passage, est toujours l'heure très-approchée de l'établissement d'un port. Le tems dont nous parlons est toujours celui qu'on compte dans le port supposé. C'est pourquoi on le mesure avec une montre bien réglée, ou on le connoit en observant la hauteur du soleil ou de quelque étoile, comme on l'a dit précédemment.

Si les circonstances ne permettent pas d'observer le moment où la lune passe au méridien, il faut calculer ce moment, qu'on détermine aisément, lorsqu'on con-

DE L'HOMME DE MER. 435  
noit d'ailleurs la longitude de ce port à l'égard de Paris, & la forme d'un tel calcul a déjà été indiquée.

Dans le cas où la lune seroit sur l'horifon au moment de la pleine mer, il suffiroit d'observer la hauteur de cet astre. On concluroit son angle horaire, ou sa distance au méridien du lieu; & cette distance réduite en tems, à raison de 15, 5 deg. par heure, seroit à-peu-près l'heure de l'établissement du port supposé.

Si nous avons dit qu'on doit observer la hauteur de la lune pour déterminer sa distance au méridien du lieu, c'est parce que dans le triangle  $zPe$ , formé par des arcs menés du pôle  $P$  & du zénith  $z$  à la lune qui est en  $e$ , on connoît alors les trois côtés: car le complément  $zP$  de la latitude est supposé donné; le complément  $Pe$  de la déclinaison de la lune peut être aussi calculé & d'après la longitude estimée du port à l'égard de Paris, & d'après la déclinaison que les tables indiquent pour Paris. Ainsi la hauteur  $ea$  de la lune étant observée, on peut calculer dans le triangle  $zPe$ , l'angle horaire  $zPe$  de cet astre. Remarquons que la valeur de cet angle est d'autant plus exacte que la longitude attribuée à ce port est mieux établie.

On réduit cet angle en tems, d'abord à raison de 15 degrés par heure, & on trouve ainsi à-peu-près de combien d'heures & de minutes la lune, au moment de l'observation, ou au moment de la pleine mer, étoit éloignée du méridien du lieu. Mais cet intervalle de tems doit être calculé exactement, ainsi il faut chercher combien cet astre doit varier en ascension droite pendant qu'il parcourt la mesure de l'angle horaire trouvé, & l'ajouter à cet angle, ou l'en retrancher, selon que ce mouvement tend à approcher ou à reculer la lune du méridien du lieu.

Par exemple; un vaisseau étant dans un port dont la latitude nord est de  $15^{\circ} 10'$ , & la longitude estimée à l'ouest de Paris de  $45^{\circ} 30'$ ; on a observé dans la soirée du 21 avril 1787, & au moment de la pleine mer, la hauteur de la lune. On a trouvé que la hauteur réelle de son centre étoit de  $42^{\circ} 9'$ ; & son angle horaire, en supposant sa déclinaison de  $24^{\circ} 24'$  nord au mo-

ment de l'observation, a été trouvé de  $50^{\circ} 10' 30''$  ou de, 3 h.  $20' 42''$ . La pleine mer étoit donc arrivée dans ce port lorsque la lune étoit à cette distance du méridien. Cependant ce resultat n'est pas parfaitement exact; car pendant ces 3 h.  $20' 42''$  la lune par son mouvement en ascension droite, s'étoit rapprochée du méridien du lieu de  $2^{\circ} 14'$ ; le moment du passage de la lune à ce méridien étoit donc plus éloigné du moment de l'observation qu'il n'est indiqué par les 3 h.  $20' 42''$ , & cet excès est égal au tems qu'il faut à  $2^{\circ} 14'$  de la sphere céleste pour passer au méridien, c'est-à-dire qu'il est de  $81' 56''$ . La pleine mer est donc arrivée dans ce port à 3 h.  $29'' 38''$  après le passage de la lune au méridien du lieu, & c'est l'établissement de ce port.

C'est ainsi que, par des observations astronomiques, choisies & convenables aux circonstances, les navigateurs peuvent parvenir dans tous les tems à déterminer d'une maniere très-approchée, ou l'établissement d'un port, ou l'heure de la marée (à un jour donné), lorsque l'établissement est connu.

Si un vaisseau est porté sur une terre nouvelle dont l'existence étoit ignorée, l'analogie doit alors servir de guide à l'homme de mer, pour estimer & l'heure de la marée sur cette île, & la force, & la direction, & l'étendue d'un tel courant. Il doit comparer la situation de cette terre, à celle de toutes les côtes connues; & dans ce parallèle il doit avoir égard non-seulement à la grandeur des mers environnantes, mais aussi à la distance, comme à l'exposition des grands continens les plus voisins. C'est par de telles comparaisons qu'il peut juger des marées qui doivent se faire sentir dans un port inconnu. Par exemple, si ce port est peu ouvert à la grande mer, s'il est placé sur la côte occidentale ou d'Europe, ou d'Afrique, depuis la Manche jusqu'au cap de Bonne-espérance; on pourroit prononcer d'après les établissemens des autres ports de cette côte, que la pleine mer doit y avoir lieu environ 3 h. après le passage de la lune à son méridien.

Si le port supposé inconnu étoit situé sur la côte orien-

tale d'Amérique, l'expérience conduiroit à penser que le moment de la pleine mer ne doit pas y arriver plutôt que 5 h. après le passage de la lune au méridien, tandis que sur la côte occidentale du même continent les heures des marées sont à-peu-près telles qu'on les observe sur la côte occidentale des continens de l'Europe & de l'Afrique. Dans la Manche, & jusques à l'extrémité de la mer d'Allemagne, il y a de trop grandes variétés entre les heures des marées pour les présenter sous un point de vue général: car sur cet espace des différences considérables sont placées à de si petites distances, qu'il est des points de ces bras de mer pour lesquels l'établissement est de 4 h., tandis que pour d'autres il est de 12 h. Ces différences étonnantes proviennent de ce que dans ces parages deux marées se combattent & se combinent ensemble. Toutes deux viennent de l'océan, & tandis que l'une s'avance par la Manche, l'autre qui se jette dans la mer d'Allemagne en passant à travers les îles Shetland, Ferro, &c. vient contrarier les effets de la première. Le canal de Bristol offre les mêmes phénomènes. Dans les mers de l'Inde les marées sont foibles, mais les courans sont très-rapides & ils varient d'ailleurs en raison de la situation des côtes ainsi que du cours des moussons. D'ailleurs dans ces mers & dans celle du sud les observations ont été peu nombreuses, mais lorsqu'elles auront été multipliées sur plusieurs points, & faites avec toute la précision nécessaire, leur recueil servira à juger avec approximation des marées qui peuvent avoir lieu dans un port, ou dans une île, dont l'établissement seroit inconnu. L'expérience & l'astronomie peuvent donc se prêter mutuellement des secours importants que l'homme de mer doit savoir employer & diriger, non séparément, mais concurremment, pour exercer la navigation, avec autant de sûreté que de succès.

---





# LA SCIENCE

D E

## L'HOMME DE MER.

### SECTION QUATRIEME.

#### M É C A N I Q U E.

180. **L**A science nommée *mécanique*, a pour objet les effets de toutes les puissances naturelles, qui, par une action immédiate, ou à l'aide de machines, sont susceptibles de produire, d'altérer, ou de détruire le mouvement d'un corps quelconque. Elle considère ces effets, soit dans un état isolé, soit dans un état de combinaison. Elle embrasse ainsi les mouvemens de tous les genres, leur direction, leur mesure, leurs rapports, & leurs loix; non-seulement lorsqu'ils se déploient librement, mais aussi lorsqu'ils sont contrariés, lorsqu'ils tendent seulement à naître & lorsque des machines servent à les modifier, ainsi qu'à les varier.

L'homme de mer, ne peut donc exercer son art avec un succès assuré, s'il ne possède cette science utile. Car sans celle il est entouré de puissances diverses, dont l'action s'exerce sur le vaisseau dont il dirige la marche : & leurs effets, importent non-seulement à sa sûreté, mais aussi à l'heureuse exécution de ses projets. La gravité,

par exemple , tend constamment à précipiter au fond de la mer les bâtimens flottans , tandis que la pression de l'eau repousse ces corps vers la surface. Le vent les presse de s'avancer dans l'espace , & l'eau par sa résistance modere l'effet de cette action. Des courans , des lames , les frappent , les entraînent sur diverses directions ; & d'autres forces servent , soit à détruire ces impulsions , soit à produire d'autres effets qui deviennent favorables ou contraires. L'action du vent ou de l'eau est employée à communiquer du mouvement aux bâtimens de mer ; c'est pourquoi des moyens mécaniques sont devenus nécessaires pour cette communication , & un homme de mer doit savoir en faire usage , pour augmenter ou diminuer au besoin les effets de ces causes , comme pour les rendre toujours convenables aux circonstances. Ces moyens sont des mâts , des vergues , des voiles , des cordages , des poulies , des ancres , des rames , un gouvernail , &c. Enfin un vaisseau pour être propre à certaine destination connue , doit être doué de plusieurs qualités essentielles ; & sa forme , ainsi que sa solidité , & l'arrangement de toutes les parties qui le composent , ou dont il est chargé , ne peuvent être déterminés , que par la connoissance des puissances qui doivent agir sur lui au milieu des mers ; ainsi que par celle de leur influence relative , dans toutes leurs combinaisons possibles.

Les applications de la mécanique , s'étendent donc par des ramifications infinies , à la figure de la carene des vaisseaux , à leur chargement , à l'art de la manœuvre ; & de telles relations , en indiquant ainsi le caractère , les objets & les limites de la mécanique de l'homme de mer , prescrivent en même tems , tout ce qui doit être discuté dans ce traité , c'est-à-dire , tous les principes de cette science , dont l'usage peut être utile ou nécessaire à la marine.

181. L'ordre méthodique exige que nous considérions d'abord , dans un certain état d'abstraction , les effets possibles , isolés , ou combinés de puissances quelconques ; c'est-à-dire sans égard à la nature , & de ces puissances , & des corps sur lesquels elles agissent. Ensuite nous chercherons ceux que doivent produire les forces physiques qui nous sont connues dans la nature , en faisant

les applications nécessaires des premières considérations abstraites. Il sera facile alors d'en conclure, en général, (autant que l'état actuel de la science de la mécanique peut le permettre) les effets variés de l'action du vent; les loix, de la résistance, de la pression, & de l'impulsion de l'eau; la forme de la carene; & les bases, de la stabilité des vaisseaux, ainsi que des autres qualités qui leur sont essentielles, telles que celles de bien marcher, de peu dériver, de gouverner facilement, & de faire des oscillations douces & régulières. Il sera facile aussi d'indiquer les règles, de l'arrimage, de la mâture, de la voilure, de la figure des ancres; les dispositions les plus avantageuses de tous les cordages qui font partie du gréement, & enfin tous les grands préceptes de l'art, de manœuvrer ou de mouvoir un vaisseau, de le diriger, de le gouverner; de modérer sa vitesse progressive, de l'altérer, de la détruire; & de produire comme de modifier convenablement toutes sortes de mouvemens de rotation. C'est ainsi par conséquent, que nous établirons solidement les fondemens nécessaires du traité complet de l'art de la marine.

182. *Des forces en général.* On n'a pu, jusqu'à présent, parvenir à connoître quelle est la nature du mouvement dont les corps nous paroissent animés. On ignore comment une vitesse quelconque leur est communiquée; mais on sait, que le mouvement existe dans l'univers, qu'il est varié dans sa grandeur comme dans sa direction, qu'il s'altère, qu'il s'éteint, & qu'il reçoit aussi des accroissemens & des diminutions plus ou moins considérables, puisque nous voyons des corps transportés dans divers sens & avec différente vitesse, des lieux qu'ils occupent, dans de nouveaux lieux de l'espace. Supposons donc qu'il est dans la nature un mode invariable pour la communication du mouvement; & donnons le nom de *forces* à toutes les causes qui peuvent changer l'état des corps. étendons aussi ce même nom à d'autres causes qui sont capables, ou d'empêcher le mouvement de naître, ou de le retarder par des degrés plus ou moins sensibles. Parmi toutes ces causes, il en est qui ont en elles-mêmes un principe d'action, & qui se déployant sans obstacle,

communiquent du mouvement à un corps. Telles sont la gravité, le vent, les courans, &c. Il en est d'autres qui ne sont que des obstacles au mouvement, & dont l'existence ainsi que l'énergie sont absolument nulles lorsque le mouvement n'a pas lieu. Celles-ci ne tendent qu'à diminuer & à éteindre la vitesse des corps, par-tout où elle peut devenir sensible. Telles sont la résistance de l'eau, le frottement, &c.

Si ces dernières causes ont aussi reçu le nom de *forces*; si on leur attribue ce caractère de ressemblance avec les puissances qui ont une énergie propre, c'est qu'elles ne peuvent être comparées les unes ainsi que les autres, que par les effets qu'elles produisent & jamais par l'intensité de leur action. Cependant il est à propos de distinguer les dernières par le titre particulier de *forces motrices*, en donnant aux autres celui de *forces résistantes*.

183. Le mouvement d'un corps ne se manifeste que par sa translation d'un lieu dans un autre de l'espace. Ainsi il ne peut être apprécié qu'en comparant, les positions changeantes d'un tel corps, à des points fixes & déterminés. De telles recherches, pour être simples, n'auront pas d'abord pour objet, les corps tels que la nature les présente à nos sens, mais seulement les parties élémentaires des corps. Nous pouvons regarder en effet une masse solide quelconque comme un assemblage de corpuscules qui sont, & séparables les uns des autres, & susceptibles d'avoir ou un même mouvement, ou une vitesse différente; & chaque corpuscule peut être considéré comme l'*unité* qui sert à mesurer la masse d'un corps quelconque.

Dans cet état supposé des choses, souvenons-nous d'avoir démontré (154) que le lieu d'un point dans l'espace est indiqué par ses distances à trois lignes, qui perpendiculaires entr'elles, se rencontrent en un point commun. Ainsi en comparant un corpuscule à de telles lignes, on peut juger, par la constance, ou par la variation de ses distances à ces *axes*, soit de son repos, soit de son mouvement relatif ou réel, soit enfin de la direction, comme de la grandeur de la vitesse dont il est animé.

Si un corpuscule n'a été & n'est sollicité au mouvement par aucune force motrice, il doit être dans un parfait repos, & il doit même y persévérer puisqu'il ne peut de lui-même se donner aucune vitesse. Alors il ne cesse d'être placé à une même distance de tous les points fixes de l'espace. Mais supposons qu'il soit poussé par une force, qui exerce sur lui une action instantanée, & qui après cette impulsion l'abandonne à lui-même, alors il doit s'avancer progressivement dans l'espace. Il doit changer, de lieu, & de distance aux points fixes environnans. Son mouvement ( que de lui-même il ne peut modifier en aucune manière ) doit le porter successivement sur divers points d'une même ligne droite; & il doit parcourir, sur cette ligne, pendant des tems égaux, des parties dont la longueur est la même. Ensuite nulle cause n'étant supposée faire varier cet état de mouvement, parce qu'aucune force nouvelle ne vient agir sur ce corpuscule; sa vitesse, qui est indiquée par l'espace qu'il parcourt pendant un tems déterminé, doit être constante & n'éprouver aucun changement, soit dans sa grandeur, soit dans sa direction.

La vitesse, qui est communiquée à un corpuscule par une force instantanée, doit donc être constante, uniforme, & rectiligne; lorsque cet effet n'est contrarié ni par des obstacles, ni par d'autres forces particulieres & incidentes. Remarquons aussi que plus cette vitesse est rapide, plus aussi est étendu l'espace parcouru par le corpuscule dans un intervalle de tems donné. Ainsi pour comparer les vitesses des corps, il faut ne considérer leur mouvement que pendant une portion de la durée, telle qu'une seconde, qui sera prise pour *unité*; car alors l'espace parcouru par chaque corpuscule pendant cette unité de tems, dévient une mesure sensible, indicative & commode de la vitesse de chacun de ces points solides. Représentons par  $u$  cette petite partie de l'espace, qui est parcourue dans l'unité de tems, & qui est nommée la vitesse du corpuscule. Soit aussi  $e$  l'espace parcouru pendant un tems  $t$ , qui est un nombre d'unités de tems ou de secondes. Alors si on considère que l'uniformité de la vitesse du corpuscule consiste en ce que la route faite par ce point solide pendant un

tems  $t$ , n'est autre chose que celle qu'il fait dans une seconde, & qui est répétée autant de fois qu'il y a de secondes dans  $t$ ; on est conduit à cette proportion,  $u : e :: 1 : t$  ainsi  $ut = e$ ; c'est à dire que la vitesse uniforme d'un corpuscule est toujours égale à l'espace qu'il parcourt dans un temps déterminé, multiplié par le rapport de l'unité de tems, au tems donné. Cette égalité convient à toute sorte de mouvemens uniformes, & sa généralité permet de comparer ensemble les vitesses différentes de corpuscules égaux. En effet, si cette équation, pour le mouvement uniforme d'un certain corpuscule, est représenté par  $e = ut$ , tandis que pour un autre elle est  $E = VT$ ; alors on peut dire,  $ut : VT :: e : E$ . Les espaces  $E$  &  $e$  (parcours uniformément par deux corpuscules qui sont sollicités au mouvement par des forces motrices différentes) sont donc dans le rapport composé, & de celui des vitesses & de celui des tems employés à parcourir ces espaces donnés. C'est pourquoi, si les tems sont les mêmes, les espaces sont proportionnels aux vitesses; & si les espaces sont égaux, les vitesses sont en raison inverse des durées des mouvemens.

C'est ainsi qu'un vaisseau, dont le fillage est regardé comme uniforme, est supposé s'avancer d'une lieue dans l'espace pendant l'intervalle d'une heure, lorsqu'il fait 3 nœuds dans 30''; car alors les intervalles de 30'' & de 60' sont proportionnels aux espaces qui sont parcourus avec une vitesse uniforme. C'est la même raison qui autorise à comparer les vitesses de deux bâtimens par le nombre de nœuds qu'ils filent pendant 30'' de tems, parce qu'alors la durée de leur mouvement est supposée la même.

184. Soit  $A$  (fig. 51) le lieu qu'occupoit un corpuscule au moment où une force motrice instantannée a agi sur lui; & soit  $Ar$  la ligne droite qu'il a parcourue uniformément à raison de cette impulsion pendant un tems donné  $t$ . Si cette ligne est partagée en autant de parties égales,  $At$ ,  $ty$ ,  $yr$ , qu'on compte de secondes dans  $t$ ; on voit que le corpuscule devoit être, au point  $t$  à la fin de la 1.<sup>re</sup> seconde; en  $y$  à la fin de la 2.<sup>e</sup>; en  $r$  à la fin de la 3.<sup>e</sup>, & ainsi successivement; de sorte que son mouvement, en se prolongeant sans obstacle, l'auroit trans-

porté dans l'espace par des pas égaux, d'un point à divers autres plus éloignés sur la même ligne droite.

Imaginons un plan  $CDAB$  sur lequel est tracée cette route  $Ar$  du corpuscule & supposons en  $A$  trois lignes perpendiculaires entr'elles, telles que  $AD$ ,  $AB$  & une troisième qui soit perpendiculaire au plan  $DABC$  des deux autres. A mesure que le corpuscule s'avance sur  $Ar$ , sa distance à chacun des axes supposés, varie à chaque pas. Est-il en  $t$  : sa distance à  $DA$  est  $ts$  ; & en  $r$ , elle est  $rn$ . A l'égard de  $AB$ , cette distance est d'abord  $tz$ , & ensuite  $rq$ . Enfin à l'égard de l'axe, qui en  $A$  est perpendiculaire au plan  $DABC$ , elle varie de  $At$ , à  $Ar$  ; c'est-à-dire, qu'elle est alors égale à la route réelle du corpuscule.

185. Ces distances & leurs variations peuvent aussi être considérées sous un point de vue, autre que celui qui les rend nécessaires à la détermination du lieu du corpuscule dans l'espace. Car le mouvement de celui-ci ne nous devient sensible, que par sa translation d'un lieu dans un autre. Ainsi on peut dire que le corpuscule qui de  $A$  s'avance en  $r$ , & qui en même tems s'éloigne par conséquent de la quantité  $rn$ , à l'égard de l'axe  $AD$ , a une vitesse  $rn$  relativement à ce même axe. La partie  $rq$  peut aussi être regardée comme la mesure de la vitesse relative du même corpuscule à l'égard de  $AB$ . D'ailleurs le mouvement réel  $Ar$  étant uniforme, les vitesses relatives  $rn$  &  $rq$ , doivent avoir le même caractère d'uniformité ; c'est-à-dire, que les distances du corpuscule aux axes  $AD$  &  $AB$ , doivent changer régulièrement & uniformement, comme sa position sur la ligne  $Ar$ , ou comme sa distance à l'axe qui est perpendiculaire au plan  $DABC$ . En effet à cause des triangles semblables  $Ats$  &  $Arn$ , on peut dire  $At : Ar :: ts : rn :: As : An$  ; mais  $At : Ar :: 1'' : t$  ; donc  $ts : rn :: As : An :: 1'' : t$ . Les variations des distances du corpuscule aux axes  $AD$  &  $AB$  sont donc proportionnelles aux tems. Ainsi ses vitesses relatives sont uniformes comme sa vitesse réelle.

Remarquons que le lieu  $r$  qui est occupé sur le plan  $DABC$  par ce corpuscule, à un instant de la durée du mouvement, n'exige pour être déterminé, que la connoissance

de la vitesse réelle  $Ar$ , & d'une de ses vitesses relatives telles que  $rn$  ou  $rq$ . Car alors dans le tri-rectangle  $Arn$ , on peut calculer  $An$  ou  $rn$ , & par conséquent déterminer la distance du corpuscule à deux axes perpendiculaires entr'eux. De même étant données les vitesses relatives  $rn$  &  $rq$ , on peut en conclure sa vitesse réelle  $Ar$ . On peut aussi calculer, dans le même triangle avec de pareilles données, l'un ou l'autre des angles  $rAn$  &  $nra$ , c'est-à-dire, l'angle que la direction du corpuscule forme avec l'un ou l'autre des axes  $AD$  &  $AB$ . La direction, & la route uniforme d'un corpuscule, peuvent donc être déterminées, ou en rapportant à trois axes perpendiculaires entr'eux les lieux qu'il occupe successivement dans l'espace, ou en combinant les vitesses relatives à l'égard de ces mêmes axes.

Un corpuscule est-il sollicité au mouvement par deux forces directement opposées, dont l'une lui feroit parcourir  $At$  dans l'unité de tems, tandis que l'autre feroit capable de le porter de  $t$  en  $A$  en sens contraire : ce corpuscule ne doit pas sortir du lieu où il étoit placé. Car alors il n'y a pas de raison pour qu'il s'avance, dans un sens plutôt que dans un sens contraire. Tout corpuscule qui reçoit au même moment l'impulsion de deux forces égales & directement opposées, doit donc persévérer dans l'état où il étoit avant l'action de ces forces. C'est aussi par la même raison que deux forces inégales, & directement opposées, agissant instantanément sur un corpuscule, ne doivent produire qu'un effet proportionné à la différence des forces motrices. Si au contraire deux ou plusieurs forces agissent dans le même sens & au même instant sur un corpuscule, il est évident que chacune doit produire tout l'effet dont elle est capable, puisqu'elles ne se gênent nullement dans leur action. Ce corpuscule doit donc alors se mouvoir comme s'il eût reçu l'impulsion d'une force unique, qui feroit équivalente aux deux forces particulières qui lui sont réellement appliquées, ou qui seroit égale à la somme de ces mêmes forces.

186. Imaginons actuellement que deux forces qui agissent instantanément sur un corpuscule, ne soient dirigées, ni dans un même sens ni dans des sens con-



traïres, mais suivant des lignes qui forment un angle, & telles que les lignes  $Aq$  &  $An$  (fig. 60). Quelle doit être alors la route de ce point solide? elle ne peut être qu'une ligne droite, soit parce que l'impulsion est instantanée, soit parce qu'après l'action simultanée des deux forces motrices, le point, abandonné à lui-même, ne peut obéir qu'à l'action unique qui résulte de la combinaison de ces forces. Ce corpuscule doit donc se trouver, après le moment de l'impulsion, dans un état de mouvement quelconque; & comme de lui-même, il ne peut ni altérer sa vitesse, ni l'augmenter, ni varier sa direction, ce point doit tracer dans l'espace une ligne droite, & la parcourir uniformément. Il ne reste donc qu'à chercher & la direction de cette ligne & sa longueur, pendant l'unité de tems. Soit  $A$  le lieu du corpuscule lorsqu'il est dans l'état de repos; & supposons qu'il soit sollicité non-seulement par une force instantanée, qui agissant seule lui feroit parcourir  $An$  dans l'unité de tems, mais aussi par une autre force qui seule le transporterait de  $A$  en  $q$  dans le même tems. Aucune de ces forces ne tend ainsi à éloigner le corpuscule d'un plan qu'on imagine passer par les lignes  $An$  &  $Aq$ . Ce point ne peut donc se mouvoir que sur une ligne droite tracée sur ce même plan. Soit  $AmT$  la direction indéfinie de cette ligne. Soit prise aussi la même ligne pour un des trois axes perpendiculaires auxquels doit être rapporté le lieu du corpuscule, après la durée d'une unité de tems; tandis que  $zp$ , perpendiculaire à  $Am$ , dans le plan  $nAq$  est choisi pour être le 2.<sup>e</sup> de ces axes. Le 3.<sup>e</sup> est une ligne perpendiculaire en  $A$  au plan  $nAq$ . On voit que si le corpuscule n'eut été sollicité au mouvement que par la force qui lui eut fait parcourir  $Aq$  dans l'unité de tems, il auroit eu, à l'égard de  $Am$ , une vitesse relative représentée par  $qr$  ou  $Ap$  (en supposant que  $qr$  soit une ligne abaissée perpendiculairement de  $q$  sur  $Am$ ) (185). De même sa vitesse relative à l'égard de l'axe  $Am$  eut été  $no$  ou  $az$ , s'il n'eut été sollicité qu'à tracer la ligne  $An$  pendant l'unité de tems. C'est pourquoi au moment où les deux forces supposées agissent ensemble sur le corpuscule, celui-ci reçoit une tendance à s'éloigner

de  $Am$ , 1.<sup>o</sup> d'une quantité  $Ap$  avec une vitesse relative dirigée de  $A$  en  $p$ ; & 2.<sup>o</sup> d'une quantité  $Az$  avec une vitesse relative dirigée de  $A$  en  $z$ . Ces deux tendances contraires doivent se balancer & se détruire mutuellement dans la combinaison instantannée des deux forces motrices, puisque le corpuscule est supposé suivre la ligne  $Am$  sans s'en écarter. Ainsi il faut que ces deux tendances soient égales, afin qu'il n'y ait pas de raison pour que le corpuscule se porte, sur la droite de  $Am$ , plutôt que sur sa gauche. La vitesse relative,  $no$  ou  $Az = an \sin. nAm$ ; & la vitesse relative  $qr$  ou  $Ap$  qui lui est égale, est exprimée par  $Aq. \sin. qAm$ . On a donc l'équation nécessaire,  $An. \sin. nAm = Aq. \sin. qAm$  qui conduit à cette proportion  $An : Aq :: \sin. qAm : \sin. nAm$ . Remarquons qu'une telle proportion est celle qu'on feroit dans un parallélogramme qui auroit pour côtés les lignes  $An$ ,  $Aq$ , & pour diagonale  $Am$ . On doit donc conclure de cette comparaison que la direction de la route d'un corpuscule, qui est sollicité au mouvement par deux forces instantannées, est celle de la diagonale d'un parallélograme dont les côtés représentent, la direction, & l'effet de chacune des forces motrices, pendant l'unité de tems.

La longueur de la route du corpuscule ( dans le même état des choses ) devient aussi aisée à déterminer. Car si la force  $Aq$  agissoit seule sur le corpuscule qui est supposé en repos en  $A$ , elle l'éloigneroit de  $A$  ou de l'axe  $zAp$ , pendant l'unité de tems, d'une quantité  $qp$  ou  $Ar$ ; & la force  $An$  seule agissante, l'éloigneroit de  $zAp$  d'une quantité  $nz$  ou  $Ao$ . Ce corpuscule, au moment où la combinaison des forces a lieu & où il va commencer à changer d'état, a donc une tendance pour s'éloigner de  $A$  non seulement d'une quantité  $Ar$ , mais aussi d'une quantité  $Ao$ . Ces deux tendances sont dirigées dans un même sens; elles concourent ensemble sans se gêner réciproquement; & comme on ne suppose aucune force étrangère qui puisse troubler l'effet résultant des deux forces  $An$  &  $Aq$ , il s'en suit que le corpuscule doit s'éloigner du point  $A$ , ou de l'axe  $pAz$ , & qu'il doit parcourir pendant l'unité de tems sur la direction de la ligne  $Am$ , un espace égal à la somme ( $Ao + Ar$ ). Ces deux dernières lignes forment

ensemble la diagonale entière  $Am$  du parallélogramme déjà cité. Car les triangles  $mno$  &  $raq$  sont égaux, comme ayant, des côtés égaux  $Aq$  &  $nm$ , ainsi que des angles égaux chacun à chacun;  $mo$  est donc une ligne égale à  $Ar$ . C'est pourquoi, en réunissant ces résultats, la diagonale  $Am$  représente non seulement la direction, mais aussi la longueur de la route qui est parcourue pendant l'unité de tems, par un corpuscule; lorsque celui-ci est sollicité au même moment par deux forces motrices, qui séparément le transporteroient, l'une de  $A$  en  $q$  & l'autre de  $A$  en  $n$ , pendant la même unité de tems.

Le corpuscule supposé se meut donc, comme s'il étoit sollicité par une force motrice unique qui seroit capable de lui donner une vitesse  $Am$ . On peut, donc à la considération de deux forces composantes  $An$  &  $Aq$ , substituer celle de leur résultante  $Am$ ; & réciproquement on peut décomposer au besoin une force telle que  $Am$ , en deux forces partielles, telles que  $Aq$  &  $An$ , inclinées l'une à l'autre sous un angle quelconque  $nAq$ . Plusieurs forces dont les directions seroient placées dans un même plan peuvent donc être réduites aussi à une seule force résultante, en les combinant successivement les unes avec les autres, d'après la théorie précédente.

187. La composition & la décomposition des forces peuvent être variées à l'infini; mais dans tous les cas, il y a des rapports déterminés entre deux forces composantes & leur résultante. Car on a toujours cette suite de rapports égaux  $Am : Aq : An :: \sin. Anm$  ou  $\sin. nAq : \sin. nAm : \sin. mAq$ . Nommons  $a$ ,  $b$ , &  $c$ , les angles  $nAq$ ,  $nAm$ ,  $mAq$ , on peut dire (A)  $Am : Aq : An :: \sin. a : \sin. b : \sin. c$ . On fait d'ailleurs que  $(118) \sin. a = 2 \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} a$ ; que  $\sin. b + \sin. c = 2 \sin. \frac{1}{2} (b + c) \cos. \frac{1}{2} (c - b)$  & que  $\sin. c - \sin. b = 2 \sin. \frac{1}{2} (c - b) \cos. \frac{1}{2} (b + c)$ ; cette proportion conduit donc à la suivante,  $Aq + an : \sin. b + \sin. c :: Am : \sin. a$ ; ou (B)  $Am : Aq + an :: \cos. \frac{1}{2} a : \cos. \frac{1}{2} (c - b)$ ; parce que  $(c + b) = a$ . On peut dire aussi (C)  $Am : An - Aq :: \sin. \frac{1}{2} a : \sin. \frac{1}{2} (c - b)$ .

C'est à l'aide de ces proportions qu'on peut déterminer l'une de ces forces, & sa direction, lorsque les données sont suffisantes. Elles font voir aussi que les forces com-

posantes, concourant à pousser un corpuscule dans le même sens, ou sur une même direction, leur résultante est alors comme on l'a dit (185) égale à la somme des composantes. Car alors dans la proportion,  $a=0$  ainsi que  $c$ ,  $b$ , & la différence  $c-b$  de ces angles. On en conclut donc que  $Am = An + Aq$ .

Si les forces composantes sont directement contraires; c'est à dire si l'une tend à pousser le corpuscule de A en  $z$ , & l'autre de A en  $p$ , alors l'angle  $a=180^\circ$ . Le corpuscule ne peut donc, dans ce cas, se mouvoir, ni à droite, ni à gauche de la ligne  $zAp$  des directions des forces motrices, mais seulement dans le sens de la plus grande des composantes; ainsi  $c-b=180^\circ=a$ ; & la proportion (C) fait voir alors que  $Am=An-Aq$ . La résultante est donc nulle, lorsque les deux composantes sont égales; ou elle est représentée par leur différence si elles sont inégales.

Deux forces composantes; suivant ces proportions; produisent d'ailleurs un effet  $Am$ , d'autant plus différent de la somme ( $An+Aq$ ) qu'elles approchent plus de l'égalité, en supposant que la valeur de  $a$  ne soit ni nulle ni de  $180^\circ$ ; car dans le cas où elles sont égales,  $b=c$ , ou  $\cos. \frac{1}{2}(c-b)=1$  & dans tout autre cas, ce cosinus est plus petit que le rayon. Enfin la direction de la résultante  $Am$ , dans le premier cas, partage l'angle  $a$  en deux parties égales.

188. D'autres rapports lient encore ensemble, & les deux forces composantes dont les directions sont inclinées l'une à l'autre, & la force qui résulte de leur combinaison. Nous avons dit qu'un corpuscule qui est sollicité par une force motrice instantanée, à parcourir  $Aq$  dans l'unité de tems, ne peut lui obéir sans s'éloigner, d'une ligne  $Am$  donnée dans l'espace, à une distance  $qr$ . Mais si on compare le corpuscule sur chaque point d'une telle route  $Aq$  avec un point tel que  $u$ , par exemple; sa distance au point  $u$  varie sans cesse pendant ce mouvement, & il est un instant où elle est la plus petite, c'est-à-dire, un *minimum*. Cet instant est celui où le corpuscule se trouve sur l'extrémité  $i$ , d'une ligne  $ui$  abaissée perpendiculairement de  $u$  sur  $Aq$  (95). Si du même point  $u$ ,

on abaisse aussi des perpendiculaires, l'une *us* sur *An*, & l'autre *up* sur *Am*; on voit que ce corpuscule, n'obéissant uniquement qu'à l'une ou l'autre des forces *Am* ou *An*, ne s'approcheroit jamais de *u* dans son mouvement, à une distance plus petite que les lignes *us* & *up*. Nommons ces distances *f*, *p*; & représentons par *i* la distance *ui*. Nous allons démontrer qu'elles sont toujours telles qu'en les multipliant par les lignes respectives, *An*, *Am*, *Aq*, (qui représentent les effets des forces composantes & résultantes, dans l'unité de tems) on a toujours l'équation ( $f \cdot An + i \cdot Aq$ ) =  $p \cdot Am$ . En effet soit menée la ligne *Au* nommée *d*, qui fait avec *Aq*, un angle *uAq* nommé *o*. Alors l'angle *uAm* = (*o* + *c*) & l'angle *uAn* = (*o* + *a*). Les divers triangles *iuA*, *puA*, *suA*, donnent les valeurs suivantes  $i = d \cdot \sin. o$ ;  $p = d \cdot \sin. (o + c)$ ; &  $s = d \cdot \sin. (o + a)$ . Soient multipliées, la 1.<sup>re</sup> par *Aq*; la 2.<sup>e</sup> par *Am*; & la 3.<sup>e</sup> par *An*, on peut dire alors que,  $Aq \cdot i + An \cdot s = Am \cdot p = Aq \cdot d \cdot \sin. o + An \cdot d \cdot \sin. (o + a) = Am \cdot d \cdot \sin. (o + c)$  (118). Mais on a vu que (187)  $Am \cdot \sin. c = An \cdot \sin. a$ ; ainsi l'équation précédente se réduit à,  $Aq \cdot i + An \cdot s = Am \cdot p = d \cdot \sin. o (Aq + An \cdot \cos. a = Am \cdot \cos. c)$ . Abaissons des points *n* & *m*, des lignes perpendiculaires sur *Aq*, telles que *nf* & *mz*; alors on forme des triangles *Anf* & *Amz*, dans lesquels  $Af = An \cos. a$ , &  $Az = Am \cos. c$ . d'ailleurs en comparant les triangles *Anf* & *mz* qui sont égaux (comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux) on en conclut que  $Af = mz$ . Substituant enfin ces valeurs dans la dernière équation, il en résulte que  $Aq \cdot i + An \cdot s = Am \cdot p = d \cdot \sin. o (Aq + Af = (Aq + Af)) = o$ ; ou  $Aq \cdot i + An \cdot s = Am \cdot p$  (D). La somme des produits, de chaque force composante multipliée par la distance du point donné à sa direction, est donc égale à celui de la force résultante multipliée par la distance de sa direction au même point. Donnons à chacun de ces produits, le nom de *moment* de la force à laquelle il est relatif, & on voit que ces momens doivent varier comme la position du point *u* qui sert de terme de comparaison. Remarquons que si ce point *u* est placé dans l'angle *mAq* alors la ligne *ui* est dirigée sur *Aq*, dans un

sens opposé à celui où nous venons de la considérer. Cette ligne devoit donc avoir alors un signe contraire dans l'équation générale ( D ) qui deviendrait ainsi ,  $An. S - Aq. i = Am. p.$  car les autres perpendiculaires  $us$  &  $up$ , ne changeroient pas de position. Si  $u$  est situé dans l'angle  $nAm$ , alors les lignes  $up$  &  $ui$ , changent de direction & par conséquent de signe. C'est pourquoi l'équation ( D ) est alors  $Aq. i - An. S = Am. p.$  Enfin le point  $u$  est-il placé sur la direction d'une des forces composante ou résultante, le moment d'une telle force doit être nul à l'égard de  $u$ . Ainsi soit  $u$  sur la ligne  $Am$ , on doit avoir l'équation,  $An. S = Aq. i$ . C'est à dire que les momens des deux composantes, à l'égard d'un point quelconque de la direction de leur résultante, sont toujours égaux.  $u$  est-il sur  $Aq$ , le moment de la force  $Aq$  devient nul, & on a  $An. S = Am. p$ . Enfin si  $u$  étoit sur  $An$ , on diroit que  $Aq. i = Am. p$ .

189. Les forces composantes  $An$  &  $Aq$ , sont-elles parallèles entr'elles; l'angle  $nAq$  devient nul, & leur résultante  $Am$  ( comme on l'a vu ) est alors égale, on a la somme (  $An + Aq$  ) des composantes, si celles-ci sont dirigées dans le même sens, on a leur différence si leurs directions sont contraires. Nous devons aussi établir, entre les momens des forces parallèles comparées, des rapports fondés sur les démonstrations relatives aux forces composante ou résultante, qui sont inclinées entr'elles. Remarquons dans cette application, que les perpendiculaires abaissées d'un point tel que  $u$ , sur les directions de deux forces parallèles, sont alors placées sur une seule & même ligne. Représentons par  $ri$  &  $fl$  ( *fig. 61* ) les directions de deux forces parallèles & composantes  $i$  &  $l$ ; & par  $zs$  celle de leur résultante  $s$ . Cherchons le lieu de cette dernière. Si du point  $k$  on mène une ligne  $kr$ , perpendiculaire aux directions  $ri$  &  $fl$ , on doit dire  $i. kr + l. kf = (i + l) p$ . Si on eut choisi un autre point  $c$  éloigné comme  $k$ , de  $ri$  &  $lf$ ; on auroit eu  $i. ci + l. cl = (i + l) P$  ( en nommant  $p$  &  $P$  les distances de la résultante (  $i + l$  ) à  $k$  &  $c$  ). Mais d'après ces deux équations  $p = P$ , puisque  $ci = kr$ , &  $cl = kf$ ; ainsi la résultante de deux forces parallèles est parallèle à celles-ci. Comme

les composantes sont supposées ici, agir dans le même sens, & qu'on peut changer l'équation précédente en celle-ci  $(i+l)kf+i.fr=(i+l)zk$ , le point  $z$  par lequel passe la résultante, est situé nécessairement dans l'intervalle qui sépare les directions des forces composantes. Deux forces paralleles sont-elles dirigées en sens contraire; l'une suivant  $sz$ , & l'autre suivant  $fm$ , leur résultante nommée  $R$  (qui est égale à la différence des forces  $sz$  &  $fm$  nommées  $z$  &  $m$ ) doit aussi leur être parallele, & sa direction passe à une distance  $x$  du point  $k$ , qui est indiquée par l'équation  $z.zk-m.fk=R.x=(z-m)x$ , ou  $(z-m)fk+z.zf=(z-m)x$ . La distance  $x$  est donc plus grande que la somme des lignes  $(fk+zf)$ . La résultante  $R$  n'est donc pas placée, comme dans les cas précédens, dans l'intervalle qui sépare les composantes, mais au delà de cet espace, comme en  $r$ , & du côté de la plus grande composante. D'ailleurs il est à propos de remarquer que puisque  $R=z-m$ , il s'ensuit que  $z=R+m$ ; ou que la composante  $z$  est plus grande alors que  $R$ , de toute la valeur de la composante opposée  $m$ .

190. Tous ces détails, ces rapports, ces résultats sont de la plus haute importance; on peut en faire un usage fréquent en exerçant l'art de la marine; ainsi il est bon de placer ici quelques réflexions générales qui peuvent faciliter les applications de cette théorie.

Quelque soit la direction d'une force qui sollicite un corpuscule au mouvement, on peut toujours la décomposer, en trois forces paralleles à trois axes perpendiculaires entr'eux, chacune à chacun. Car soit  $ai$ , la direction d'une force donnée (fig. 36) & soient  $NC$ ,  $DC$ , &  $CE$ , les trois axes qui servent de termes de comparaison. Si on abaisse de  $a$ , une perpendiculaire  $ao$  sur le plan  $DCEB$  de deux de ces axes; si on mene aussi la ligne  $io$ ; la force représentée par  $ai$ , peut être décomposée en deux forces partielles représentées par  $ao$  &  $ai$ . La première est parallele à l'arc  $NC$ , & la seconde peut être encore décomposée en deux forces partielles  $ib$  &  $iz$  qui sont paralleles, l'une à l'axe  $CE$ , & l'autre à  $DC$ . Ainsi une force motrice dirigée d'une maniere quelconque

peut être regardée comme la résultante de trois forces ; qui sont parallèles à trois axes perpendiculaires entr'eux.

Ajoutons à ces considérations, que deux forces ayant des directions qui seroient perpendiculaires entr'elles, ne pourroient ni se nuire, ni se favoriser dans leur action. En effet un corpuscule n'est-il sollicité au mouvement que par l'une de ces forces, il n'en reçoit aucune tendance à se mouvoir ou à s'avancer sur la ligne qui indique la direction de la seconde force. La vitesse que celle-ci tend à lui communiquer, ne peut donc être augmentée ni diminuée par l'action de la première, & réciproquement. La position d'un corpuscule dans l'espace, après un certain tems, peut donc être déterminée, en calculant successivement sa distance à chacun de trois axes supposés d'après l'effet particulier que peut produire chaque force perpendiculaire à chacun des axes. On peut donc dire aussi qu'un tel corpuscule sollicité par plusieurs forces ne peut rester dans l'état de repos, qu'autant que les forces composantes qui le sollicitent parallèlement à chacun des axes, se détruisent mutuellement & séparément. S'il faut donc calculer les effets que produisent sur un corpuscule les actions de diverses forces qui lui sont appliquées sous des directions quelconques, il suffit de décomposer chacune de ces forces en trois autres qui soient perpendiculaires entr'elles, ou à trois axes, & de considérer séparément celles qui sont parallèles à un de ces axes, indépendamment de celles qui le sont aux deux autres axes. Les trois résultantes qu'on obtient ainsi font connoître l'état réel du corps, lorsqu'il obéit à ces forces combinées ensemble. Par de tels moyens on simplifie la recherche de la route d'un corpuscule dans l'espace ; & on détermine facilement les changemens qu'éprouvent ses distances à trois axes, quelque puisse être le nombre des forces qui produisent sa vitesse.

191. Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'un seul corpuscule sollicité au mouvement, & il reste à connoître l'effet des forces motrices, sur un corps solide, ou sur l'assemblage de plusieurs corpuscules qui sont liés invariablement les uns aux autres.

Quelque puisse être l'organisation d'un corps, on peut toujours



toujours imaginer que dans l'intérieur de sa masse, il y a un point autour duquel ses parties matérielles sont disposées régulièrement ou dans un ordre tel, qu'en faisant passer par ce point un plan quelconque, la somme des momens des masses partielles & élémentaires, qui sont d'un même côté ( à l'égard d'un tel plan ) est égale à celle des momens des autres masses élémentaires qui sont placées du côté opposé, relativement au plan supposé. C'est un tel point, qui dans les corps pesans est nommé le centre de gravité, & qui recevra ici le nom de *centre de masse*. ( On entend par le moment d'un corpuscule, à l'égard d'un p'an donné, le produit de la masse de ce corpuscule multipliée par sa distance à ce plan ).

192. Supposons pour un instant, que les parties integrantes d'un corps soient toutes réunies à son centre de masse. Si alors cet assemblage est sollicité au mouvement par une force  $F$  appliquée immédiatement au point central ; si cette force d'ailleurs n'est capable que de communiquer une vitesse  $v$  à un corpuscule  $m$  ; ce corps entier, qui est composé d'un nombre  $nm$  de corpuscules égaux, & dont la masse est  $M=nm$ , ne peut pas sous l'impulsion de  $F$  prendre une vitesse aussi grande que  $v$ . Il faut alors que la force  $F$  se partage entre tous les corpuscules  $m$ , qui sont supposés réunis, ensemble, & inséparablement, au point central. Comme d'ailleurs aucune raison ne peut porter à penser qu'un tel partage puisse être inégal, il s'ensuit, que la vitesse particuliere  $u$  de chacun de ces corpuscules doit être la même, & que l'infériorité de  $u$ , à l'égard de  $v$ , doit être dans le rapport de  $m$  à  $nm$  ou  $M$ . On doit donc dire  $v:u::nm:m$  : ainsi  $mv=Mv$ . Déjà nous avons dit que la force  $F$  ne peut être déterminée & mesurée que par l'effet qu'elle peut produire; c'est pourquoi l'énergie de cette force doit être proportionnelle, non seulement au degré de vitesse qu'elle communique à un corps, mais aussi à la grandeur de la masse du corps qu'elle met en mouvement. L'expression de cette force  $F$  est donc la quantité  $mv$  ou celle  $Mu$  qui est égale à la premiere.

Considérons cette force  $F$ , comme s'étant consumée entièrement à produire le mouvement du corps  $M$ , alors celui-ci, animé de la vitesse  $u$  qui lui est communiquée,

semble avoir reçu une puissance qui le rend capable d'agir lui-même avec un effort, égal à la force qui lui a été totalement transmise. Sous ce point de vue, cette force potentielle d'un corps en mouvement, doit donc aussi être représentée par  $Mu$ ; & c'est par cette raison qu'on donne le nom de *force d'un corps*, ou de *quantité de mouvement*, au produit de la masse  $M$  de ce corps, multipliée par la vitesse commune  $u$  de chacune de ses parties intégrantes.

193. Supposons que, dans un tel corps, les parties élémentaires qui viennent d'être envisagées comme réunies en un point central, soient disposées régulièrement autour de ce même point à diverses distances; & de manière que celui-ci ne cesse pas d'être le centre de masse de leur assemblage; quelque puisse être son organisation. Dans cet état des choses, les parties du système sont aussi supposées être liées ensemble indissolublement; & même on pourroit regarder comme égaux, leurs momens (comparés deux à deux) à l'égard du centre de masse. Ce corps inflexible est-il sollicité au mouvement par une force instantanée  $F$  qui est appliquée sur un quelconque de ses élémens? Les parties de ce corps, quelque soit leur vitesse particulière, doivent conserver les mêmes distances respectives, soit entr'elles, soit à l'égard du centre de masse, puisqu'elles ne peuvent être séparées les unes des autres. C'est pourquoi le mouvement de ces diverses parties, est-il dirigé sur des lignes parallèles, la même vitesse progressive doit animer chacun de ces élémens ainsi que le centre de masse; & si leur vitesse est différente, ils peuvent chacun être regardés comme ayant deux vitesses partielles, (186) dont l'une progressive, seroit parallèle à la direction de la force motrice  $F$ ; & dont l'autre, emportant chaque élément, le feroit tourner autour d'un axe qui dirigé par le centre de masse seroit perpendiculaire au plan où se trouvent, & le centre, & la direction de  $F$ . Un tel corps, ainsi que ses éléments, obéissant à l'action de  $F$ , peuvent donc être considérés comme ayant un mouvement progressif parallèle à celui du centre de masse, & un mouvement de rotation autour d'un axe qui passe par ce centre. La roideur du corps, ou l'inaltérable liai-

fon de ses parties exige même que la vîtesse progressive de chaque élément soit parfaitement la même, & que leur vîtesse de rotation soit proportionnelle à leur distance à l'axe indiqué.

Après ces considérations générales, soit *ri* (fig. 61) la direction de la force *F* qui est appliquée dans le sens *ri* au point *i* d'un corps *M* dont le centre de masse est *z*. Cherchons les effets qu'elle peut produire sur ce corps, c'est à dire les vîteses progressive & gyratoire qu'elle lui communique. Supposons-la composée de petites forces *f*, qui soient, en même nombre *n*, que les parties élémentaires *m* du corps *M*; de sorte que  $F = nf$  comme  $M = nm$ ; & de sorte que si le corps est divisé en petites masses partielles *bm*, *am*, *qm*, &c, la force *F* soit aussi regardée comme partagée en petites forces telles que *bf*, *af*, *qf*, &c.

194. Considérons dans *F* une partie *bf*, & partageons-la en deux parties égales. Décomposons ensuite  $\frac{1}{2}bf$  en deux forces paralleles, dont l'une dirigée suivant *fl* soit appliquée en *l* à une masse partielle *bm* du corps *M*, & dont l'autre est dirigée en sens contraire, & suivant *ck*, qui est aussi éloignée que *ri*, de *fl*. Soit menée la ligne *kr* perpendiculaire à *ri*; on peut déterminer la force partielle *L* qui agit en *l*, en disant  $\frac{1}{2}bf : L :: fl : rk :: 1 : 2$ ; ainsi  $L = bf$ . Le corpuscule *bm*, qui est en *l*, est donc sollicité au mouvement par une force qui est proportionnelle à sa masse.

La décomposition de la partie *bf* de la force *F* appliquée en *r* la rend donc équivalente à trois forces paralleles. La premiere est celle dont on vient de parler & qui, égale à *bf*, agit suivant *fl* sur *bm*. La 2<sup>e</sup>.  $= \frac{1}{2}bf$  & elle agit en *i* dans le sens *ri*; la troisieme  $= \frac{1}{2}bf$  est dirigée suivant *ck*, ou dans une direction contraire à celle des deux premieres. L'opposition de ces deux dernieres, leur égalité, & leur parallélisme, démontrent ainsi la nullité absolue de leur résultante, (187), ainsi elles ne peuvent donner aucun mouvement progressif ou parallele à *ri*, ni à une ligne *kr* qu'on peut regarder comme une verge inflexible qui unit les points d'application de ces forces, ni au corps auquel cette ligne peut être considérée comme liée indissolublement. Mais ces deux forces

composantes, qui ne sont pas, directement opposées, ou qui sont appliquées dans des points différents du corps tels que  $r$  &  $k$ , tendent à faire tourner ce corps. Cette rotation ne doit même avoir lieu qu'autour du centre  $z$  ou d'un axe qui dirigé par ce centre est perpendiculaire au plan  $riz$ , parce que les parties de ce corps inflexible doivent conserver les mêmes distances, & entr'elles, & à cet axe, & au centre  $z$ . Par la même raison, la composante  $bf$  qui agit sur la partie  $bm$  ou sur le point  $f$  de la verge inflexible  $kr$ , tendent aussi à faire tourner ce corps autour du même axe, mais dans un sens contraire à l'effet des deux autres composantes, & son moment à l'égard de cet axe est  $bf.zf$ . Les moments des deux autres forces sont  $\frac{1}{2}bf. zr$  &  $\frac{1}{2}bf. kz$  la somme de ces moments qui se combinent pour produire la rotation du corps, & qu'on trouve en retranchant, celui qui tend à faire tourner le corps dans un sens, de ceux qui sollicitent le corps en sens contraire, se réduit à,  $\frac{1}{2}bf (zr+kz) - bf.zf = bf.zr$ . Si ce corps n'étoit donc sollicité que par une force  $bf$  appliquée en un point différent de  $z$ , sa rotation seroit produite par une force dont le moment est  $bf.zr$ , & quoique cette force ne soit appliquée qu'à un point de la verge inflexible  $kr$ , cette verge & ses points, ne peuvent tourner autour de  $z$ , sans entraîner le point  $l$  ou la partie  $bm$  dans le même mouvement à cause de leur intime liaison.

195. Si on fait les mêmes raisonnemens pour un autre élément  $am$  du corps, on doit trouver, que sa vitesse progressive parallèle à  $ri$ , est due à une force partielle  $af$  qui est proportionnelle à sa masse; & que le corps doit être sollicité à se mouvoir autour de l'axe indiqué de rotation, par une force dont le moment est  $af.zr$ ; de sorte qu'en étendant cette théorie à tous les éléments du corps inflexible  $M$ ; on doit voir que la force motrice  $F$  agissant sur ce corps lui communique un mouvement de rotation qui est proportionnel au moment  $nf.zr = F.zr$ ; c'est à dire au produit de cette force par sa distance au centre de masse  $z$ .

196. Quant à la vitesse progressive que doivent prendre & ce corps, & chacune de ses parties, sous l'impulsion

instantannée de  $F$  ; elle est telle que les distances respectives de ces parties ne peuvent être altérées. En effet supposons que les parties  $bm$  &  $am$  eussent été, libres, & sollicitées, par des forces proportionnelles à leur masse, telles que  $bf$ ,  $af$ , à prendre l'une une vitesse  $u$  & l'autre une vitesse  $v$ , on auroit eu les équations (192)  $bm u = bf$ , &  $am v = af$ . On auroit donc pu dire  $af : bf :: am v : bm u$  ; mais,  $af : bf :: am : bm$ , ainsi  $u = v$ . La vitesse de  $am$  auroit donc été égale, à celle de  $bm$ , ainsi qu'à celle de toute autre partie du corps  $m$ . puisque ces parties, étant libres & sollicitées par des forces proportionnelles à leur masse, se feroient mues avec une égale vitesse progressive ; il s'ensuit que liées indissolublement entr'elles, elles doivent aussi, sous la même impulsion, se mouvoir progressivement comme si elles étoient indépendantes les unes des autres. Car alors elles ne peuvent ni se gêner dans leurs mouvements, ni tendre à changer leurs distances réciproques. On doit aussi en conclure que  $nmau = naf$  ou que  $Mu = F$  (192). On voit par conséquent qu'un corps inflexible  $M$  qui est sollicité par une force instantannée  $F$  excentrique reçoit la même vitesse progressive qui lui auroit été communiquée, si cette force  $F$  eut été immédiatement appliquée au centre de masse  $z$ , & si toutes les parties de ce corps eussent été réunies dans ce point central. Ainsi lorsqu'une force motrice & instantannée, est appliquée à un point quelconque [différent du centre de masse] d'un corps ; on peut déterminer la vitesse progressive de celui-ci, ou de son centre de masse, en considérant cette force comme agissant immédiatement sur ce centre. Celui-ci doit donc se mouvoir (183) comme on l'a dit précédemment, non seulement avec uniformité, mais aussi sur une ligne parallèle à la direction de la force.

Cette force est-elle excentrique, ou sa direction ne passe-t-elle pas par le centre de masse, on voit aussi qu'elle fait prendre au corps  $M$ , en outre d'une vitesse progressive, une vitesse de rotation autour d'un axe qui, dirigé par le centre de masse, est perpendiculaire au plan où se trouvent & ce centre & la direction de la force. Elle fait naître d'ailleurs ce dernier mouvement en agissant avec un moment qui est le produit de cette force par sa

distance au centre de masse. Il s'ensuit donc que la direction de  $F$  passant par ce centre, le corps ne peut tendre alors à tourner sur lui-même, & il ne prend qu'une simple vitesse progressive. Ces deux mouvemens, l'un progressif & l'autre gyrotoire, peuvent donc exister & être considérés, l'un indépendamment de l'autre, dans un seul & même corps libre. En effet, un tel corps, sous l'impulsion d'une force excentrique  $F$ , a-t-il reçu ce double mouvement, le progressif peut être anéanti par une force  $S=F$  qui seroit appliquée en sens contraire au centre de masse, sans que la vitesse de rotation éprouve aucune altération. Celle-ci peut aussi être détruite sans causer aucun changement dans la vitesse progressive, par l'action simultanée de deux forces contraires  $S$ , qui seroient chacune égale à  $F$ , & qui seroient appliquées, l'une au centre de masse & l'autre à une distance de ce centre égale à celle, de la force  $F$  contre laquelle elle agiroit en sens opposé. C'est pourquoi lorsqu'il s'agit par conséquent de déterminer les effets d'une force  $F$  sur un corps, on peut calculer séparément, & la vitesse progressive du centre de masse comme si le corps ne tournoit pas, & celle de rotation du corps autour d'un axe qui passe par ce centre, comme si cet axe étoit fixe.

197. Nous avons dit plus haut comment on détermine (sans avoir égard au mouvement de rotation du corps sur lui-même) la vitesse progressive qu'une force  $F$  peut communiquer à son centre de masse; il reste donc à indiquer la vitesse particulière de rotation qui peut être imprimée par la même force  $F$  à chaque élément du corps  $M$  autour d'un axe  $A$  qui passe par le centre de masse (en supposant celui-ci immobile).

Un élément  $m$  d'un tel corps décrit dans l'unité de temps, autour de  $A$ , un arc, qui par sa longueur devient la mesure de sa vitesse, & qui a pour rayon la distance de  $m$  à l'axe  $A$  de rotation. Donnons le nom de *vitesse angulaire* du corps à celle d'un élément  $m$  qui est éloigné de  $A$ , à une distance que nous regarderons comme l'unité de distance; & désignons, cette vitesse par  $R$ , & cette distance par  $1$ . Alors la vitesse de rotation  $r$ , de tout autre élément  $m$ , qui est placé à une distance  $s$  de  $A$ ,

& la vitesse  $R$ , doivent être proportionnelles aux rayons des arcs décrits en même temps par les deux élémens supposés (115). On peut donc dire  $r : R :: s : l$  ou  $R s = r l$ , &  $m r = m R s$ . Mais  $m r$  représente la force partielle qui feroit capable de donner à  $m$  une vitesse  $r$ , ainsi le moment de cette force à l'égard de  $A$  est  $m r s = m R s^2$ . En raisonnant de même sur la rotation de tous les éléments de  $M$ , on doit trouver que la somme des momens des forces partielles qui appliquées à chaque élément communiqueroient directement à chacun sa vitesse initiale de rotation, est égale au produit de la vitesse angulaire  $R$  du corps, multipliée par la somme des produits de chaque partie de ce corps par le quarré de sa distance à l'axe  $A$  de rotation. Représentons par  $M B^2$  la somme de ces derniers produits, & désignons-la par le nom de *moment d'inertie* du corps  $M$  à l'égard de l'axe  $A$  de rotation. Remarquons aussi que la somme des momens des forces partielles (qu'on a regardées comme appliquées séparément à chaque élément pour le solliciter à tourner autour de  $A$ ) doit être égale, au moment de la résultante de ces mêmes forces, ou à celui de la force  $F$  qui produit la rotation du corps. C'est pourquoi  $D$  étant la distance de  $F$  à l'axe  $A$ , on a l'équation,  $F D = R M B^2$ . On voit donc que pour déterminer la vitesse angulaire d'un corps qui est sollicité au mouvement par une force  $F$  excentrique, il faut chercher 1<sup>o</sup> le moment de cette force, & 2<sup>o</sup> le moment d'inertie du corps à l'égard d'un axe qui passant par le centre de masse est perpendiculaire au plan où se trouvent & ce centre & la direction de  $F$ . Ensuite on divise le 1<sup>er</sup> de ces momens par le second, & le quotient est la valeur de  $R$ .

198. Puisqu'une force excentrique  $F$  qui sollicite un corps au mouvement, communique à chacun de ses élémens une vitesse progressive  $u$ , & une vitesse de rotation  $r$ , autour d'un axe  $A$  du centre de masse; il doit donc y avoir dans l'espace, à l'intérieur, ou à l'extérieur de ce corps, un point à l'égard duquel, les élémens du corps, dans leur double mouvement ne changent pas de distance pendant l'unité de tems. Ce point, quelque part qu'il soit placé, peut être considéré comme lié au corps

par une ligne immatérielle; & sa situation doit être telle; qu'en participant au double mouvement communiqué à ce corps, il tende à s'avancer dans un sens, en raison de sa vitesse progressive, autant qu'il est entraîné en sens contraire par sa vitesse de rotation. C'est au milieu de cette contrariété d'impulsions qu'un tel point, doit rester nécessairement en repos, & paroître le centre autour duquel le corps tourne librement, comme à l'égard d'un point fixe, pendant l'unité du temps. Un tel point, par cette raison a reçu le nom de *centre spontané de rotation*. Soit  $P$  sa distance à l'axe de rotation; & représentons par  $e$  la vitesse de rotation qui lui est communiquée, on a (197)  $e = RP = u$  (parce que les vitesses  $u$  &  $e$  doivent être égales & contraires pour produire le repos du centre spontané dont nous cherchons la distance  $P$ ). Substituons, dans l'équation  $RMB^2 = FD$ , la valeur de  $F$  qui est  $mu$ ; & dans celle-ci la valeur de  $u$  qui est  $RP$ , on aura cette dernière équation  $RMB^2 = MuD = MD.RP$ ; ou  $MB^2 = MDP$ . On en conclut que  $P:1::MB^2:MD$ ; & c'est cette proportion qui sert ainsi à déterminer la distance  $P$  du centre de masse à l'axe spontané de rotation, ou à l'axe autour duquel le corps semble tourner de lui-même & librement.

199. Si une nouvelle force  $q$  agissoit sur le même corps & à une distance  $d$  du centre de masse, on diroit aussi  $p:1::MB^2:MD$ , (en nommant  $p$  la distance du centre de masse au nouvel axe spontané de rotation). Ainsi en comparant cette proportion à la précédente, on peut dire  $P:p::Md:MD::d:D$ . On voit donc qu'un corps étant sollicité au mouvement, successivement par deux forces différentes qui ne sont dirigées, ni sur le centre de masse, ni sur un même point, les centres spontanés de rotation, dans les deux cas, sont placés à l'égard du centre de masse, à des distances, qui sont réciproquement proportionnelles aux distances des forces motrices.

200. Si plusieurs forces sollicitent ensemble au mouvement, un corps solide & par divers points qui soient différens du centre de masse, l'action de chacune tend à produire deux effets distincts sur ce corps, une vitesse progressive, & une vitesse de rotation autour du centre de masse. La vitesse progressive que ce centre



reçoit de la réunion ou de la combinaison de ces forces est celle qui lui seroit communiquée par ces mêmes forces, si elles lui étoient immédiatement appliquées, suivant leur propre direction. Quant à la recherche de la vitesse angulaire  $R$  d'un tel corps autour de son centre de masse, elle devient facile après ce qui a été dit précédemment (197) sur l'effet d'une force unique  $F$  qui est excentrique. Car supposons, pour un moment, qu'il soit prouvé que des forces motrices qui agissent sur un corps, (quelque soient, leur nombre, leur direction, & leur énergie) se réduisent toutes à deux seules forces, dont l'une est dirigée par le centre de masse, & dont l'autre ne passe pas par ce centre. Alors nommons,  $C$  la résultante des forces composantes & *centrales*, ou qui passent par  $\zeta$ ; &  $E$  la résultante des autres forces composantes & *excentriques*. Le moment de  $C$  à l'égard du centre & de l'axe de rotation est nécessairement nul: & comme le moment d'une force doit être égal à la somme des momens de ses composantes, le moment de chaque force motrice supposée, doit être uniquement égal à celui de sa composante excentrique. Il s'ensuit donc que le moment de la résultante  $E$ , qui doit aussi être égal à la somme des momens de toutes les forces composantes excentriques, équivaut à la somme des momens de toutes les forces motrices à l'égard du centre de masse. (On entend, & on entendra désormais que la somme de ces momens est formée, & par l'addition de ceux des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, & par la soustraction des momens des forces qui sollicitent le même corps en sens contraire). C'est pourquoi la vitesse angulaire  $R$  qu'un corps  $M$  est sollicité à prendre autour d'un axe  $A$  qui passe par le centre de masse  $\zeta$ , en vertu de l'action de plusieurs forces excentriques, doit être déterminée par l'équation  $R.MA^2 = ED$ ; en représentant par  $ED$ , la somme des momens de toutes les forces motrices, & par  $MA^2$  le moment d'inertie du corps  $M$  à l'égard de l'axe  $A$  de rotation.

201. Démontrons actuellement la proposition supposée. Soit  $\zeta$  (fig. 77) le centre de masse d'un corps qui est sollicité au mouvement par une force dirigée suivant  $xd$ . Imaginons aussi une ligne arbitraire  $\zeta i$ , & un plan  $ABCD$ ,

qui passe par un point  $d$  de la direction  $xd$ , de manière que  $zi$  soit perpendiculaire à ce même plan. Alors soit décomposée la force représentée par  $xd$  en deux autres, dont l'une  $de$  soit parallèle à  $zi$  & dont l'autre  $dg$ , soit située dans le plan  $AC$ . Si par le point  $i$  on fait passer un autre plan auquel  $zi$  soit perpendiculaire; & si on mène une ligne  $zdl$  par le centre de masse & par le point  $d$  qui est l'intersection de  $xd$  avec le plan  $AC$ ; la composante  $de$  peut être elle-même décomposée en deux autres forces parallèles  $ln$  &  $zb$ . De même la 2<sup>e</sup> composante  $dg$  peut l'être aussi en deux forces parallèles  $lm$  &  $zc$ . Si on raisonne également sur chaque force motrice qui sollicite un corps  $M$  au mouvement & dont la direction traverse en un point variable  $d$  le plan  $AC$ ; on voit que chacune de ces forces peut être regardée comme composée de quatre forces, dont deux sont dirigées par le centre de masse  $z$  (telle que  $zb$  &  $zc$ ) & dont les deux autres sont l'une parallèle à  $zi$ , tandis que l'autre est dans un plan auquel  $zi$  est perpendiculaire.

Toutes les forces telles que  $ln$  (que nous nommons *excentriques*, comme ci-devant, pour les distinguer des forces telles que  $zb$  &  $zc$  qui reçoivent le nom de *centrales*), & qui sont perpendiculaires au même plan, en divers points, peuvent se réduire à une seule résultante  $op$  qui leur est parallèle. Les forces *excentriques* telles que  $lm$ , qui sont toutes dans un même plan auquel  $zi$  est perpendiculaire, peuvent aussi avoir pour résultante une seule force  $rt$  qui leur est parallèle & qui est placée dans le même plan. Dans cet état de choses, soit abaissée du point  $o$  sur  $zi$  une perpendiculaire qui, placée dans le même plan où est  $rt$ , rencontre cette dernière direction en un point  $r$ . Soit tirée aussi par le centre de masse  $z$  & par ce point  $o$ , une ligne qui parvienne, à un point  $s$ , aussi éloigné que le point  $r$ , de la ligne  $zi$ ; alors si on mène une ligne  $qsr$ , elle doit être parallèle à  $op$ ; & on peut décomposer les forces  $op$  en deux autres parallèles, dont l'une passe par  $z$ , & l'autre par  $s$ . Celle-ci dirigée suivant  $rs$ , peut alors se combiner avec la force  $tr$  dont elle rencontre la direction en  $r$ ; & les deux forces  $tr$  &  $rs$  peuvent enfin être réduites à la résultante unique  $ry$ . De

cette maniere, toutes les forces motrices qui sont supposées agir instantanément, & ensemble, sur un même corps  $m$ , & en divers points, peuvent être réduites à deux seules forces, dont l'une passe par le centre de masse  $z$ , tandis que l'autre est *excentrique*. La recherche de la vitesse angulaire d'un tel corps doit donc être faite, (ainsi que nous l'avons annoncé) comme celle de l'effet d'une force  $E$  unique & *excentrique*; & cette vitesse est donnée par l'équation citée précédemment.

202. Si un corps, sollicité au mouvement par une force  $F$ , est retenu par un axe fixe qui le traverse en un point  $t$  (fig. 60) & s'il ne lui est permis que de tourner autour de cet axe, & non autour du centre de masse  $y$ , alors sa vitesse angulaire, dans cet état forcé, ne peut plus être la même que si le corps étoit libre. Cette vitesse étant  $R$  (pour la distance  $l$  d'un corpuscule  $m$  à l'axe  $t$ ); celle d'un autre corpuscule  $m$ , placé à une distance  $x$  de cet axe, doit être  $xR$ ; &  $mxR$  est la force motrice qui est capable de donner à  $m$  cette vitesse  $xR$ . Le moment de cette force particulière est donc  $mx^2R$ , & la somme des momens de toutes les forces partielles, qui animent toutes les parties du corps  $M$  (197), doit être égale au moment de la force  $F$  à l'égard de  $t$ . Nommons,  $MT^2$  le moment d'inertie du corps, relativement à l'axe  $t$ ; &  $FC$ , le moment de la force motrice  $F$ ; on a nécessairement l'équation  $RMT^2 = FC$  qui sert à déterminer la vitesse angulaire du corps lorsqu'on connoît les autres quantités qui entrent dans cette équation.

Si le corps eût été libre, alors les momens indiqués eussent été différens; parce qu'ils eussent été pris à l'égard du centre de masse. Ainsi en comparant ces deux états du corps, on voit, dans celui de liberté, que le point où passe l'axe  $t$  auroit eu une vitesse de rotation, qui est détruite, dans le second état, par la résistance que doit opposer l'axe fixe  $t$ . Mais il est souvent important, que cet axe n'éprouve que le moindre effort possible; ainsi examinons comment on doit diriger la rotation d'un corps autour d'un axe fixe, de maniere qu'elle s'exécute comme si le corps étoit parfaitement libre, ou de maniere que cet axe ne supporte aucune charge.

203. Supposons que le corps sollicité au mouvement, est, par exemple, une lame mince & solide, dont la forme est un parallélogramme  $Anmq$  (fig. 60), & qui est forcée de tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan  $Anmq$ , en un point  $t$ , dont le lieu est à une distance  $ty$  du centre de masse  $y$ . La force excentrique  $F$ , qui produit le mouvement de cette lame, agit en  $r$ , & elle est dirigée suivant  $qr$ . Imaginons actuellement une seconde lame, qui soit parfaitement égale & semblable à la première  $Anmq$ , qui soit invariablement réunie à celle-ci, mais placée de l'autre côté de  $t$ , & qui ait son centre de masse situé en  $T$ , à une distance  $Tt$  du point  $t$ , égale à  $yt$ , sur le prolongement, du plan ainsi que de la diagonale de  $Anmq$ . Imaginons aussi, que ( toutes les parties de cette seconde lame étant disposées à l'égard de  $t$  comme le sont celles de la première ) une seconde force, égale à  $F$ , & dirigée dans le plan commun de ces lames parallèlement à la direction de  $qr$ , mais en sens contraire, agisse sur le point  $Y$  à une distance  $Yt=rt$ ; alors le centre de masse de cet assemblage, ou de cette double lame, est nécessairement en  $t$ . La résultante des deux forces  $F$  &  $-F$  est nulle. Ainsi le point  $t$  doit rester immobile; & le corps doit tendre à tourner autour de l'axe en  $t$ , avec la plus grande liberté, sans que cet axe ait à détruire par sa résistance l'action d'aucune force résultante. Quant à la vitesse angulaire que cette double lame doit prendre autour de l'axe  $T$ , elle est donnée par l'équation  $2.R.MT^2=2.F.C$  parce qu'il y a égalité, entre les momens des forces opposées  $F$ , comme entre les momens d'inertie de l'une & l'autre lame à l'égard de l'axe qui est en  $t$ . Cette équation se réduit à  $R.MT^2=F.C$ . Elle est donc la même que celle qui a été trouvée précédemment; & cette ressemblance fait voir que chacune de ces lames tourne autour de l'axe  $t$ , comme si elle étoit isolée & sans liaison réciproque sous l'impulsion d'une force  $F$  égale & semblablement placée. Elle fait voir de plus que, si l'addition d'une seconde lame égale & d'une seconde force excentrique, ne change pas le mouvement de rotation de la première lame; elle est utile pour empêcher que l'axe de rotation ne supporte

un effort considérable, que par sa résistance il devoit détruire dans le cas où une seule de ces lames tourneroit autour de lui. On voit donc dans l'arrangement des deux corps supposés le procédé qu'on doit suivre pour empêcher qu'un axe de rotation, tel que celui d'un cabestan, d'une roue, &c. supporte une charge nuisible pendant qu'on met en action & ces machines & toutes celles qui leur ressemblent.

204. La vitesse angulaire d'un corps dépend ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, du moment d'inertie de ce corps à l'égard de l'axe autour duquel il fait une rotation quelconque. Examinons par conséquent, & comment on détermine le moment d'inertie d'un corps, & comment ce moment peut varier suivant les divers axes auxquels il est relatif. Soit  $a$  (fig. 36) le lieu d'un corpuscule  $m$ .  $ai$  est sa distance (126) à une ligne  $bc$  (qui est supposée un axe  $A$  de rotation, situé sur le plan  $DE$ ) on a l'équation  $ai^2 = ao^2 + oi^2$ ; lorsque  $ao$  est la distance de  $a$  au plan  $DE$ , &  $oi$  celle du même point à un autre plan qui passant par  $bc$  seroit perpendiculaire au premier. Ainsi on trouve le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe  $bc$ , en ajoutant ensemble les produits de chaque partie de ce corps, multipliée par le carré de sa distance à deux plans perpendiculaires entr'eux, qui passent l'un & l'autre par l'axe supposé de rotation.

Doit-on chercher le moment d'inertie d'un vaisseau (fig. 75. G.) (en le supposant homogène) à l'égard d'un axe  $ab$  qui passe par son centre de masse  $i$ . Il faut imaginer deux plans  $dbga$  &  $acb$  perpendiculaires entr'eux & ayant l'axe  $ab$  pour section commune. Alors on considère ce bâtiment comme décomposé en tranches très-minces qui soient parallèles aux deux plans conventionnels, chacun de ceux-ci sera nommé *horizontal* & *vertical*. On fait une somme des produits de chaque tranche horizontale par le carré de la distance de son centre de masse au plan  $dbga$  qui leur est parallèle. On forme aussi celle des produits de chaque tranche verticale par le carré de la distance de son centre de masse au plan vertical  $aibc$ ; & ces sommes réunies présentent le moment d'inertie d'un vaisseau entier homogène à l'égard

d'un axe tel que *ab*. La supposition d'une très-petite épaisseur de ces tranches permet seule de trouver, avec autant d'exactitude que de facilité dans la pratique, le moment d'inertie d'un bâtiment de mer comme nous le démontrerons ailleurs.

Mais on ne peut considérer un vaisseau comme homogène; & il est au contraire composé, soit dans sa coque, soit dans son gréement, soit dans sa charge, d'une infinité de parties hétérogènes dont les formes autant que les positions respectives sont entièrement variées. Comme un tel sujet est important à approfondir, & qu'il doit être bien connu d'un homme de mer à cause des rotations continuelles qui sont communiquées à un vaisseau ou par des lames, ou par les vents, ou par le gouvernail, ou par les voiles, nous allons joindre ici quelques réflexions utiles sur les momens d'inertie.

205. Nous disons 1<sup>o</sup> que si on connoît le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe *A* qui passe par son centre de masse, on peut en conclure celui qu'il doit avoir à l'égard de tout autre axe parallèle au premier. Soient en effet, *a* le lieu de l'élément, d'un corps dont le centre de masse est en *c*, & deux axes parallèles *icg* & *edf* (fig. 78) qui sont dans un même plan *cicdsg*. Si, de *a* on abaisse sur ce plan une perpendiculaire *ab*, & si de *b* on mène, la ligne *bcd* perpendiculaire aux deux axes, ainsi que les lignes *ac* & *ad*, ces dernières sont les distances de *a* aux deux axes supposés. D'après cette construction, on peut dire que  $ab^2 = ac^2 - cb^2 = ad^2 - (bc + cd)^2$ , ou  $ac^2 + cd^2 + 2.bc.cd = ad^2$ . En raisonnant de même sur chaque élément d'un corps *M*, on voit que le moment d'inertie de *M*, à l'égard de *ef*, est composé 1<sup>o</sup> de son moment d'inertie à l'égard de l'axe *ig*, qui passe par son centre de masse; 2<sup>o</sup> du produit de sa masse totale par le quarré de la distance *cd* des deux axes supposés; & 3<sup>o</sup> de la somme des produits du double de cette dernière distance multipliée par le moment de chaque élément, à l'égard d'un plan, qui passeroit par le centre *c*, & auquel les axes seroient parallèles. Ce dernier moment est, comme on fait, le produit de chaque élément multiplié par sa distance au plan indiqué, & il est né-

cessairement nul, puisqu'il en est ainsi de la somme des momens de toutes les parties d'un corps à l'égard d'un plan quelconque qui passe par son centre de masse. On doit donc conclure que le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe  $A$  quelconque est égal à la somme, du moment d'inertie qu'il peut avoir à l'égard d'un axe parallele à  $A$  qui passe par le centre de masse, & du produit de la masse totale de ce corps multipliée par le quarré de la distance des deux axes paralleles.

206. L'utilité de cette dernière proposition est de faciliter le calcul du moment d'inertie d'un vaisseau à l'égard de son centre de masse. En effet supposons que  $M, N, P, Q$  soient les masses des différentes parties qui composent un vaisseau, & que leur centre de masse particulier soit éloigné d'un axe  $o$ , qui passe par le centre commun de masse ou par celui du vaisseau, à des distances  $x, y, z$ , &  $s$ . Imaginons aussi que dans le centre de masse de chacune des parties du vaisseau il y ait un axe parallele à l'axe commun  $o$  à l'égard duquel on cherche le moment d'inertie. Alors on doit calculer séparément le moment d'inertie de chaque masse partielle à l'égard de son axe particulier parallele à  $o$ ; & si on les représente par  $Ma^2, Nb^2, Pc^2, Qd^2$ , le moment d'inertie du vaisseau, ou celui de l'assemblage de toutes les parties, à l'égard de l'axe  $o$  est,  $M(a^2+x^2) + N(b^2+y^2) + P(c^2+z^2) + Q(d^2+s^2)$ . De cette manière on peut facilement déterminer le moment d'inertie d'un corps aussi irrégulier & aussi hétérogène que l'est un vaisseau. On voit d'ailleurs que les quantités  $a, b, c, d$ , étant supposées infiniment petites (ce qui a lieu dans un bâtiment, lorsqu'on donne peu d'épaisseur aux tranches qui le composent & qui sont paralleles à l'axe donné de rotation) le moment d'inertie est, comme on l'a annoncé plus haut (204), représenté assez exactement par  $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + Qs^2$ , en négligeant les autres termes qui sont très-petits comparativement à ceux-ci.

207. Imaginons qu'un bâtiment soit partagé en deux parties quelconques, dont les masses sont  $M$  &  $N$ , qui ont les points  $a$  &  $d$  (fig. 78) pour centres de masse particuliers, & le point  $m$  pour centre commun de masse. Soit demandé le moment d'inertie de ce vaisseau à l'é-

gard de l'axe  $ig$  qui passe par  $m$ . On doit considérer dans le centre de chaque masse partielle  $M$  &  $N$ , des axes, tels que  $ao$  &  $ef$  qui soient parallèles à  $ig$ . Soit  $Ma^2$  le moment d'inertie de  $M$  à l'égard de  $ao$ ; &  $Nb^2$  celui de  $N$  à l'égard de  $ef$ . Soit aussi menée par  $d$  une ligne  $db$  perpendiculaire à l'axe  $ig$ . Alors par la démonstration précédente le moment d'inertie  $G$  de tout le vaisseau est  $Ma^2 + Nb^2 + M.bc^2 + N.dc^2$ . Mais la propriété du centre commun de masse autorise à dire que  $M.bc = N.dc$ , ou que  $(M+N)bc = N.db$ , ou enfin que  $(M+N)dc = M.bd$ . Le moment total  $G$  est donc  $Ma^2 + Nb^2 + (M+N)bc.dc$ ; mais on a  $(M+N)^2dc.bc = N.M.db^2$  (en multipliant l'une par l'autre les deux dernières équations précédentes) donc  $G = Ma^2 + Nb^2 + T.db^2$  (en faisant  $N.M = T(M+N)$ ). Soit enfin  $d$  la distance  $ad$  des centres de  $m$  &  $n$ , & nommons  $i$  l'angle de  $ad$  avec  $ig$ , alors  $db = d.\sin i$ ; &  $G = Ma^2 + Nb^2 + T.d^2\sin.i^2$ . C'est par cette équation, qu'étant donné, le moment d'inertie d'un vaisseau, & celui d'une de ses parties  $M$ , on peut en conclure celui du reste  $N$  de ce vaisseau à l'égard d'un même axe qui passe par le centre commun de masse; étant connues d'ailleurs les quantités  $T$ ,  $d$ , &  $i$ . Cette même équation fournit aussi le moyen de déterminer les changemens que peuvent opérer dans le moment d'inertie d'un vaisseau, ou l'addition, ou la soustraction, ou le déplacement d'un corps  $P$  dans ce vaisseau. Car la masse du bâtiment, dans le cas de l'addition de  $P$ , doit être regardé comme composé de  $P+V$ . Si on connoît le moment d'inertie  $Pt^2$  de  $P$  à l'égard d'un axe  $A$  de rotation qui passe par son centre de masse particulier, &  $Vm^2$  celui du vaisseau avant l'addition de  $P$  à l'égard d'un axe, parallèle à  $A$ , & passant par son centre de masse. Si  $x$  est enfin la distance des centres de masses de  $P$  &  $V$ , alors le moment d'inertie du vaisseau augmenté du corps  $P$  est  $Pt^2 + Vm^2 + x^2\sin.i^2Q$  (en supposant que  $(V+P).Q = vP$ ). Cette valeur, comparée à celle  $Vm^2$ , fait connoître l'avantage ou le désavantage, (suivant les circonstances) de l'addition d'un nouveau corps à la charge d'un vaisseau. On calculeroit de même l'effet, de la soustraction, ou du déplacement d'un corps quelconque, sur  $Vm^2$ . Ainsi ces principes

sont.



sont très-utiles & très-nécessaires dans la pratique de l'art de la marine, soit pour diriger l'arrimage d'un vaisseau, soit pour en corriger les défauts, ou en augmenter les avantages; soit enfin pour déterminer, par la recherche des momens partiels d'inertie de tous les objets qui composent un vaisseau, le moment total d'inertie de ce bâtiment à l'égard d'un axe donné.

208. Il y a sans doute, dans un corps, un nombre immense d'axes possibles de rotation, même en ne considérant que ceux qui sont assujettis à passer par le centre de masse; & le calcul du moment d'inertie à l'égard de chacun, seroit trop pénible, si on vouloit l'exécuter directement dans tous les cas qui peuvent se présenter. Cependant de tels momens sont toujours importans à connoître, dans un vaisseau qui sollicité, ou par des lames, ou par des courans, ou par le vent, ou par les voiles, ou par son gouvernail, &c. peut prendre des mouvemens de rotation très-variés, soit par leur grandeur, soit par la situation des axes autour desquels ils commencent, se prolongent, ou se succèdent. Mais un tel calcul devient bien abrégé lorsqu'on connoît le moment d'inertie d'un corps à l'égard de trois axes qui sont perpendiculaires entr'eux, & qui passent par le centre de masse. Car on peut en conclure celui du même corps à l'égard de tout autre axe oblique qui passe aussi par ce même centre, pourvu qu'on connoisse l'inclinaison de cet axe à l'égard des trois axes supposés. Ceux-ci seront désignés désormais sous le nom d'axes *conventionnels*. Voici la démonstration de cette proposition.

Soit  $M$  (fig. 79) le lieu d'un élément d'un corps dont  $G$  est le centre de masse. Soient  $GA$ ,  $GD$  &  $GV$ , les trois axes *conventionnels*, &  $Gt$  l'axe oblique à l'égard duquel on cherche le moment d'inertie de ce corps. Soit mené par l'axe  $GV$  un plan qui passe par  $Gt$ , & qui étant perpendiculaire au plan  $DGA$  prolongé, le traverse, & le coupe en  $gs$ . Représentons par  $m$  &  $u$  les sinus & cosinus de l'angle  $AGs$ ; & soit abaissée de  $M$  une perpendiculaire  $ML$  sur le plan  $AGD$ , afin qu'en menant de  $L$  des perpendiculaires sur les lignes  $AG$ ,  $GD$ ,  $GS$ ; les lignes  $MP$ ,  $MQ$ ,  $Mr$ , soient les distances de  $M$  aux

trois axes AG, GD & GS (126). D'après cette construction on peut dire que  $Mr^2 = ML^2 + Lr^2$ . Mais  $Lr = Lo + or$ ; & dans les triangles rectangles LoP & orG on trouve que  $PL = n.Lo$ ; & que  $n.or = n.m.PG - m^2.PL$ ; donc  $n (Lo + or) = PL + nm.PG - m^2.PL = n.m.PG + n^2.PL$ ; donc  $Lo + or = m.PG + n.PL$ . En substituant cette dernière valeur, & en se rappelant que  $m^2 + n^2 = 1$ , on doit dire que  $Mr^2 = m^2 (ML^2 + PG^2) + n^2 (ML^2 + PL^2) + 2.nm.PG.PL = m^2.MQ^2 + n^2.MP^2 + 2nm.PG.PL$ . La valeur de  $Mr^2$  doit être employée actuellement à trouver le quarré de la distance de M à l'axe réel Gt de rotation. A cet effet soient menées (fig. 80), de ce même point M une ligne Mf qui soit perpendiculaire au plan VGts qui passe par l'axe conventionnel GV, & par l'axe de rotation Gt; & du point f, trois autres lignes perpendiculaires l'une fr à Gs, la deuxième fa à Gt, & la troisième fx à GV. Si on joint par des lignes droites le point M avec les points r, a & x, ces lignes représentent les distances de M aux lignes GS, Gt & GV. D'après cette construction on peut dire que  $Ma^2 = Mf^2 + fa^2$ . Nommons p & q les sinus & cosinus de l'angle SGT, & considérons les triangles rectangles fir, iGa; nous verrons que  $q.fi = fr$  & que  $q.ia = qp.Gr - p^2.fr$ , ou que  $fa = q.fr + p.gr$ . Donc  $Ma^2 = Mf^2 + (q.fr + p.gr)^2 = q^2 (Mf^2 + fr^2) + p^2 (Mf^2 + gr^2) + 2qp.fr.Gr = p^2.Mx^2 + q^2.Mr^2 + 2qp.fr.gr = p^2.Mx^2 + q^2 (m^2.MQ^2 + n^2.MP^2 + 2nm.PG.PL) + 2qp.fr.GV$ . Afin de simplifier une telle expression, imaginons que le point G soit le centre d'une sphère (qui a pour rayon celui des tables); & que les trois axes conventionnels aboutissent à sa surface en A, D & V (fig. 81) qui sont des points réciproquement séparés par des arcs de 90°. Soit T le lieu de l'extrémité de l'axe de rotation Gt. Soient aussi menés par T les arcs TA, TV, ainsi que l'arc DR qui est perpendiculaire sur l'arc ARV. Les sinus & cosinus de VR, sont m & n; ceux de TD sont q & p. Représentons aussi ceux de TA par b & d; & ceux de Tv par f & g. Alors dans les triangles TRA & TRV, on trouve que  $qn = g$  &  $qm = d$ . Ainsi en substituant au lieu de m & n leur valeur dans l'expression de  $Ma^2$  (afin que dans celle-ci il ne soit question que des angles formés par l'axe de ro-

tation  $Gt$  avec les trois axes conventionnels ), on aura l'équation suivante  $Ma^2 = p.^2 Mx^2 + d.^2 MQ^2 + g.^2 MP^2 + 2gd.PG.PL + 2pg.ML.PG - 2pd.ML.PL$  ( en remarquant que  $fr = ML$  &  $Gr = n.GP - m.PL$  ).

Tel est donc le quarré de la distance d'un seul élément d'un corps à un axe de rotation  $Gt$  qui passe par le centre de masse; & en étendant les mêmes raisonnemens à tous les autres élémens du même corps, on trouveroit une valeur de même forme, pour le quarré de leur distance à cet axe  $Gt$ . Toutes ces valeurs réunies après avoir été multipliées chacune par l'élément correspondant du corps formeroient le moment d'inertie de celui-ci à l'égard de l'axe  $Gt$ . Représentons ses momens d'inertie à l'égard des axes  $GV$ ,  $GA$ ,  $GD$ , par  $MC^2$ ,  $MR^2$  &  $MS^2$ . Indiquons aussi par  $G$ ,  $H$  &  $E$ , la somme des produits de chaque élément multiplié, soit par  $(PG.PL)$ , soit par  $(ML.PG)$ , soit par  $(ML.PL)$ ; & nommons  $MA^2$  le moment d'inertie du corps à l'égard de l'axe supposé  $Gt$ . On aura alors  $MA^2 = p.^2 MC^2 + g.^2 MR^2 + d.^2 MS^2 + 2gd.G + 2pg.H - 2pd.E$ ; c'est-à-dire que le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe oblique qui passe par son centre de masse peut être déterminé; lorsqu'on connoît, & son moment d'inertie à l'égard de trois axes conventionnels, & les sommes de produits tels que  $G$ ,  $H$  &  $E$  qui dépendent de la position de ces derniers axes; ( étant donnés d'ailleurs les angles de l'axe de rotation avec les trois axes conventionnels ).

209. Remarquons, dans cette expression du moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe quelconque qui passe par le centre de masse, des termes qui toujours ont une valeur positive & réelle; parce que les parties du corps, ainsi que le quarré de leur distance, à l'axe donné, sont des quantités nécessairement positives. Mais les parties d'un corps, étant placées, les unes à droite, & les autres à gauche, soit de l'axe  $AG$ , soit de  $DG$ , les unes au-dessus du plan  $AGD$  & les autres au-dessous; on doit reconnoître que le choix des axes conventionnels  $AG$ ,  $GD$ , &  $GV$ , doit influencer particulièrement sur les valeurs des produits  $G$ ,  $H$  &  $E$ . Ce choix enfin peut être tel qu'il produise la nullité entière de ces derniers

produits séparés, sans que les autres termes du moment d'inertie cessent d'avoir une valeur réelle.

Cette nullité de  $G$ ,  $H$  &  $E$  est aussi facile à concevoir que celle de la somme des momens (191) de chaque partie d'un corps à l'égard d'un plan quelconque dirigé par le centre de masse : & d'ailleurs elle est infiniment avantageuse à établir, soit parce que l'expression du moment d'inertie en devient plus simple & plus petite, soit à cause de son influence sur la grandeur de la vitesse angulaire d'un corps autour d'un axe quelconque. Sous ce dernier rapport, il est donc essentiel pour la marine, qu'on fasse toujours un choix d'axes conventionnels auxquels soit attachée la propriété indiquée, ou la nullité de  $G$ ,  $H$  &  $E$ ; & c'est par cette raison que de tels axes porteront désormais les noms d'axes *principaux*.

Le rapport de la vitesse angulaire  $R$  d'un corps, à son moment d'inertie  $MA^2$  (à l'égard d'un axe de rotation qui passe par le centre de masse), est donné par l'équation déjà démontrée (197)  $R.MA^2 = FD$ , en supposant qu'une force motrice  $F$  agisse avec un moment  $FD$  pour produire ce mouvement de rotation. Ainsi cette vitesse dépend de la valeur de  $MA^2$ . Mais, c'est surtout l'uniformité de cette vitesse angulaire; c'est la régularité; c'est la continuité du mouvement de rotation du corps autour d'un seul & même axe, qui importent à la marine; & on ne les obtient qu'autant que les axes conventionnels sont autant d'axes principaux. Car alors,  $MA^2$  n'éprouve aucun changement dans les diverses situations du corps; & l'action de  $F$  ayant été instantannée, la vitesse  $R$  doit rester la même. Alors aussi l'axe autour duquel le corps commence à tourner ne cesse d'être son axe de rotation pendant la continuation de son mouvement, & ce dernier effet est sur-tout remarquable, parce que c'est dans ce seul état des choses, que peuvent se détruire réciproquement les effets particuliers, qui résultent du mouvement angulaire, & qui tendent à déplacer à chaque instant l'axe primitif de rotation. Il est important d'analyser, & ces effets, & leurs rapports avec la valeur de  $MA^2$ . C'est pourquoi nous allons les faire connoître. Rappel-

lons-nous (190) que toute force motrice  $F$  peut être décomposée en trois autres forces qui soient parallèles à trois axes conventionnels. On peut en dire de même de leurs effets; ainsi nous pouvons considérer la vitesse de rotation d'un corps autour d'un axe oblique, comme composée de trois vitesses de rotation, qui ont lieu simultanément autour des mêmes axes conventionnels. Soit  $Mi+$  (fig. 80) un arc infiniment petit décrit par le point  $M$  autour du point  $x$  de l'axe  $GV$ ; la force partielle qui sollicite séparément le corpuscule  $m$  à ce mouvement ne peut être dirigée que suivant la tangente  $Mo$ . Elle peut donc être décomposée en deux autres forces, l'une suivant l'arc élémentaire  $Mi$ , & l'autre  $Mq$  dans le sens du rayon  $xM$ . La première obtient tout son effet, & la deuxième  $Mq$  qui reçoit le nom de force *centrifuge*, est dirigée directement sur le point  $x$  de l'axe  $GV$ . Celle-ci agit à une distance de  $G$ , égale à  $Gx$  ou  $LM$ ; & elle tend à déplacer cet axe de rotation. Cette force centrifuge, étant représentée par  $xM$ , peut aussi être décomposée en deux autres qui soient parallèles & égales aux lignes  $Mf$  &  $fx$ ; & les momens de ces dernières, pour déplacer  $GV$ , sont exprimés par  $fx.Gx$  ou  $Gr.LM$ , & par  $Mf.Gx$  ou  $ML.Lr$ . En raisonnant de même sur les effets de la rotation de l'élément  $m$  du corps autour de  $AG$ , deux forces agissent aussi pour le déplacer, l'une avec un moment  $ML.PG$ , & l'autre avec le moment  $PL.PG$  (fig. 79). Enfin les deux forces, qui tendent à déplacer  $GD$  pendant la rotation de  $m$  autour de cet axe, ont des momens  $ML.PG$  &  $PL.PG$ . On fait d'ailleurs par ce qui précède (208) que  $ML.Lr = ML(m.PG + n.PL)$  & que  $ML.Gr = ML(n.GP - m.PL)$ . Il s'ensuit donc que les sommes des momens relatifs des forces centrifuges qui agissent pour déplacer chaque axe conventionnel à raison de la rotation de toutes les parties du corps  $M$  autour de ces axes, dépendent de la valeur de produits tels que  $G$ ,  $H$  &  $E$ . Ces axes de rotation ne peuvent donc être constamment les mêmes pendant la rotation d'un corps; ou ils ne peuvent correspondre aux mêmes points de l'espace que dans le seul cas où ces produits  $G$ ,  $H$  &  $E$  se réduisent à zéro séparément. Il

faut donc enfin que ces axes conventionnels soient autant d'axes principaux, si on veut obtenir que la rotation du corps continuë, à l'égard du même axe oblique autour duquel elle a pu commencer; c'est-à-dire s'il est nécessaire que ce mouvement soit régulier & uniforme. Une telle nécessité est reconnue dans l'art de la marine, puisqu'il faut que tous les mouvemens de rotation d'un vaisseau soient doux, faciles & réguliers. Comme les plus ordinaires des rotations des bâtimens de mer sont, des tangages, des roulis, des arrivées, ou des auloffées, ou des abattées, c'est-à-dire des rotations autour de trois axes qui sont parallèles, l'un à la longueur, l'autre au maître bau, & le troisième au creux; le choix des axes conventionnels dans un vaisseau doit nécessairement tomber sur ces trois axes désignés qui passent par le centre de masse; & on doit dès-lors tout faire, pour qu'ils aient le nom & la propriété d'axes *principaux*. C'est en les rendant tels, qu'on peut obtenir la plus grande douceur, comme la facilité convenable dans les rotations d'un vaisseau autour d'un axe quelconque; & on produit ces effets qui sont si importans à la navigation, par un ordre très-simple à établir dans le placement de toutes les parties qui composent la masse entière d'un vaisseau armé.

Cet ordre est fondé sur les valeurs de  $G$ ,  $H$ , &  $E$ ; & pour le développement de leurs rapports, imaginons trois plans qui passent, par les trois axes désignés, ainsi que par le centre de masse; & donnons à ces plans les noms d'*horizontal*, de *vertical*, & de *diamétral* ou d'*élévation*. Il faut donc que cet ordre soit tel dans un vaisseau, ou il faut que la charge totale soit distribuée de manière, qu'à même hauteur au-dessus ou au-dessous du plan horizontal  $AGD$ , toutes les parties ayant une même masse & prises deux à deux, soient placées à égale distance, de part & d'autre du plan diamétral  $VG A$ . Car alors les sommes des produits tels que  $(LP.GP)$  &  $(LM.LP)$  sont nécessairement nulles séparément. Il faut en même-temps que de part & d'autre du plan vertical  $DGV$  & à même distance du plan  $AGD$ , les parties égales de ce vaisseau soient placées, (prises deux à deux) à égale distance du plan vertical; parce que cette seconde

espece d'arrangement entraîne la nullité de la somme des produits tels que (LM.PG).

Ces regles ou ces conditions peuvent aisément être remplies dans un vaisseau; & elles doivent l'être, parce qu'elles ne contrarient nullement celles auxquelles sont attachées les autres qualités dont doit être doué un bon bâtiment de mer. En disposant, suivant ces principes, toutes les parties d'un vaisseau qu'on arme complètement, les trois lignes qui menées par son centre de masse, sont paralleles à ses trois grandes dimensions, deviennent donc autant d'axes *principaux*; & alors ce vaisseau est susceptible de tourner avec autant de régularité que de douceur & d'uniformité, non-seulement autour de l'un de ces axes principaux; mais aussi autour d'un axe oblique quelconque, qui passe par le centre de masse.

Une théorie plus élevée fait connoître d'ailleurs, ces axes principaux, comme étant ceux à l'égard desquels les momens d'inertie, d'un corps ainsi que d'un vaisseau, ont la plus grande ou la plus petite valeur, c'est-à-dire qu'ils sont des *maxima* ou *minima*. Elle fait voir aussi que si le nombre de ces axes, qui nécessairement doit être de trois, étoit plus grand, ces axes seroient en nombre infini dans le même corps. Mais les lumières données précédemment sur un si beau sujet, suffisent à l'homme de mer, puisqu'elles prescrivent des regles d'arrimage qui sont faciles & sûres à exécuter; ainsi nous n'entendrons pas davantage ces spéculations parce que nous devons les limiter sur les besoins de l'art de la marine, ou les borner à éclairer convenablement la pratique de cet art.

210. Jusqu'ici nous n'avons parlé que de la vitesse uniforme qui anime un corps lorsqu'il est sollicité instantanément à se mouvoir par une force qui après avoir agi sur lui avec toute son énergie, l'abandonne à lui-même ainsi qu'à l'impulsion qu'il a reçue. Mais cette force peut être supposée renouveler son action successivement à chaque instant de la durée, sur ce même corps. Cette action peut être différente ou égale. Elle peut être ou dirigée dans le sens de la vitesse du corps, ou lui être inclinée, ou lui être directement contraire. Cette force

est nommée *accélératrice*, si elle augmente la vitesse du corps, & *retardatrice* si elle tend à la diminuer. Si son action répétée ne varie ni en énergie, ni en direction, elle est nommée *force accélératrice* ou *retardatrice constante*; mais on lui donne le titre de *variable*, si elle change d'une manière irrégulière quelconque.

Considérons généralement un corps  $M$  dans ce nouvel état; & supposons qu'une force accélératrice constante  $F$  soit sans cesse appliquée à son centre de masse, pour lui donner à chaque instant une vitesse  $u$ ; c'est-à-dire imaginons que la force  $F$  exerce sur  $M$  une action qui se répète également à chaque instant de la durée, (en regardant chacun de ces instans comme infiniment petits, & comme représentans autant d'unités de temps (183)). Supposons aussi que sa direction ne cesse pas d'être la même, ou dans le sens du mouvement du corps. Alors celui-ci acquiert, dans la première unité de temps une vitesse  $u$ . Dans le deuxième instant sa vitesse est  $2u$ ; dans le troisième sa vitesse est  $3u$ ; & enfin après un temps  $t$  ou un nombre  $t$  d'instans, le corps a acquis une vitesse  $tu$ , ou une vitesse finale qu'on peut représenter par  $v$ . Comme  $Mu$  est une quantité proportionnelle à  $F$  (puisque la grandeur de  $F$  doit être exprimée, par la vitesse  $u$  qu'elle est capable de communiquer à une masse donnée  $M$  dans l'unité de temps.) on peut dire, que  $Mu = F$ . Ainsi  $Mtu = Ft$ ; or  $tu = v$  donc  $Mv = Ft$ . Telle est une des équations fondamentales, des mouvemens variés uniformément; car elle indique le rapport de la vitesse finale, à la durée de l'action, & à l'énergie de la force  $F$ , sur un corps  $M$ .

Si on veut connoître l'espace total  $E$  que parcourt un tel corps  $M$  pendant le temps  $t$ ; il faut considérer le mouvement de  $M$  pendant chaque unité de temps dont la durée est infiniment petite, comme étant uniforme: puisqu'on suppose (pour mieux analyser les vitesses accélérées), que la force qui le produit, n'agit & ne se répète qu'au commencement de chacun de ces instans. Ainsi pendant le premier instant où le corps reçoit une vitesse  $u$ , l'espace qu'il parcourt doit être proportionnel à  $u$  (183). Pendant le deuxième instant, le corps est



animé de deux degrés de vitesse, représentés par  $2u$ , ainsi il parcourt un espace  $2e$  & ainsi de suite. Pendant la dernière unité du temps  $t$ , & après avoir acquis un nombre  $t$  de degrés de vitesse  $u$ , l'espace qu'il parcourt est donc  $te$  & sa vitesse  $tu$  est  $v$ . L'espace total, par conséquent, qui est parcouru par le corps  $M$  depuis le commencement de son mouvement accéléré, & pendant le temps  $t$ , en raison de l'action constante, égale, & continue de la force  $F$ , est donc la somme des termes d'une progression arithmétique ( $e, 2e, 3e, 4e$  &c) dont le premier terme est  $e$  & le dernier  $te$ . Cette somme est égale à  $(te+e)\frac{1}{2}t$ . Mais l'espace  $e$  qui est parcouru dans un instant insensible, n'est pas comparable à l'espace  $te$ , c'est pourquoi il peut être négligé à l'égard de ce dernier, sans craindre de commettre une erreur appréciable dans la somme  $(e+te)$ . C'est pourquoi l'espace total  $E$  parcouru pendant le temps  $t$  avec une vitesse également accélérée est donné par cette équation  $E=\frac{1}{2}Vt$ , car  $te=V$ . On a vu plus haut que  $MV= Ft$ , ainsi  $ME=\frac{1}{2}Ft^2$  & si on représente par  $Mp$  la quantité  $F$ , cette équation fondamentale des mouvemens accélérés ainsi que la précédente, se réduisent à celles-ci,  $V=pt$  &  $E=\frac{1}{2}pt^2$ , ou  $2pE=V^2$ .

Si deux corps sont animés par des forces accélératrices différentes qui soient entr'elles comme  $p$  &  $q$ ; mais constantes, pendant des temps représentés par  $t$  &  $T$ . Ils doivent acquérir des vitesses finales  $v$  &  $Z$ , & parcourir des espaces  $E$  &  $G$ , tels qu'on a les proportions  $V:Z::pt:qT$  &  $E:G::pt^2:qT^2::V^2:Z^2$ . Les rapports de leurs vitesses finales, ainsi que ceux des espaces parcourus sont ainsi exprimés par ceux des temps & des forces accélératrices & des espaces. Lorsque les forces sont égales, & lorsqu'elles agissent sur des corps égaux pendant des temps différens, on voit que les vitesses finales ou acquises sont comme les temps des mouvemens; & on voit aussi que les espaces parcourus sont alors comme les quarrés des temps, ou comme ceux des vitesses.

211. Ajoutons encore que si on compare les espaces qui sont parcourus pendant un même temps  $t$ , par deux corps égaux, dont l'un par des accélérations successives

acquiert une vitesse finale  $v$ , & dont l'autre se meut avec une vitesse uniforme telle que  $v$ ; ces espaces sont dans le rapport de  $\frac{1}{2} vt$  &  $vt$  (183). Le deuxième parcourt donc uniformément un espace double de celui qu'une marche accélérée fait franchir au premier. On peut dire aussi que si un corps après s'être mu d'un mouvement régulièrement accéléré pendant un certain temps, vient à se mouvoir d'un mouvement uniforme, pendant le même temps, & avec une vitesse égale à celle qu'il a acquise par des accélérations constantes & successives, il doit parcourir un espace double de celui qu'il a parcouru par son mouvement accéléré.

212. Les mêmes équations sont applicables au cas où la force est retardatrice constante. Alors la quantité  $u$  représente le degré de vitesse que la force  $F$  anéantiroit à chaque instant, dans un corps animé primitivement d'une vitesse quelconque. La quantité  $E$  exprimeroit aussi l'espace total, que cette force l'empêcheroit de parcourir pendant le temps  $t$  avec sa vitesse primitive, & par conséquent ce seroit l'espace qui seroit à retrancher de celui que le corps auroit franchi avec la vitesse dont il étoit animé lorsque la force retardatrice a commencé à agir sur lui.

Si la force accélératrice ou retardatrice qui sollicite un corps n'agit pas, également & uniformément, mais d'une manière différente à chaque instant; alors la vitesse acquise par ce corps au bout du temps  $t$  doit être la somme des degrés variés de vitesse que cette force a fait passer dans  $M$  pendant  $t$ ; & l'espace total parcouru par  $M$ , est la somme d'une suite de petits espaces, (qu'on peut regarder comme étant parcourus chacun uniformément pendant chaque instant insensible de la durée). Ces espaces n'ont alors entr'eux d'autres rapports que ceux qui dépendent des accroissemens successifs de la vitesse du corps, & on ne peut les sommer, que lorsqu'on connoît la loi de ces mêmes accroissemens. D'ailleurs les principes relatifs aux mouvemens uniformes qui s'exécutent pendant des temps d'une grandeur finie, peuvent s'appliquer à ces mouvemens variés, en ne leur supposant qu'une durée infiniment petite. Il est

superflu d'avertir que ces mêmes réflexions s'adaptent également aux effets des forces retardatrices variables. Il l'est aussi de dire, que si ces forces constantes ou variables, ont des directions qui ne passent pas par le centre de masse des corps qu'elles sollicitent au mouvement; elles accélèrent ou retardent non-seulement la vitesse progressive, mais aussi la vitesse angulaire, qu'elles leur communiquent dans cette supposition. Lorsqu'une force accélératrice ou retardatrice, agit sur un corps dans le sens de son mouvement primitif, elle ne peut en changer la direction; mais si, animé d'une vitesse qui lui feroit parcourir *de* par exemple pendant l'unité de temps (fig. 18), & uniformement, il est sollicité en *d* par une force capable de lui faire parcourir dans le même temps un espace tel que *eo*, alors le corps doit suivre la diagonale *do*; & sa nouvelle direction fait avec celle de sa vitesse première un angle *edo*. Ensuite ce corps, étant arrivé en *o*, au commencement de la deuxième unité de temps, tend à se mouvoir suivant le prolongement *ou* de la ligne élémentaire *od*. Mais si alors une seconde force agit sur lui au point *o*, & si elle est capable de lui faire parcourir *um* dans l'unité de temps, sa vitesse acquise changera de nouveau, & sa direction sera *om*: de sorte qu'après un temps *t*, le corps au lieu de s'avancer sur une ligne droite *des*, doit tracer dans l'espace une route curviligne, dont la courbure est relative à l'intensité comme aux variations de la force accélératrice qui répète successivement & à chaque unité de temps, son action sur un tel corps.

Tels sont les principes les plus utiles de la mécanique de l'homme de mer. Leurs conséquences sont infiniment nombreuses; elles sont très-variées dans leurs applications à l'art de la marine, comme on le verra dans la suite de ce traité.

213. *De la communication du mouvement en général.* Les forces ou les puissances dont on observe les effets dans l'univers, ne communiquent du mouvement qu'en faisant agir des corps sur d'autres corps, soit par des chocs immédiats, soit par des attractions ou des affinités, soit par le moyen de certaines machines qui servent à

varier ou à modifier leur application aux corps. La nature des forces reste encore ignorée ainsi que la liaison qu'elles ont avec leurs effets ; mais une telle connoissance n'est pas celle qui est le plus nécessaire à l'homme de mer ; & il lui est plus utile d'être instruit des loix de la communication du mouvement. Ces loix doivent donc nous occuper exclusivement , puisqu'un voile que personne n'a pu encore soulever nous empêche de voir comment la nature produit les phénomènes du mouvement. Ainsi nous commencerons par traiter des loix du choc des corps. Nous examinerons ensuite les bases sur lesquelles sont établies les machines qu'on a adoptées , ou qu'on peut imaginer encore ; pour faire naître , entretenir , altérer , ou éteindre le mouvement suivant les circonstances ; & nous réserverons pour le dernier objet de ce traité , les forces physiques ou naturelles dont l'influence est utile ou nuisible dans la pratique de l'art de la marine.

Les corps que la nature nous présente , ne sont doués , ni d'une dureté , ni d'une mollesse , ni d'une élasticité , qui soient parfaites ; & s'ils ont de la roideur ou de la flexibilité , jamais ces propriétés ne sont à un degré tel , que la liaison de leurs parties élémentaires , puisse résister complètement , ou céder sans résistance , à une forte compression. Si des corps naturels paroissent réductibles à un moindre volume , nous ne pouvons cependant nous empêcher de croire que leurs élémens premiers , ou les corpuscules qui les composent , sont d'une dureté parfaite ; & on ne peut concevoir les corps mous & élastiques , que comme des assemblages de corpuscules durs qui sont liés plus ou moins fortement ensemble , & qui sont séparés par des intervalles , ou par des pores plus ou moins étendus. Ce sont ces pores , & des attractions ou des affinités mutuelles , qui sont les causes prochaines de l'organisation plus ou moins ferme & solide des corps naturels ; & c'est suivant l'énergie de ces causes , que les corps se rapprochent ou s'éloignent des classes de ceux qui ont , ou une dureté , ou une mollesse , ou une élasticité parfaite.

Quoique ces états extrêmes paroissent ne pas exister

dans la nature; & quoiqu'une dureté invincible, semble ne convenir qu'aux élémens premiers des corps; cependant il devient nécessaire de considérer ces états pour prononcer aisément sur les états intermédiaires qui sont ordinaires aux corps physiques. Il faut, pour traiter de la communication du mouvement à des corps plus ou moins faciles à comprimer, connoître comment se fait cette communication à des corps incompressibles; & enfin, pour juger de l'effet de la tendance imparfaite d'un corps, à reprendre sa forme lorsqu'elle a été altérée par une impulsion quelconque, il faut examiner la conséquence de l'élasticité, ou de la mollesse, lorsqu'elles sont portées au plus haut degré dans les corps qui se choquent.

214. La première question qui se présente, est de savoir quelle est, après leur choc, la vitesse de deux corps parfaitement durs qui se sont rencontrés dans l'espace. Un tel corps  $M$  est-il animé d'une vitesse  $a$ ; la force  $F$  qui a été capable de la lui communiquer est  $Ma$ ; & comme on ne suppose aucun obstacle au mouvement de  $M$ ; comme ce corps conserve sans altération la quantité de mouvement  $Ma$  (183); il s'ensuit que dans chaque point de sa route, on peut le considérer comme si l'action de la force  $F$  venoit de lui être appliquée. Ainsi on peut donc concevoir que cette force  $F$ , agit sur  $M$  dans le même moment où celui-ci arrive en contact immédiat avec un nouveau corps  $N$  qui est en repos & parfaitement dur; c'est-à-dire au moment où ces deux corps  $M$  &  $N$ , semblent ne plus former qu'un même corps par leur réunion. Dans cet état de choses, la force  $F$  (en supposant que sa direction passe par le centre des deux corps) qui n'est appliquée qu'au corps  $M$ , ne peut cependant agir que sur l'assemblage des deux corps  $M$  &  $N$ ; & puisque d'ailleurs son effet est instantané comme son action; c'est-à-dire que la dureté des deux corps, fait qu'au même moment toutes les parties égales de cet assemblage reçoivent une égale impulsion partagée, le centre commun des masses de ces corps doit être mu avec une vitesse  $x$  telle que  $x(M+N) = F = Ma$  (192).

Si le corps dur  $N$ , se trouvoit animé, (dans le sens de  $a$ ) d'une vitesse  $b$ , au moment où il se réunit au

corps M, on peut dire aussi, par les mêmes raisons; que  $x (M+N) = F+f$  (en supposant comme précédemment que les directions des forces motrices passent par les centres particuliers des masses M & N, qui sont par conséquent sur une même ligne; & en nommant  $f$  la force qui peut donner à N une vitesse  $b$ ). On peut donc dire que  $x (M+N) = Ma+Nb$ , si  $x$  représente la vitesse communiquée au centre commun de ces masses. Nous devons remarquer que si la vitesse  $b$  avoit une direction contraire à celle de  $a$ , alors l'équation seroit de cette forme  $x (M+N) = Ma-Nb$ . Ces équations sont fondées sur ce qu'un assemblage de corps, étant sollicité au mouvement par des forces quelconques qui sont dirigées par le centre commun de masse doit se mouvoir, comme si les corps composans étoient réunis dans ce centre, & comme si les forces étoient toutes appliquées sur ce centre avec leur direction propre (196). Telle est donc la situation de deux corps au moment où finit leur choc. Leur vitesse doit être exactement la même, puisqu'alors ils ne peuvent agir plus long-temps l'un sur l'autre; & une telle vitesse est indiquée par les équations précédentes. Celles-ci sont d'ailleurs générales; puisqu'elles embrassent, le cas où l'un des corps durs est en repos, ainsi que ceux où leurs vitesses quelconques sont dirigées dans un même sens, ou dans des sens contraires. On en conclut directement, que les masses & les vitesses contraires étant égales, la vitesse  $x$  du centre de masse est nécessairement nulle; & cette conséquence est évidemment juste sans être démontrée par aucun calcul. Car des corps égaux, viennent-ils à se rencontrer avec des vitesses égales, dirigées dans des sens opposés; il n'est aucune raison qui puisse assurer, le moindre avantage, ou la moindre supériorité d'un de ces corps sur l'autre; c'est pourquoi tous deux, après le choc, doivent se réduire à un parfait repos.

215. Si le corps choquant M est compressible, alors ceux de ses élémens qui arrivent les premiers en contact avec N, exercent leur choc sur celui-ci sans que les autres élémens qui les suivent, lui impriment aucune impulsion; c'est-à-dire que les premiers éprouvent

des changemens dans leur vitesse , tandis que celle de tous les autres reste entiere & sans altération , puisqu'on suppose que l'assemblage de ces élémens dans le corps  $M$  , est flexible & sans roideur. En analysant ainsi sur cette base , & les effets , & l'ordre suivant lequel ils se succedent , dans le choc des corps compressibles ; on voit que ce choc ressemble peu à celui des corps durs. Dans ceux-ci , la liaison des parties est si forte qu'elles ne peuvent s'approcher mutuellement les unes des autres ; & aussi-tôt qu'une seule partie choquante ou choquée vient à recevoir la moindre vitesse ; la dernière & les intermédiaires acquierent en même temps une vitesse parfaitement égale. Dans les corps compressibles , au contraire , les parties peuvent se replier les unes sur les autres ; des impulsions immédiates peuvent en mouvoir quelques-unes sans que ces impulsions soient transmises aux parties éloignées , lorsque la mollesse de ces corps est la plus grande possible. C'est pourquoi un corps compressible  $M$  , animé d'une vitesse  $a$  , vient-il frapper un corps  $N$  qui dans le même sens a une vitesse  $b$  ; aussi-tôt que ces corps arrivent en contact , les corpuscules antérieurs de  $M$  sont refoulés par  $N$ . Ils perdent leur vitesse primitive , & malgré ce changement dans cette portion de  $M$  , des corpuscules postérieurs conservent leur vitesse primitive  $a$ . Le choc des premiers corpuscules de  $M$  qui ont agi sur  $N$  , & qui se replient sur le centre de masse , est suivi du choc de nouveaux corpuscules plus éloignés de  $N$  ; & ces élémens choquans se succedent , en ne cessant , par la perte de leur vitesse partielle ou totale , de faire passer dans le corps  $N$  , de nouveaux degrés de vitesse qui enfin soustraient celui-ci , à toute action du corps  $M$ . Si on vouloit analyser le mouvement intérieur de chaque partie choquante ou choquée , les détails en seroient immenses , pénibles , très-difficilieux , mais nous parviendrons à trouver la vitesse de ces corps , après leur choc , en ne considérant que le mouvement des centres particuliers des masses  $M$  &  $N$ . On voit que le moment où le choc de ces corps vient à cesser , le moment où l'un n'a plus d'action sur l'autre , est celui où le centre de masse de chacun a une égale vitesse que

je nomme  $z$ . Cet état des choses n'a lieu que lorsqu'une portion  $Mq$  de la masse  $M$ , qui a été comprimée dans le choc, a éprouvé un tel changement dans sa vitesse primitive  $a$ , qu'elle ne se trouve plus animée que d'une vitesse  $u$ , tandis que le reste  $(M - Mq)$  de ce corps  $M$  conserve toujours sa vitesse  $a$ . Si on suppose, que  $z$  soit la vitesse du centre de masse de  $M$  au moment de la fin du choc; ce corps doit donc être regardé, à cette époque, comme composé de deux parties dont l'une  $Mq$  est sollicitée au mouvement par une force  $Mq.u$ ; & l'autre  $(M - Mq)$  par une force  $(M - Mq) a$ . De sorte que le centre de masse de  $M$  a une vitesse  $z$  qui est exprimée (192) par l'équation  $Mz = (M - Mq) a + Mq.u$ .

Si le corps  $N$  est compressible aussi; soit  $x$  la vitesse de la portion comprimée  $NS$  de ce corps, au moment où le choc est terminé, tandis que  $b$  ne cesse d'être, comme avant le choc, celle de la partie antérieure de  $N$ , ou de sa partie restante  $(N - NS)$ . Alors l'équation  $NS.x + (N - NS) b = Nz$  doit, par des raisons rapportées précédemment, faire connoître la valeur de la vitesse  $z$  qu'on suppose à  $N$  à la fin du choc.

Remarquons que la partie  $Mq$ , avant le choc, se mouvoit avec une vitesse  $a$ , & qu'on pouvoit la regarder comme sollicitée isolément par une force  $Mq.a$ . Cette force pouvoit être regardée comme composée d'une force  $Mq.u$  (qui entretient encore le mouvement de  $Mq$  au moment où finit le choc) & d'une deuxième force  $Mq(a - u)$  qui, dirigée dans le sens de  $a$ , est détruite par le choc. De même la force  $NS.b$  qui donnoit avant le choc à une partie  $NS$  de  $N$ , une vitesse  $b$ , peut être regardée comme composée de deux forces [contraires, l'une  $NS.x$  dans le sens de  $a$ , & l'autre  $NS(x - b)$  dans le sens contraire. Cette dernière est encore détruite dans le choc, parce que la partie  $NS$  a une vitesse  $x$  à la fin du choc. Ainsi comme elle est directement opposée à la force  $Mq(a - u)$  qui est aussi anéantie; il faut que ces deux forces contraires se soient détruites réciproquement dans le choc, puisqu'on ne suppose aucune force étrangère qui agisse pendant la collision des corps

M & N



M & N. Ces deux forces sont donc égales, ce qui est exprimé par l'équation  $Mq (a-u) = NS (x-b)$ .

Rassemblons actuellement les valeurs de  $M\zeta$  &  $N\zeta$ . On peut dire que  $(M+N) \zeta = (M-Mq) a + Mq. u + NS. x + (N-NS) b = Ma + Nb + Mq (u-a) + NS (x-b) = Ma + Nb$ . On voit donc que si deux corps compressibles se rencontrent directement dans l'espace, la vitesse de leur centre de masse, au moment de la fin du choc, est exactement égale à celle qu'auroient ces corps s'ils étoient parfaitement durs.

Suivons actuellement les conséquences du choc, dans les corps durs, mous & élastiques. Aussi-tôt que le choc est achevé, si les corps sont durs, ils se suivent sans se séparer; mais sans agir ensuite l'un sur l'autre; & toutes leurs parties ont une même vitesse. S'ils sont mous, & si les parties comprimées ne tendent pas à reprendre leurs places primitives, les corpuscules postérieurs de M au nombre de  $(M-Mq)$ , combattent les parties comprimées  $Mq$  jusqu'à ce que toutes les parties du corps s'avancent avec une même vitesse  $\zeta$ . Ensuite le corps M conserve jusqu'à un nouveau choc l'état de compression où il a pu être réduit, soit par la rencontre de N, soit par l'action réciproque des parties qui dans le corps M sont animées de différentes vitesses. (On raisonneroit de même sur la situation de N). Supposons que les deux corps choquant & choqué soient parfaitement élastiques. On fait que leurs parties comprimées tendent à reprendre leur forme première après le choc, & avec une force qui est égale à celle qui a servi à les comprimer. On fait aussi que leur ressort tend à se dilater vers le côté qui offre le moins de résistance à cette extension. Ainsi, lorsque la compression de ces corps est achevée; comme ils sont en contact par leurs parties extrêmes; comme celles-ci se gênent dans leurs mouvemens, si leur dilatation se faisoit du côté des points de contact; alors elles s'appuient les unes sur les autres, & leur ressort se détend vers les côtés qui sont opposés aux points de contact. Rappelons-nous actuellement, que la force perdue dans le choc par la partie  $Mq$  du corps M, ou celle qui a contribué à sa compression, est  $Mq (a-u)$  qui

n'est autre chose que  $M(a-z)$  ; 2° que la compression de NS dans le corps N est due à la force acquise NS ( $x-b$ ) ou N ( $z-b$ ) ; c'est pourquoi le centre de M, immédiatement à la fin du choc, est sollicité de se mouvoir, & par une force  $Mz$ , & par une force élastique contraire  $M(a-z)$  qui résulte de la compression de  $Mq$ . La vitesse  $r$  est donc alors exprimée par l'équation  $rM = Mz - M(a-z)$  ou  $r = 2z - a$ . C'est la vitesse réelle que le centre du corps élastique & choquant M doit prendre après le choc. Le centre de masse de N est aussi, après le choc, sollicité à se mouvoir & par une force primitive  $Nb$ , & par la force élastique N ( $z-b$ ) qui a comprimé NS. Ainsi la vitesse du centre de masse  $r$ , devient après le choc ( $2z-b$ ). Ce résultat indique que, pour trouver les vitesses de deux corps élastiques après leur choc, il faut chercher la vitesse commune  $z$  qu'auroient ces corps après le choc s'ils étoient sans ressort ; & ensuite du double de cette vitesse retrancher la vitesse de chacun. Il faut d'ailleurs observer que si les vitesses des corps étoient en sens contraire elles devroient être désignées par des signes différens dans les équations. Remarquons aussi que si un des corps étoit seul élastique, alors la vitesse de l'autre seroit  $z$  & celle du premier seroit  $2z-a$ .

Si l'élasticité étoit imparfaite, ou si la compression de M étant proportionnelle à  $Mq(a-u)$  ou à  $M(a-z)$ , la force de restitution ne l'étoit elle-même qu'à  $pM(a-z)$  ; alors la vitesse  $r$  du centre de la masse M seroit égale à  $z(p+1) - ap$ . L'élasticité de N étant aussi telle, que comprimé par une force N ( $z-b$ ), il ne tende à reprendre sa forme qu'avec une force  $P.N(z-b)$ , sa vitesse  $R = z(p+1) - bP$ . Les quantités  $p$  &  $P$  sont des fractions de l'unité, qui peuvent varier suivant le degré de l'élasticité des corps en raison inverse de leur mollesse ; de sorte que dans le cas d'une élasticité parfaite,  $p$  ainsi que  $P$  ont pour valeur l'unité.

216. Les applications de ces formules sont nombreuses dans l'art de la marine ; car elles embrassent les chocs, ou de vaisseaux entr'eux, ou d'un vaisseau contre des rochers, contre un fond plus ou moins mou. Elles servent encore à juger non-seulement de l'action, des lames,

& des boulets, sur les parties frappées d'un bâtiment, ou d'un corps qui est en repos ou en mouvement; mais aussi des effets que produisent sur les mâts, & le battement des voiles, & les secousses des vergues, & les irrégularités soit des tangages, soit des roulis. Les mêmes principes fournissent d'ailleurs l'explication la plus plausible & de la forme des lames & des variations qu'elles éprouvent ou des effets qu'elles produisent, lorsqu'elles abordent ou des vaisseaux ou les rivages de la mer.

La pratique de l'art de la marine présente beaucoup d'autres exemples de cette espèce, qui intéressans dans leurs détails, peuvent aisément être analysés en employant la théorie précédente & ses conséquences, comme on le verra dans le traité de l'art de la marine.

217. Des *machines* ont été imaginées pour transmettre l'action des forces motrices; & leur usage est de les modifier, ainsi que de varier leur direction, convenablement aux circonstances. Ces machines, plus ou moins composées, ne sont que des combinaisons de machines simples, & ces dernières sont des cordes, des leviers, des plans inclinés, qu'on retrouve aussi dans les poulies, le cabestan, ou le tour, le cric, la vis, & le coin. Nous allons considérer comment, avec ces secours, une force motrice agit sur un corps, soit pour lui communiquer tout le mouvement qu'elle est capable de produire, soit pour augmenter, altérer ou détruire celui que les corps peuvent avoir acquis, ou qu'ils sont sollicités à prendre. Cependant, pour traiter cette matière dans toute sa simplicité, nous ferons abstraction de l'effet de plusieurs causes physiques accidentelles qui influent sur le produit de ces machines. Telles sont, le frottement, la pesanteur, la résistance des fluides, la roideur des cordes, &c.; & nous réserverons ces détails accessoires quoiqu'importans, pour l'article où il sera question des forces naturelles qui ont des rapports utiles avec l'art de la marine.

218. Une *corde*  $Am$  (fig. 60), est-elle attachée fixement en  $A$ ; & est-elle tirée par une force  $F$  qui agit en  $m$ ; cette corde continue, qui est considérée, comme parfaitement souple & flexible, ainsi que sans pesanteur,

doit éprouver une égale tension dans toutes les parties de sa longueur. En effet si la force appliquée en  $m$ , qui tire le premier élément de cette corde, suivant sa propre direction, agissoit obliquement sur le deuxième élément, cette action pourroit être décomposée en deux autres qui seroient dirigées, l'une dans le sens de ce second élément, & l'autre perpendiculairement à ce même élément. Cette dernière force, que nulle autre n'est supposée devoir détruire, devroit alors, à cause de la souplesse du cordage, avoir son entier effet qui consiste à ramener le second élément de cette corde dans la direction exacte du premier. On en diroit de même des autres élémens, & dans cet état la même force qui agit en  $m$  seroit transmise à chaque élément depuis  $m$  jusqu'en  $A$ . Ainsi une corde qui, attachée fixement par une extrémité, est tirée par une force appliquée à l'autre extrémité, présente une égale tension dans tous ses points. On peut dire même que la tension de  $Am$ , dans le sens  $mA$ , est égale à sa tension dans le sens  $Am$ . On peut donc conclure de ce principe que dans quelques points  $o, r, t$ , &c. de la longueur d'une corde  $Am$ , qu'on place un corps à mouvoir; la force motrice qui tire l'extrémité de cette corde doit agir sur le corps, avec autant d'énergie, que si elle lui étoit immédiatement appliquée.

219. De même soit une corde  $nAq$ , qui, étant bien tendue & continue, passe par-dessus un point fixe  $A$ , sur lequel elle peut glisser librement, dans le sens  $qAn$ , comme de  $n$  vers  $q$ , alors la tension de la partie  $nA$  doit être nécessairement égale à celle de la partie  $Aq$ . Car si le point  $A$  de cette corde n'étoit pas autant tiré vers  $n$  qu'il peut l'être vers  $q$ , il céderoit à la traction la plus puissante; puisqu'aucun obstacle n'est supposé l'empêcher de prendre ce mouvement. Ainsi une corde tendue  $nAq$  qui est continue, en repos, & qui passe par-dessus le point  $A$  sur lequel elle peut glisser librement, est nécessairement tendue également dans tous ses points.

Si  $mA$  représente le cable d'une ancre qui est mouillée sur le fond horizontal  $Az$  de la mer; son obliquité à l'égard de  $Az$ , fait voir qu'une force qui agit en  $m$  dans

le sens de  $mA$ , & qui agit de même sur l'ancre en  $A$ , tend à tirer l'ancre & dans le sens  $Az$ , & dans celui  $Mz$  (perpendiculaire à  $Az$ ), puisque cette force peut être décomposée (186) en deux autres forces dirigées suivant ces lignes. Soit  $L$  la force motrice, & soit  $i$  l'inclinaison du cable  $mA$  à l'égard de l'horizon : alors la force suivant  $Mz$ , qui tend à arracher l'ancre du fond de l'eau, est égale à  $L \sin i$ . La diminution de cette tendance dépend donc de celle de  $\sin i$ , ou de la longueur du cable  $mA$ , car  $mz = mA \sin i$ . C'est pourquoi (comme l'expérience le confirme) l'action des lames & du vent, parvient d'autant moins aisément à faire déraiper une ancre, que le cable de celle-ci reçoit une plus grande longueur.

C'est aussi par de telles décompositions, qu'on peut aisément discerner l'effet ou d'une emboîture, ou d'une amarre, ou d'un hauban, d'un étai, ou de divers cordages, qu'on emploie dans les ports, dans les rades, ou à la mer, pour varier les positions & les mouvemens d'un vaisseau. On en conclut aussi les avantages ou les inconvéniens attachés aux situations adoptées pour plusieurs manœuvres, telles que bras, balancines, cargues, drailles, &c.

220. Si deux cordes  $An$  &  $Aq$  (fig. 60) sont attachées par leur extrémité à un corps placé en  $A$ ; & si les forces qui agissent par le moyen de ces cordes, sont représentées par les longueurs  $An$  &  $Aq$ , elles tendent à faire parcourir au corps la diagonale  $Am$  (186) du parallélogramme dont  $An$  &  $Aq$  sont les côtés. L'effort  $R$  qui résulte de la combinaison de ces forces, ou la force qui lui est égale & directement opposée, est déterminée par cette proportion  $R : An + Aq :: \cos \frac{1}{2} a : \cos \frac{1}{2} (c - b)$  (les angles  $nAq$ ,  $nAm$ ,  $mAq$  sont nommés  $a$ ,  $b$  &  $c$ ). C'est pourquoi, la différence  $(c - b)$  étant nulle, la valeur de  $R$  s'éloignera d'autant moins de  $(An + Aq)$  que  $a$  différera plus de  $180^\circ$ . C'est ainsi que deux canots étant armés pour remorquer un bâtiment placé en  $A$ , à l'aide des cordages  $An$  &  $Aq$ ; leur effet devient d'autant plus grand que l'angle  $nAq$  des remorques est plus petit; & si l'un des canots est mieux armé que le second il

doit aussi se placer à moins de distance, que le dernier, de la route qu'on se propose de faire tenir au vaisseau. De même deux ancres mouillées en  $n$  &  $q$ , doivent contribuer, à retenir un vaisseau contre les efforts du vent & des lames qui le poussent dans le sens  $mA$ , avec une force d'autant plus grande que le même angle  $nAq$  est plus petit; & si l'une des ancres est plus foible, il faut que son cable fasse aussi le plus grand angle avec la direction des lames ou du vent, pour mieux assurer la position du vaisseau mouillé.

La proportion précédente qui est fondamentale, démontre que la force  $R$  est la plus petite possible, pour une valeur donnée de  $a$ , lorsque  $b=c$ . Ce cas est celui de la tension égale des deux cordes  $An$  &  $Aq$ . C'est aussi le cas où une force  $R$  agit par une corde  $oe$  (fig. 62) par exemple sur une coffe, ou sur un anneau  $O$  dans lequel passe librement une seconde corde  $aob$  qui est tirée ou fixée par ses extrémités  $a$  &  $b$ . Alors la direction de  $eo$  est telle, qu'elle partage en deux parties égales l'angle  $aob$ , si elle fait équilibre à la résultante des tensions des branches  $ao$  &  $bo$  de la seconde corde. Car ces tensions étant égales, la coffe  $O$  doit glisser sur la corde  $aob$ , jusqu'à ce qu'il y ait égalité entre les angles  $aoe$  &  $boe$  (219). Ainsi agit une bouline de basse-voile qui porte une coffe dans laquelle passe la branche de bouline dont les extrémités sont attachées à la ralingue latérale d'une telle voile. Ainsi peuvent être déterminés les effets de la bouline & des branches de bouline d'un hunier. Comme cette bouline fait, par sa direction, un angle égal avec les branches auxquelles elle est liée, son effet est d'autant plus grand que l'angle des branches est plus petit. Remarquons ici que cet angle étant très-grand, une petite force  $R$  appliquée sur la bouline, produit un très-grand effet sur les pattes de la ralingue. Ainsi cette considération conduit à observer pour règle générale de donner autant de longueur qu'il est possible aux branches des boulines pour qu'elles ne tendent pas trop fortement à déchirer les ralingues des voiles.

Considérons un palan de charge soutenu par une suspente dont les extrémités sont attachées autour, l'une, du

mât de misaine, & l'autre du grand mât ; & remarquons , que l'angle  $a$  des deux branches de la fuspente , étant très-grand , des poids très-petits portés par le palan , font un effort puissant sur la tête de chaque mât , & tendent à les fatiguer considérablement.

Considérons aussi , dans la composition du berceau d'un vaisseau , les cordes qui lient les colombiers correspondans , pour servir à soutenir la partie moyenne de ce vaisseau sur son chantier. Les deux branches de la même roufure de deux colombiers font un angle très-grand , & cette roufure est chargée dans son milieu d'un poids énorme. Ainsi les têtes de ces colombiers doivent presser avec une force extrême les points où elles sont appliquées ; c'est par cette raison qu'on fait appuyer leur tête immédiatement , non contre la carene du bâtiment qu'ils comprimeront trop profondément ; mais sur une ventriere qui est étendue sur cette carene. C'est aussi la même raison qui explique pourquoi une ventriere ne devient pas nécessaire pour l'appui des têtes des colombiers extrêmes puisque l'angle des branches de leurs roufures , a moins de grandeur , ( toutes choses étant égales d'ailleurs ).

221. Soit une corde  $aoi$  ( fig. 63 ) qui attachée par ses deux extrémités  $u$  &  $i$  , est pressée en divers points de sa longueur par différentes forces séparées ou réunies. Supposons aussi que ces forces combinées lui donnent une tension déterminée & qu'agissant sans discontinuité elles la maintiennent dans la situation fixe  $aoi$  ; on demande la direction & la valeur de la résultante de toutes ces forces. Représentons par  $uq$  &  $iq$  les tensions & les directions des deux derniers élémens  $au$  &  $bi$  de cette corde ; il faut que toutes les forces placées entre  $a$  &  $b$  , & appliquées aux autres élémens intermédiaires de la corde , se réduisent à une seule force qui soit dans le plan  $iqu$  des cordons  $au$  &  $bi$ . Car celles de ces forces qui ne seroient pas dans ce plan pourroient être décomposées en deux autres , dont l'une seroit dans ce plan auquel l'autre seroit perpendiculaire. Toutes les forces composantes placées comme cette dernière , devroient se détruire mutuellement ; puisque la corde est supposée prendre & garder une position fixe & constante. Quant

aux forces qui feroient placées dans le plan des élémens extrêmes de la corde, elles se réduiroient (186) nécessairement à une seule. Ainsi toutes les forces appliquées à la corde continue & libre *uoi*, n'ont qu'une résultante, & celle-ci doit être en équilibre avec celle que produisent les tensions des élémens extrêmes *ua* & *ib*, si, comme on l'a supposé, les points *a* & *b* ne prennent aucun mouvement. La direction de l'une & de l'autre résultante, est donc *qd*, ou celle de la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés les lignes *uq* & *iq*. On doit donc dire que la tension de *bi* est à celle de *ua* :: *sin. dqa* : *sin. dqi*.

Ainsi *a* & *b* étant les deux points inférieurs d'une basse-voile, la force résultante des tensions des parties extrêmes de la ralingue du fond considérée isolément, est à la somme de ces tensions, ::  $\cos. \frac{1}{2} bqa : \cos. \frac{1}{2} (bqd - dqa)$ . La position des lignes *iq* & *uq* qui sont tangentes aux extrémités de la ralingue du fond, & les grandeurs des tensions de ces parties peuvent servir à déterminer leur résultante *qd*, soit dans sa valeur, soit dans sa direction. Il s'ensuit que plus la tension de *au* ou de l'amure est considérable à l'égard de celle de l'écoute *bi*, plus aussi l'angle *dqa* est petit à l'égard de *dqb*, c'est-à-dire que la résultante *qd* se rapproche alors davantage du point d'amure que de celui de l'écoute; & cette remarque est essentielle à faire dans l'art de manœuvrer un vaisseau. Les mêmes principes conduisent encore à juger de l'effort qu'exerce une draille sur les points où sont fixées ses extrémités, lorsqu'elle sert à soutenir le guindant d'un foc ou d'une voile d'étai.

222. Si une corde tendue par des forces appliquées en *u* & *i*, passe sur plusieurs points fixes placés en *c*, *o*, *p*, &c. sans cesser d'être continue, & avec la liberté de glisser vers *u* comme vers *i*; alors, les angles tels que *asp*, *spn*, *pno*, &c. que forment entr'eux deux élémens voisins de cette corde, & pris deux à deux, sont partagés en parties égales en *f*, *p*, *n*, &c. Car dans l'état d'équilibre les tensions des diverses parties de cette corde doivent être égales (219). Il résulte de l'égalité de ces angles, que la résultante des efforts de deux élémens voisins & quelconques, doit nécessairement passer par le



centre d'un arc dont ces élémens feroient deux tangentes. C'est pourquoi en étendant ce raisonnement aux élémens consécutifs *au, af, sp, pn, &c.*, on voit que si les points *u, a, f, p, n, &c.* appartiennent à un même arc de cercle, leur résultante *qd* doit passer par le centre de cet arc. Réciproquement si on se propose de faire passer par un même point, les résultantes partielles des tensions des élémens d'une corde, (en les comparant deux à deux) il faut que cette corde embrasse un arc décrit du point donné comme centre.

223. Plusieurs cordons (fig. 62) *eo, co, io & od* sont-ils tous liés à un nœud fixe en *o*, & sont-ils tirés par autant de forces qui agissent contre une puissance unique dirigée dans le sens *ob*; ces forces doivent se combiner en une seule résultante directement opposée à la puissance *ob*. Cette combinaison est facile à imaginer, lorsque ces forces sont dans un même plan. Car alors chacune peut être décomposée en deux autres, dont l'une seroit perpendiculaire à *ob* & l'autre lui seroit parallèle. Dans cet état, les forces perpendiculaires doivent se détruire, puisque tous les cordons tendus restent dans une position fixe; & on fait que les forces qui sont parallèles à *ob*, & qui, comme les cordons, passent toutes par le même point *o* peuvent se réduire à une seule résultante. L'équilibre supposé exige donc que cette dernière soit égale & contraire à la puissance *bo*. Lorsque les forces en question ne sont pas dans un même plan, chacune peut être décomposée (190) en trois autres parallèles à trois axes qui sont perpendiculaires entr'eux, & dont l'un est dirigé suivant *ob*. Dans ce cas la somme de toutes les forces composantes qui sont parallèles à chacun des axes perpendiculaires à *bo* doivent se détruire mutuellement puisqu'il y a équilibre; ainsi les composantes qui sont parallèles à *bo* doivent balancer la puissance qu'on suppose dirigée suivant *bo*, en se réduisant à une seule résultante qui soit égale & contraire à cette puissance. C'est par cette méthode de décomposition, qui est générale, qu'on doit trouver les effets résultans de toutes les forces qu'on peut imaginer appliquées sur les divers points d'une corde; lorsqu'elles agissent isolément ou

concurrentement soit dans un même plan , soit dans des plans différens. Enfin on doit voir que l'équilibre de plusieurs forces peut avoir lieu d'une infinité de façons , en variant soit leur grandeur , soit leur direction.

Observons en passant , que plusieurs cordons étant liés à un même nœud pour tirer sur une corde *ob* , ne font pas un effet proportionné à leur énergie , parce que l'obliquité des cordons à l'égard de *ob* , fait que certaines composantes de ces forces se détruisent mutuellement dans leur combinaison comme on l'a vu précédemment. C'est pourquoi , à bord d'un vaisseau , au lieu d'attacher plusieurs cordons à l'extrémité de la brimballe d'une pompe , il seroit plus à propos d'appliquer ces cordons aux extrémités de plusieurs barres qui croiseroient la brimballe à angle droit , & qui permettroient ainsi que ces cordons pussent être tirés parallèlement les uns aux autres. Un tel arrangement qui économiseroit les forces disponibles , conviendrait aussi dans plusieurs autres circonstances qui se présentent dans la pratique de l'art de la marine.

224. Cherchons l'effet & le rapport de deux forces lorsqu'elles sollicitent au mouvement un corps , long & de forme quelconque , qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe fixe sur lequel il repose , & qui ne peut prendre aucune vitesse progressive. Ce corps porte le nom de *levier*. Telle peut être considérée une vergue , qui liée à un mât par son racage , ne peut que tourner autour de lui à l'aide des forces qui sont appliquées à ses bras. Nous avons vu , que si des forces  $F$  &  $f$  (197) agissent sur un corps , & si  $D$  &  $d$  sont les distances , du point ou de l'axe fixe , sur lequel seul ce corps peut tourner , à la direction de ses forces ; on doit avoir cette équation ( en nommant  $R$  la vitesse angulaire du corps &  $LA$  son moment d'inertie à l'égard de l'axe de rotation )  
 $R.LA^2 = FD + fd$  ou  $= FD - fd$  ; suivant que ces forces tendent à faire tourner le corps dans un même sens , ou dans des sens contraires.

Cette théorie doit être appliquée entièrement au levier ; & lorsque le levier ne prend , malgré l'impulsion de deux forces , aucun mouvement de rotation autour de son point d'appui ; on doit en conclure que  $R=0$  ; & par

conséquent que  $FD = fd$  ; c'est-à-dire que , les deux forces appliquées à ce levier , sont ( dans le cas d'équilibre ) , en raison inverse de leurs distances à l'axe de rotation qui est nommé ici le point d'appui. Car , de cette équation , on tire la proportion suivante  $F:f :: d:D$  ; qui devient le principe général de l'équilibre de deux forces & appliquées à un levier quelconque. On voit par cette équation qu'une très - petite force peut absorber toute l'action d'une puissance considérable , si on rend assez grande la distance de la première au point d'appui du levier. On voit aussi que l'état d'équilibre d'un levier peut être détruit par une augmentation quelconque du moment d'une des forces , qui se combattoient auparavant sans avantage. C'est pourquoi à l'aide d'un levier , on peut avec une foible puissance , surmonter de très - grandes résistances. Le levier est donc un moyen propre à la communication du mouvement. ( Nous faisons ici abstraction , de la pesanteur du levier , du frottement , &c. )

Si deux forces seules sont appliquées à un levier , alors dans l'état d'équilibre , leur résultante doit être dirigée sur le point d'appui ; car le moment de cette résultante , à l'égard de ce point , est nul , comme la somme  $(FD - fd)$  des momens des forces particulières. La résultante & le point d'appui doivent donc être placés dans le plan des forces composantes , puisque celles - ci sont dans un seul & même plan.

On trouve aisément , dans ce dernier cas , le rapport de cette résultante ou de la charge du point d'appui , aux deux forces  $F$  &  $f$ . Étant données leurs valeurs & leurs directions dans un même plan (187) elle est égale , à leur somme , ou à leur différence , si leurs directions parallèles sont dirigées , ou dans un même sens , ou dans des sens contraires. Les deux forces supposées peuvent être placées , de part & d'autre du point d'appui , ou toutes deux du même côté , & la même formule  $R.LA^2 = FD - fd$  donne l'équation de l'équilibre ainsi que du mouvement dans les deux cas , en variant les signes suivant les circonstances.

Soient deux forces  $F$  &  $f$  qui dans un même plan  $pbacq$  ( fig. 64 ) agissent suivant  $pb$  &  $qc$  sur un levier  $bdc$  , de forme quelconque , & dont l'appui est en  $d$ .

Soient aussi abaissées de  $d$  des lignes perpendiculaires  $df$  &  $d\zeta$  sur les directions de  $F$  &  $f$ , prolongées jusqu'à leur rencontre en  $a$ . Ces forces seront dans l'état d'équilibre, si on a l'équation  $F \cdot df = f \cdot d\zeta$ , ou  $F \cdot \sin. da f = f \cdot \sin. da \zeta$ . Ainsi la force  $F$  devrait être surmontée par  $f$ ; ou un corps placé en  $b$  (qui présente une résistance  $F$ ) seroit mis en mouvement, à l'aide de ce levier, dans le cas où  $f$  recevrait un ou plusieurs degrés d'accroissement. D'ailleurs la résultante de ces forces (en équilibre) doit être dirigée suivant une ligne  $ad$  qui passe par le point d'appui  $d$  du levier; & en la nommant  $R$ , on trouve sa valeur par la proportion  $R:F+f::\cos \frac{1}{2} bac:\cos \frac{1}{2} bad-dac$ . Lorsque  $bac=0$  cette valeur est la plus grande; & la charge du point d'appui est  $F+f$ , parce que les forces sont parallèles.

Lorsque plusieurs forces, appliquées à un levier, ont des directions placées dans des plans différens, on peut décomposer chacune en trois autres forces qui soient parallèles à trois axes, qui perpendiculaires entr'eux passent par le point d'appui. Alors, dans le cas de l'équilibre d'un levier, chacune des trois sommes des momens des forces qui sont parallèles à chacun des axes, doit être nulle séparément; ainsi toutes doivent se réduire à une seule, dont la direction passe par le point d'appui & qui est détruite par sa résistance. Remarquons que si le levier, reposant sur une base nommée point d'appui, avoit la liberté de glisser sur cet appui, alors le repos du levier n'auroit lieu qu'à deux conditions. La première seroit la nullité de la somme des momens des forces qui tendent à le faire tourner; & il faudroit aussi que la résultante des forces fût perpendiculaire à une ligne qui seroit tangente à l'appui dans le point de contact du levier. (On se souvient sans doute que la somme des momens est formée, par l'addition de ceux des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, & par la soustraction de ceux qui tendent à produire une rotation contraire).

Enfin après avoir considéré, le plus généralement possible, l'état d'équilibre d'un levier, on peut imaginer facilement son état de mouvement, qui est toujours dû, ou à l'accroissement quelconque du moment d'une force.

motrice supposée, ou à celui d'une force nouvelle; & alors on applique à ce second état la théorie déjà donnée de la rotation des corps.

225. C'est d'après ces principes qu'ont été imaginés les leviers dont on fait usage dans les arts; & ils peuvent servir non-seulement à inventer de nouveaux moyens du même genre, mais aussi à juger de leur utilité, ou de leur convenance, soit pour établir l'équilibre entre des forces, soit pour la communication du mouvement.

Dans les *balances* ordinaires dont on fait usage dans la société, le fleau est un levier, qui est suspendu par le milieu de sa longueur, & qui de part & d'autre de ce point est composé de parties parfaitement égales & semblables. C'est pourquoi si un poids est attaché à chacune de ses extrémités, ce fleau ou ce levier, ne peut rester en équilibre ou en repos qu'autant qu'il y a égalité entre les poids suspendus; & l'inégalité de ceux-ci, est indiquée par la rotation du fleau autour du point de sa suspension.

La *romaine* présente aussi un levier dans sa verge, ou dans son fleau qui n'est pas suspendu par un point placé au milieu de sa longueur. Un de ses bras est plus court que l'autre. Le premier est constant; & c'est à son extrémité que sont attachées les masses dont on se propose de connoître le poids. Ensuite une autre masse pesante qui toujours la même, est placée sur le bras le plus long à une distance convenable & variée du point de suspension, de manière que son moment devienne égal à celui de la masse à mesurer. L'égalité de ces momens suffit alors (comme on peut en juger par les principes précédens), & pour donner une idée juste de la masse inconnue qu'on doit peser, & pour indiquer la graduation convenable du fleau, puisque les distances des masses ainsi que la masse constante, sont toujours connues dans leur grandeur.

Lorsque les bras d'une vergue sont également tendus ils la tiennent en équilibre; mais sont-ils inégalement roides. L'un des deux, force la vergue à tourner autour du mât, & cette rotation d'ailleurs doit paroître d'autant plus facile à produire, que le bras est attaché à la vergue en un point très-éloigné de celui de suspension.

La brimballe d'une pompe, est aussi un levier, qui repose par un point sur un support, & qu'on fait tourner pour produire le jeu de la pompe. Cette rotation est facilitée par l'inégalité des bras de ce levier. Car le bâton de la pompe est porté par le bras le plus court, afin que le moment de la résistance soit diminué par sa faible distance au point d'appui; & c'est à l'extrémité du bras le plus long qu'est appliquée par une raison contraire la puissance qui sert à mouvoir la brimballe.

Le gouvernail d'un vaisseau, doit encore être considéré comme une espèce de levier. L'action de l'eau peut être supposée réunie en  $r$  (fig. 35. G) & la puissance qui lui résiste, est appliquée à l'extrémité  $f$  de la barre  $fe$ . Ces deux forces tendent en sens contraire, à faire tourner le gouvernail sur ses gonds  $bod$ , & l'une agit à l'aide d'un bras de levier  $fe$ , tandis que l'autre n'est éloignée de l'axe de rotation qu'à une distance  $or$ . Leurs momens étant égaux, le gouvernail reste en équilibre ou en repos, dans la situation où il est placé; & leur différence entraîne la rotation de cette machine.

Une pagaie (fig. 76. G) est aussi un levier. Car considérons la résistance  $R$  de l'eau comme une puissance qui pousse la pelle  $B$ , par le point  $e$ , & suivant  $en$ ; la main gauche, par exemple, du pagaieur pousse le point  $A$  avec un effort  $A$  dans le même sens  $Az$ , & sa main droite placée en  $C$  tire la pagaie dans un sens contraire  $cm$ . Lorsque ces trois forces parallèles sont en équilibre, la main droite soutient seule les efforts  $R$  &  $A$ , qui doivent être tels que  $R \cdot ec = A \cdot Ac$  (189); & dans cet état d'équilibre, la main droite lutte en  $C$  contre la somme des efforts  $A$  &  $R$ . C'est cette somme de force qui devient pour le pagaieur, un point d'appui, dont il se sert pour pousser dans le sens  $mc$ , le canot ou la pyrogue, qui le porte & qu'il tend à mouvoir. C'est enfin par ce moyen qu'il fait naître & entretient la vitesse progressive de pareils bâtimens.

Remarquons qu'on ne peut dire de même d'un aviron, & qu'il ne peut être considéré comme un levier. Soit  $AB$  (fig. 74. G) un aviron qui est tiré par un rameur dont l'effort est appliqué au point  $A$ , & dirigé de  $A$

vers *a*. Regardons la résistance que l'eau oppose à *B*, comme un obstacle immobile, alors la rame sollicitée en *A* au mouvement, ne tend qu'à tourner autour de *B* dans le sens *Aa*, & lorsque cette rotation peut avoir lieu, la rame emporte avec elle dans l'espace le canot *CD* qui est lié avec elle au point *c*. Le mouvement de cette rame, est donc une rotation produite par une puissance qui est l'action du rameur, & qui n'est contrariée par aucune puissance étrangère, ou qui ne l'est que par le moment d'inertie de la rame & du canot réunis, en regardant d'ailleurs la résistance que l'eau oppose particulièrement au canot, comme un poids ajouté à sa masse; ainsi quoique la rame ait un point d'appui en *B* dans la résistance de l'eau, quoiqu'elle l'eût sur un rocher placé en *B*; on ne voit pas deux puissances distinctes qui appliquées à cette rame, se combattent mutuellement pour empêcher sa rotation. On ne voit donc pas ici les caractères distinctifs du levier. D'ailleurs on voit évidemment qu'au moment où cette rotation de la rame vient à naître, le canot reçoit en *c* une impulsion déterminée, qui produit nécessairement (200) & son mouvement progressif dirigé de *c* en *D*, & sa rotation autour de son centre de masse *G*, dans le sens *CcD*, parce que l'impulsion n'est pas dirigée sur ce centre.

Enfin nous devons citer un autre levier, fréquemment en usage dans la marine, & qui y a reçu le nom distinctif d'*anspect*. C'est une barre de bois ou de fer. Représentons-le par la ligne *ac* (fig. 65). Doit-il servir à ébranler & à soulever une masse *q* placée en *b*, & qui fait effort dans le sens *br*? On appuie son pied *c* sur un plan inébranlable *qn*, & une force *P* est appliquée en *a* perpendiculairement à sa longueur, dans le plan *abr* & dans le sens *au*. *P* produit un effet sensible lorsque son moment à l'égard du point d'appui *C* surpasse celui de *q*, qui tend à faire tourner le levier en sens contraire. Soit *m* l'angle *cbr*: alors  $q \sin m$ , est la résistance qui est à vaincre. Son moment est  $q \sin m \cdot bc$ , &  $P \cdot ac$  est le moment de *P*. On voit donc que *P* a d'autant plus d'avantage sur la résistance *q*, que *ac* l'emporte d'avantage sur *bc* & le rayon sur  $\sin m$ . Un *anspect* est donc

très-utile pour la communication du mouvement , & très-avantageux pour vaincre de grandes résistances avec peu de force.

226. La *poulie* est un autre moyen , propre à la communication du mouvement ; & l'invention en est fondée sur les principes précédens. En effet nous avons vu que si une corde *iou* ( fig. 63 ), qui est tendue par des forces appliquées à ses extrémités *u* & *i* , passe par-dessus des points fixes , tels que *f* , *p* , *n* , *o* , &c. , la tension de chacun de ses élémens , est la même dans l'état d'équilibre de la corde. Nous avons vu aussi que la résultante des tensions particulières , de deux élémens consécutifs de cette corde passe alors par le centre d'un arc , dont ces élémens sont des tangentes ; & que si tous les points *f* , *p* , *o* , *n* , &c. sur lesquels appuie la corde continue , sont placés sur le contour d'un seul & même arc de cercle , la résultante totale des tensions de la corde , quelque soit le nombre de ses élémens en contact avec l'arc , passe par le centre de ce même arc. Cette propriété , qui permet , sans altérer une force , de varier au besoin sa direction , ou le lieu de son application , lorsqu'elle agit à l'aide d'une corde pour produire du mouvement ; & ces principes qui indiquent un point central où passe la résultante des tensions des élémens d'une corde , ont fait imaginer & la forme & l'usage de la *poulie*. De là est venu l'idée de lui donner la figure d'un plateau solide , dont le contour est circulaire , qui sur son épaisseur porte une cannelure propre à recevoir un cordage , & qui a la liberté de tourner sur un axe qu'on fait passer par son centre dans une situation perpendiculaire au plan de ses faces circulaires & parallèles.

Soit *band* ( fig. 66 ) une poulie ( qu'on nomme rouet dans la marine ) , & supposons que les extrémités de son axe *o* sont solidement appuyées. Si un cordage *caf* qui embrasse le contour *cba* , est tiré en *r* dans le sens *cr* , & en *f* dans le sens *af* ; & si les forces motrices sont égales , ou si les tensions des cordons *rc* & *fa* sont les mêmes , la corde ne doit prendre aucun mouvement , & la résultante de ces forces comme de ces tensions doit passer par le centre *o* de la poulie (222). Nommons *R*

cette



cette résultante ou la charge du point d'appui , dans l'état d'équilibre , on a la proportion  $R:T+t$  ou  $2t:cos.\frac{1}{2}a:cos.\frac{1}{2}(c-b)$  ( en nommant  $a$  l'angle  $fkr$ ,  $c$  &  $b$  les angles de direction des forces motrices avec celle de leur résultante  $ko$ , & en désignant par  $T$  &  $t$  les tensions de  $cr$  &  $fa$ . ). Comme il y a égalité, dans le cas supposé de l'équilibre, entre  $b$  &  $c$  ainsi qu'entre  $T$  &  $t$  ( 220 ), on a  $R=2t cos.\frac{1}{2}a$ . Cette formule fait voir que la charge  $R$  est la plus grande possible lorsque  $a=0$  ou lorsque les cordons  $rc$  &  $fa$  sont paralleles ou dans la position  $de$  &  $qi$ .

Remarquons que la résultante  $ko$  agit toujours dans le plan de la corde & des forces motrices, & que l'équilibre ne s'établit que dans cet état des choses. Ainsi une poulie attachée par le bout  $b$  de son estrope à un point fixe , doit l'être de maniere que son rouet puisse toujours se placer librement dans le plan des cordons lorsqu'ils sont tendus. Telle est la théorie de la construction des poulies. Examinons actuellement comment elles peuvent être employées à la communication du mouvement.

227. Un corps qui est à mouvoir , peut être attaché, à l'extrémité  $f$  d'une corde , qui passe sur le contour d'une poulie fixée invariablement dans une place déterminée, & qui est tirée par une puissance motrice appliquée à l'autre extrémité  $r$ . Il peut aussi être lié en  $b$  à la poulie elle-même , & alors la corde qui embrasse celle-ci , est fixée par son extrémité  $f$  au point  $f$ , tandis qu'elle est tirée en  $r$  par la force qui tend à mouvoir le corps & la poulie en même temps. Ces deux états de choses ont fait donner à ces poulies employées différemment, les noms de *fixes* & de *mobiles*. Considérons comment le mouvement est communiqué à l'aide d'une *poulie fixe*. Les deux cordons  $rc$  &  $fa$ , étant également tendus par la force qui agit en  $r$ , & par le corps qui oppose en  $f$  une égale résistance, le mouvement de  $f$  est nécessairement nul, & la résultante  $ko$  qui passe alors par le centre  $o$  de la poulie est détruite par la résistance de l'axe  $o$  ou par celle de ses supports. Mais le cordon  $cr$ , est-il sollicité en  $r$  par une force supérieure à celle qui lui résiste en  $f$ , le cordon  $fa$  doit céder à cet excès de tension qui lui est communiqué , & le corps en  $f$

doit recevoir du mouvement. D'ailleurs au moment où cet état des choses s'établit, les tensions des cordons *cr* & *af* cessent d'être égales, & leur résultante qui ne passe plus alors par le centre *o* de la poulie a une direction qui fait avec *kcr* un angle plus petit qu'avec *kaf*. Le moment de cette résultante est même tel qu'en nommant  $\zeta$  sa distance au point *o*, on a l'équation (188),  $R.\zeta = T.oc - t.a.o$ . Ainsi cette distance  $\zeta$ , d'après les suppositions, ne peut être nulle, & la poulie est alors sollicitée à tourner dans le sens *abc* autour de son axe.

Remarquons que tous les effets qui viennent d'être indiqués, ont également lieu dans toutes les situations qu'on peut donner à la corde qui sert à transmettre l'action de la force motrice à l'aide d'une poulie fixe, & que les tensions des deux cordons qui sont tangens à la poulie, restent les mêmes lorsque la corde a les positions *Abaf*, *rcaf*, *edbqi*, ou toute autre position particulière; c'est pourquoi la corde dans chacun de ces états sollicite au même mouvement, le corps attaché en *f*, lorsque la même force motrice est appliquée en *r*; & celle-ci agit sur le corps, par l'intermède de la corde, comme si elle lui étoit immédiatement appliquée. Son effet n'est augmenté ni altéré par l'emploi de la poulie fixe (toutes ces conséquences sont vraies en n'ayant aucun égard, ni au frottement, ni au poids des poulies, ni à la roideur des cordes, &c.).

Beaucoup de poulies destinées à de pareils usages, sont employées fréquemment dans la marine, telles sont les galoches, ainsi que les poulies de retour, de conduite, & toutes celles qui sont aiguilletées à des points fixes dans les vaisseaux.

228. Lorsqu'un corps à mouvoir est lié en *b*, à une poulie mobile, supposons qu'une extrémité *f* de la corde qui embrasse cette poulie, soit fixement attachée en ce point, alors la force qui est employée à produire le mouvement est appliquée à l'autre extrémité *r*. Dans le cas de l'équilibre, & la corde ayant la position *rcaf*, la résultante *ko* est la force qui soutient le poids ou l'effort qui en *b* s'oppose au mouvement du corps. Cette résultante nommée  $R = 2t \cos. \frac{1}{2} a$ . Ainsi une force appliquée

en  $r$  & qui est capable de produire une tension  $t$  dans une corde, suffit pour soutenir un effort qui appliqué en  $b$ , est égal à  $2t \cos. \frac{1}{2} a$ , ou à  $2t$ , lorsque les cordons  $rc$  &  $af$  sont parallèles. Une force  $F$  qui tire par le point  $e$ , la corde  $edbqi$  fixée en  $i$ , peut donc faire équilibre à une force double ( $2F$ ) qui est appliquée en  $b$  sur le bout de l'estrope de la poulie.

Supposons que cet état d'équilibre vienne à être troublé, par l'augmentation de  $F$  qui agit en  $e$ ; alors la tension de  $ed$ , surpasse au premier moment celle du cordon  $iq$ , & la résultante de ces tensions qui d'abord ne passe pas par le centre  $o$  de la poulie sollicite celle-ci, non-seulement à un mouvement progressif, mais aussi à une rotation autour de son axe, dans le sens  $qbd$ , ou plutôt autour de son centre de masse ( 196 ). Bientôt après le moment de l'action de la force  $F$ , les tensions des deux cordons  $ed$  &  $iq$  deviennent égales & leur résultante  $ko$ , imprime au corps à mouvoir, une impulsion double de l'accroissement de  $F$ . Un tel résultat annonce l'emploi avantageux qu'on peut faire & qu'on fait effectivement de la poulie mobile, dans la marine. Remarquons d'ailleurs que si le cordon  $ed$  pendant cette communication de mouvement s'allonge d'une certaine grandeur  $a$ , le cordon  $qi$  s'accourcit également; & la différence des longueurs de ces cordons est  $2a$ ; c'est-à-dire que le mouvement de  $e$  est de  $2a$ , tandis que celui du corps qui est attaché en  $b$  n'est égal qu'à  $a$ . Ce rapport a fait dire que dans ce mouvement le point  $e$  se meut deux fois plus vite que le corps qui est lié en  $b$  à la poulie mobile.

Les poulies d'écoute & d'amure sont des poulies mobiles. Leurs cordages sont attachés au vaisseau par une extrémité, & ils sont tirés par l'autre extrémité pour établir plus facilement les basses-voiles, comme elles doivent l'être. On sent que dans l'action des manœuvriers, les branches de ces cordages doivent être maintenues parallèles afin qu'il en résulte le plus grand & le plus prompt effet. On doit faire la même remarque sur l'art d'employer des cargues, des balancines, des bras & toutes les manœuvres qui sont doubles..

229. L'avantage , qui est attaché à l'usage d'une simple poulie mobile , d'aider à vaincre une résistance qui est double de l'effort qu'on applique à l'extrémité de la corde dont cette poulie est embrassée ( lorsque les cordons sont parallèles ), a fait imaginer divers assemblages de poulies *fixes & mobiles*, pour multiplier des forces disponibles ou pour leur faire surmonter des efforts plus considérables. Ces assemblages souvent nommés *moufles*, portent dans la marine, les noms de *palans*, de *caliornes*, de *candelettes*, de poulies de *mâtage*, de *carenage*, de *langage*, &c. Les fig. 66 & 67 présentent des combinaisons ordinaires de poulies fixes & mobiles; & les cordons qui embrassent successivement ces poulies sont établis parallèles pour la plus grande utilité de ces caliornes & palans. Dans la fig. 66 qui représente un palan, il y a deux rouets *o* & *m* placés dans une caisse longue qui devient un système *fixe* de poulies, parce que cette caisse est invariablement attachée en *b*; & deux autres rouets *l* & *u*, dans une pareille caisse forment un système *mobile* de poulies. Supposons que le poids ou l'effort *P* qui est à vaincre, soit lié en *g* à la caisse mobile, & que la force motrice *F* soit appliquée en *e*, à l'extrémité de la corde *ebqhzptln*, qui embrasse successivement les rouets *o*, *u*, *m*, *l*, & dont l'autre rouet est attaché à la caisse fixe en *n*. Dans cet état des choses, s'il y a équilibre entre *F* & *P*, les tensions de tous les cordons doivent être égales. Comme d'ailleurs les rouets d'un tel palan ont des diamètres différens, afin que les cordons qui les embrassent successivement puissent être établis parallèles; on peut aisément calculer les résultantes de leurs tensions. C'est pourquoi la résultante des 4 cordons qui embrassent les rouets de la caisse fixe, équivaut à 4 fois les tensions d'un de ces cordons, & elle est détruite par la résistance du support *b* auquel est liée la caisse fixe. Par la même raison, la résultante des tensions des cordons qui passent sur les rouets de la caisse mobile, est la force qui fait équilibre à l'effort *P* appliqué en *g*. Cet effort *P* doit donc ici être égal, à la somme des tensions ou des efforts des quatre cordons qui partent de la caisse mobile. Ainsi la force *F* qui équivaut à la tension d'un

seul de ces cordons, exerce sur  $P$  par le moyen de ce palan, une action quatre fois plus grande que si elle lui étoit appliquée immédiatement. Un pareil palan, tel que les candelettes d'un mât, n'est-il composé que de deux rouets  $o$  &  $m$  placés dans une caisse fixe & longue, & d'une seule poulie mobile  $n$ ? La force  $F$  est-elle toujours supposée agir en  $e$  sur l'extrémité de la corde  $ebqhz$  qui par l'autre bout est attachée à la poulie mobile  $u$ , pour vaincre un effort  $P$  appliqué en  $g$ ? Alors la résultante qui lutte contre  $P$ , est triple de la tension de chaque cordon qui tient à la poulie mobile, & l'effet de la force  $P$  est donc triple par l'usage des candelettes de mât.

En général l'effet d'une force  $F$ , appliquée à un tel palan, est multiplié autant de fois qu'il y a de cordons aboutissans à la caisse mobile. Ces vues présentées sur l'état d'équilibre de tels palans, ne laissent aucune difficulté pour juger de son état de mouvement.

On obtient les mêmes avantages, de l'usage d'un autre système de poulies représenté (fig. 67), & par les mêmes raisons. Ici des rouets sont placés parallèlement dans une large caisse destinée à être fixe ou mobile, & ils roulent sur un axe commun, qui les traverse perpendiculairement au plan de leurs faces, & qui est porté par la caisse. Supposons deux caisses de cette forme qui contiennent chacune trois rouets. Si une force motrice  $F$  est appliquée en  $a$  à l'extrémité de la corde continue  $abcduoiefz$  qui passe successivement sur les rouets des caisses fixes & mobiles, & dont l'autre extrémité est attachée à la caisse fixe; si l'effort  $P$  qui est à vaincre, est exercé sur le point  $G$  de la caisse mobile; & enfin s'il y a équilibre entre  $P$  &  $F$  par le moyen de cet assemblage de poulies qui représente des caliornes de mâts, l'effet de la force  $F$  est multiplié autant de fois qu'il y a de cordons aboutissans à la caisse mobile; & par conséquent ici, cet effet est six fois plus grand sur  $P$  que si la force  $F$  avoit été appliquée immédiatement à  $P$ . Dans les vaisseaux il y a plusieurs systèmes de poulies qui ressemblent à celui qui vient d'être décrit & dont les effets restent ainsi suffisamment expliqués. On doit

mettre dans cette classe, les poulies de guindereffe, les poulies de capon, &c. & l'utilité de ces caliornes ainsi que de tout autre système de poulies qu'on peut imaginer est aussi facile à reconnoître qu'à apprécier d'après les principes précédens. On doit aussi remarquer que si l'effet d'une force appliquée à l'extrémité  $a$  du garant d'une caliorne par exemple est multiplié un certain nombre de fois, lorsque son action est transmise par un tel moyen à un corps à mouvoir qui est en  $g$ , la vitesse de  $g$  est autant de fois plus petite que celle du point  $a$ .

230. La poulie, telle que nous venons de la considérer, n'est qu'un plateau circulaire qui roule sur un axe fixe & court & qui a peu d'épaisseur. On peut néanmoins imaginer que, cette épaisseur, ainsi que l'axe de rotation, acquièrent plus de grandeur; alors il en résulte un cylindre d'une certaine longueur qui prend le nom ou de tour, ou de treuil, ou de *cabestan*, ou de *virevaut* & qui est mobile sur son axe.

Nous avons vu (219) qu'une force motrice qui à l'aide d'une corde passée sur une poulie fixe, agit sur un corps attaché à l'extrémité de cette corde, ne produit pas plus d'effet que si elle étoit immédiatement appliquée à ce corps; c'est pourquoi on a cherché, à rendre le tour plus favorable à l'effet des forces employées. Un obstacle à vaincre, ou un corps  $P$  à mouvoir, fait-il effort en  $t$  (fig. 68) dans le sens  $tq$  pour faire tourner un cylindre  $AB$  dans le sens  $osa$  sur son axe  $AB$ , la force motrice, qui lui est opposée, & qui doit l'être avec avantage, est appliquée par conséquent, (à l'égard de l'axe  $AB$ ), non sur le contour du cylindre, mais en un point  $i$ , ou  $g$ , ou  $b$ , &c. qui est à une distance  $in$ , ou  $gn$ , ou  $bN$ , plus grande que celle de  $P$ , qui est le rayon du cylindre.

Soient ces deux puissances  $P$  &  $F$  en action & tendantes à faire tourner le treuil en sens contraire; soient aussi nommées  $b$  &  $a$  leurs distances à  $AB$  en représentant d'ailleurs (197) la vitesse angulaire & le moment d'inertie du treuil (à l'égard de  $AB$ ) par  $R$  &  $MA^2$ ; on a l'équation  $R.MA^2 = F.b - P.a$ . Ainsi, dans l'état

d'équilibre ou  $R=0$ , on a  $Fb=Pa$ . Peut-être douterait-on de la vérité de cette équation parce que les forces  $F$  &  $P$  ne sont pas dirigées dans un seul & même plan, mais on s'en assure aisément par les considérations suivantes.

Soient  $Ai$  la direction de l'axe de rotation du treuil (fig. 82), & deux plans  $PCB$  &  $deF$  auxquels cet axe est perpendiculaire. Imaginons que ces plans passent l'un par la direction  $Pc$  de la puissance  $P$  & l'autre par celle  $eF$  de la puissance  $F$ . Les lignes  $Bc$  &  $de$ , sont menées des points  $B$  &  $d$  perpendiculairement sur les directions de  $P$  &  $F$ . Quoique ces dernières soient dans des plans différens, on peut, d'un point  $A$  quelconque de l'axe  $Ai$ , supposer qu'on ait mené des lignes  $ACK$  &  $Aeo$ , qui viennent rencontrer en  $K$  &  $o$ , un même plan qui est parallèle à  $PcB$  comme à  $Fed$ . Dans cet état des choses, on peut regarder la force  $Fe$  comme composée de deux forces parallèles, l'une qui passe par le point  $A$  de l'axe & l'autre par le point  $O$  dans le plan  $oK$ . Celle-ci nommée  $O$  est telle que  $O.Ao=F.eA$ . La force  $P$  étant décomposée de la même manière, celle de ses composantes nommée  $K$  qui passe par  $k$  dans le plan  $Kio$  est telle aussi que  $K.AK=P.AC$ . On a donc ces deux proportions  $O:F::eA:AO$  &  $K:P::Ac:AK$ . Mais  $Ae:AO::ed:oi$  &  $Ac:AK::Bc:Ki$  à cause des triangles semblables dont ces lignes sont les côtés. D'ailleurs dans l'état supposé d'équilibre, les forces  $K$  &  $O$  qui sont dans un même plan  $Kio$ , doivent se balancer mutuellement dans leur tendance contraire à faire tourner le treuil; par conséquent  $K.iK=O.oi$ , c'est-à-dire que la résultante des forces  $K$  &  $o$  passe par le point  $i$  de l'axe  $Ai$ ; & il s'ensuit que, puisque  $o.oi=F.ed$  &  $k.ki=P.Bc$ , suivant les proportions précédentes, on a l'équation fondamentale  $F.ed=P.Bc$  ou  $F.b=P.a$  comme on l'a dit précédemment.

Ces idées peuvent s'appliquer à la recherche de l'effet qui peut résulter des actions combinées de plusieurs forces placées dans des plans différens & tendantes à faire tourner un cylindre sur son axe  $Ai$ . Les conditions de l'équilibre étant ainsi établies & étant présentées dans l'équation précédente, on voit aisément comment on peut faire passer un cylindre ou un treuil, de l'état de repos à

celui de mouvement. Il suffit alors d'augmenter, soit l'intensité de la force motrice  $F$ , soit sa distance relativement à l'axe  $Al$ . On doit aussi reconnoître avec quel avantage, une foible puissance  $F$  peut surmonter un effort  $P$  plus considérable.

231. Ainsi un cylindre (comme le virevaut dont on fait usage dans des petits bâtimens pour lever leurs ancres) est-il placé horizontalement; & son axe est-il sur des supports fixes. Plusieurs barres telles que  $bn$ , dont la longueur surpasse plus ou moins le rayon du cylindre, sont implantées dans l'épaisseur de ce dernier, perpendiculairement à son axe, & en divers points; & des puissances appliquées à l'extrémité de ces barres sont employées avec succès à tirer de grands poids  $P$  attachés à une corde  $tq$  qui s'enroule sur le cylindre pendant sa rotation.

Ainsi une roue de gouvernail (dont le rayon est plus grand que celui du cylindre à la base duquel elle est fixée perpendiculairement à son axe) favorise considérablement les effets de la force d'un timonier, lorsqu'il agit pour vaincre la résistance que l'eau oppose à la rotation du gouvernail, ou à l'enroulage des drosses sur le cylindre (nommé marbre) de cette machine.

Ainsi, avec des barres longues  $bn$ , dont une extrémité, est implantée dans la tête, d'un cylindre vertical, tel qu'un cabestan de vaisseau; on parvient à élever du fond de la mer à sa surface, des ancres d'un poids considérable, en les tirant à l'aide d'un cordage qu'on force d'envelopper par des tours successifs la fusée du cabestan.

Dans tous ces cas la résistance qui est à vaincre, agit à une distance de l'axe de rotation, qui n'est égale qu'au rayon du cylindre, tandis que les forces motrices ou les puissances, sont placées à des distances plus grandes du même axe.

232. Il est à propos de remarquer qu'une force qui fait tourner un cabestan ou un virevaut, sur leur axe, impriment aussi à celui-ci une impulsion tendante à lui donner une vitesse progressive qui n'est anéantie que par la résistance des supports. En effet les deux forces  $F$  &  $P$



que nous avons considérées ont été décomposées chacune en deux autres dont les unes passent le point  $A$  (fig. 82) & dont les autres sont dans un plan  $ok$  qui coupe l'axe au point  $i$ . Les premières agissent immédiatement sur l'axe & si les secondes qui sont dans un même plan, étoient aussi dans un état d'équilibre, elles se réduiroient à une seule force (186) qui passeroit par le point  $i$ . Ainsi l'axe  $Ai$  d'un treuil est sollicité, par des composantes des forces qui produisent la rotation de cette machine, à prendre un mouvement progressif. Dans le cas où deux forces égales & contraires, telles que  $Fa$  &  $Sn$ , placées à même distance de l'axe  $Ai$ , dans le même plan  $es$  auquel  $Ai$  est perpendiculaire, tendroient à faire tourner un cabestan dans le même sens, elles ne feroient pour déplacer l'axe  $Ai$ , que des efforts qui se détruiraient mutuellement. C'est par cette considération que dans l'usage des cabestans, on doit, pour diminuer les efforts exercés sur l'axe  $Ai$ , répartir des puissances motrices, & égales, de part & d'autre de cet axe ou de la tête de ces machines.

Les principes précédens servent d'ailleurs à rendre raison des effets qu'on obtient, en employant des tours qu'on fait mouvoir, soit par des manivelles, soit par de longues barres, ou pour roidir certaines manœuvres, ou pour faire jouer une pompe à seaux, à chapelets; ou pour *alonger* des cordages dans l'atelier de la garniture, ou pour faire les roslures de mâts, des berceaux, ou pour ébranler de grandes masses, ou enfin pour exécuter dans les ports diverses manœuvres très-fréquentes & très-variées, avec une grande économie de forces.

233. C'est aussi à l'aide des mêmes principes, qu'on explique l'effet, des roues dentées, des pignons, & de toute sorte d'engrenages. Il suffit pour cette application, d'analyser une machine nommée *cric*, qui est simple & très-utile, ou très-avantageuse pour communiquer du mouvement à de très-grandes masses avec des forces moyennes. Nous avons vu (130) qu'une force  $F$  qui agit avec un levier  $bn$  (fig. 68) peut surmonter une force supérieure  $P$  qui est appliquée en  $q$ , à l'extrémité d'une corde  $iq$ , en obligeant cette corde de s'enrouler sur le contour du cylindre  $AB$ , dont elle produit la rotation. Si l'effort  $P$

étoit transmis , non à l'aide d'une corde *tg* , mais par une verge inflexible qui presseroit une dent pratiquée en *t* dans l'épaisseur du cylindre , les apparences changeroient , mais les résultantes seroient encore les mêmes , & par des raisons semblables. Soit donc une barre de fer *qg* dentelée sur une de ses faces ( fig. 69 ) , & supposons qu'une de ses dents repose sur celle d'une roue dentée *O*. On peut considérer cette roue , comme un cylindre de peu de longueur , qui a été dentelé sur son contour , & qui est employé pour transmettre l'effet d'une force *F* appliquée à l'extrémité d'une manivelle *po*. L'effort *P* que *F* doit surmonter , est supposé agir en *q* sur l'extrémité de la barre inflexible *qg* , & dans le sens *qg*. Nommons *a* , le rayon de la roue dentée *O* , ou la distance du point sur lequel repose la dent de *qg* , à l'axe de la roue *o* ; & *b* la distance *po* du même axe à la direction de la force *F* qui est supposée dans un plan auquel l'axe de la roue est perpendiculaire. On doit dans l'état d'équilibre , avoir comme précédemment , l'équation suivante  $Fb = Pa$  ; & on doit ainsi juger non-seulement du rapport de la force *F* à la résistance *P* , mais aussi du mouvement , qu'on peut produire à l'aide de cette machine par l'augmentation , ou de l'intensité de *F* , ou de la grandeur de *b* qui ont lieu dans l'état d'équilibre.

Si cette roue dentée *O* , ( qu'on voit fig. 83 ) étoit supposée engrainer avec une autre roue excentrique *B* , dont le rayon seroit *q* & qui porteroit concentriquement sur le même axe un pignon *D* ou une petite roue dentée d'un rayon *t*. Si les dents de cette dernière roue *D* engrainoient immédiatement avec celles de la barre de fer *qg* ; dans ce nouvel état des choses , & l'équilibre ayant lieu , on auroit les équations suivantes :  $pq = ft$  &  $pa = Fb$  ; ( en nommant , *f* la force qui agit en *q* sur la barre dentée , & *p* la force qui exerce son action sur la dent *t* de la roue *B* ou *O* ) ; ainsi en multipliant ces équations on parvient à celle-ci  $qFb = ast$  , ou à cette proportion  $F : f :: at : qb$  ; c'est-à-dire que la force motrice , est à l'effort qu'elle balance , comme le produit des rayons des pignons ou des petites roues *o* & *D* , est à celui des rayons de la grande roue *B* & de la manivelle *po*. Ainsi un *cric* ,

avec ce second équipage, l'emporte autant sur le premier, que  $S$  est supérieure à  $P$  : ou les résistances que la puissance  $F$  peut surmonter, à l'aide de l'un & de l'autre cric, sont dans le rapport de  $q$  à  $1$ . On voit aussi que ces forces étant en équilibre, ces machines passent à l'état de mouvement, si la distance de la force  $F$  au centre  $o$ , ou si son intensité, ou si l'une & l'autre reçoivent quelqu'accroissement (en faisant toujours abstraction des effets du frottement, &c.) cet assemblage, d'une barre de fer  $qg$  (fig. 68) & d'une ou de plusieurs roues dentées, étant renfermé dans une caisse  $abcd$  longue & forte qui sert de support aux axes des roues, forme la machine qu'on nomme *cric* simple ou double. La force motrice agit en  $p$  sur la manivelle  $po$ , & la barre de fer dentelée  $qg$  combat les efforts qui dans le sens  $qg$  s'opposent à son mouvement dans le sens opposé.

Il est aisé, d'après cet exemple & ces réflexions d'imaginer combien on peut varier, & comment on peut apprécier, les moyens de favoriser plus ou moins les effets d'une puissance donnée, par diverses combinaisons de roues dentées, ou par un mécanisme qui est semblable à celui du cric. Car ce qui vient d'être dit sur cette dernière machine peut être immédiatement appliqué à une foule de systèmes de roues dentées ou d'engrenages; & on peut en conclure aisément l'explication des machines semblables qui sont employées, soit pour élever de grandes masses telles que des canons, des mortiers, &c., soit pour diriger les couteaux qui servent à forer des pièces de bois ou de métal, telles que des poulies, des pompes, des bouches à feu, &c.; soit pour faire tourner des meules de moulin, &c., en considérant, dans ces dernières applications, les lanternes garnies de fuseaux comme remplaçant, sans aucune différence d'effet, des pignons ou des roues dentées; & en remarquant aussi que la transmission des forces se fait toujours également par les roues dentées, lorsque leurs dents qui s'engrènent sont placées, ou dans les plans de ces mêmes roues, ou obliquement, ou perpendiculairement à ces plans.

234. Un plan est-il oblique à la direction d'une force motrice? Il reçoit le nom de *plan incliné*. Tel est le plan  $BECD$  (fig. 36), à l'égard d'une force  $F$  dont la

direction est la ligne  $az$ , qui la représente par sa longueur, & qui fait avec ce plan un angle  $az\alpha$ . La force  $F$ , dans un tel état d'obliquité, peut être décomposée en deux autres, l'une  $\alpha\alpha$  qui est perpendiculaire au plan, & l'autre  $\alpha z$  qui lui est parallèle. Celle-ci, sans action contre ce plan, ne peut tendre à lui communiquer du mouvement. La première agit seule sur ce même plan, qui la détruit s'il est inébranlable, ( en supposant toutefois que la force  $F$  soit appliquée en un point  $z$  de ce plan, qui est sur sa direction ).

Imaginons qu'un corps solide soit placé sur un tel plan qu'il ne touche que par un seul point  $z$ . S'il est soumis à l'action de  $F$  dirigée suivant  $az$ ; alors, ( en supposant cette force décomposée comme précédemment ), celle des composantes qui est perpendiculaire au plan est détruite par sa résistance, & la composante parallèle à ce même plan tend à entraîner le corps suivant sa direction. On peut même dire plus généralement que le corps se trouve alors sollicité dans le point  $z$ , & par les deux composantes  $P$  &  $p$  de la force  $F$ , & par la résistance  $R$ , que le plan oppose; parce que celle-ci peut être regardée comme une troisième force motrice dont la direction d'ailleurs est perpendiculaire à la surface du même plan. Le centre de masse du corps supposé doit donc se mouvoir comme si trois forces lui étoient immédiatement appliquées (196); c'est-à-dire que ce corps doit obéir, si aucun obstacle ne s'y oppose, à la composante de  $F$  qui le sollicite à se mouvoir parallèlement au plan. Remarquons aussi que si les directions de  $F$  &  $R$  (196) ne passent pas par le centre de masse des corps, ou si la somme de leurs momens à l'égard de ce même centre, n'est pas nulle, le corps doit d'ailleurs tourner sur lui-même.

Ces réflexions conduisent à conclure, qu'il est des conditions, auxquelles seules le centre de masse d'un corps sollicité par une force  $F$  peut rester sur un plan sans mouvement. Ces conditions sont 1<sup>o</sup> que la force motrice  $F$  soit perpendiculaire à ce plan; & 2<sup>o</sup> que sa direction passe par le point de contact  $z$  du corps avec ce plan. La nécessité de la première condition n'est pas douteuse,

d'après ce qui précède ; & celle de la deuxième est aisée à démontrer. En effet, si  $z$  n'étoit pas le point de contact du corps & du plan, tandis qu'il est commun à celui-ci & à la direction de  $F$  ; alors cette force pourroit être décomposée en deux forces parallèles, dont l'une  $f$  passeroit par le point unique de contact, tandis que l'autre  $f$  seroit placée, à égale distance & de l'autre côté de  $az$ . La première étant décomposée en deux dont l'une  $b$  seroit parallèle & l'autre  $e$ , perpendiculaire au plan ; la composante  $e$  seroit détruite par la résistance  $r=e$  du plan inflexible ; & le centre de masse du corps, sollicité au mouvement par les forces  $f, b, e$  &  $r$ , ne devroit obéir qu'à la résultante des forces  $f$  &  $b$ . La dernière  $b$  ne tendroit qu'à mouvoir ce centre parallèlement au plan ; mais la composante  $f$  ( inclinée comme  $az$  à ce plan ) tendroit à rapprocher ce centre du plan. Ce corps seroit donc alors sollicité à se renverser, ce qui n'auroit pas lieu si la direction de  $F$  passoit par le point de contact. D'ailleurs les momens des forces à l'égard de ce centre seroient connoître par la valeur positive ou nulle de leur somme, si le corps seroit sollicité à tourner ou non sur lui-même. Le centre de masse d'un corps ne peut donc, qu'aux conditions indiquées, rester sans mouvement sur un plan, lorsqu'il est sollicité par une force quelconque.

Si un corps touche un plan  $AB$  ( fig. 70 ) en deux seuls points  $i$  &  $n$ , son repos ne peut avoir lieu qu'autant que la direction de la force  $F$  qui le sollicite au mouvement, est perpendiculaire au plan ; & il faut aussi qu'elle passe, soit par un des points  $i$  &  $n$  ; soit, entre ces deux points, & de manière qu'elle soit placée avec ces points dans un seul & même plan. Car, dans cette dernière & seule position, la force  $F$  peut être décomposée en deux autres forces parallèles qui sont dirigées par chacun des points de contact  $i$  &  $n$  ( 190 ) ; & chacune de celles-ci, étant perpendiculaire au plan, est alors anéantie par la résistance que le plan oppose en  $i$  & en  $n$ . La force  $F$  est-elle oblique au plan, il ne résulte aussi de ses composantes, ( qui doivent passer par les points de contact ) , & des résistances du plan, qu'une seule force

qui est parallèle au plan, c'est-à-dire qu'alors le corps ne doit pas se renverser, quoique d'ailleurs il puisse tourner sur son centre, comme on pourra en juger par la valeur de la somme des momens des forces.

Si les points de contact, d'un corps, & du plan sur lequel il est appuyé, sont plus ou moins multipliés, le repos du corps exige 1° que la force motrice  $F$  qui l'anime soit dirigée perpendiculairement à ce plan, & 2° que sa direction passe dans l'intérieur d'un polygone qu'on formeroit en réunissant par des lignes droites les divers points de contact supposés. Cette conséquence est fondée entièrement sur les réflexions précédentes, qui portent aussi à dire, que si plusieurs forces sollicitent au mouvement un corps qui est appuyé sur un seul plan, le centre de masse de celui-ci ne peut rester en repos (en n'ayant pas égard à sa rotation sur son centre) qu'aux conditions suivantes. Il faut 1° que toutes les forces supposées se réduisent à une seule résultante qui soit perpendiculaire au plan; & il faut 2° que cette résultante ou ses composantes passent par les points de contact du corps & du plan. Enfin un corps est-il appuyé sur plusieurs plans, avec lesquels il a par conséquent des points de contact; alors les forces motrices, doivent toujours se réduire à autant de résultantes qu'il y a de plans; & chacune de ces dernières doit être non-seulement perpendiculaire à chaque plan respectif, mais les directions de chacune ou de leurs composantes doivent passer aussi par les points de contact supposés, du corps avec chaque plan.

235. Comme toutes les forces qui peuvent solliciter un corps au mouvement, se réduisent à deux (201) dont l'une passe par le centre de masse & l'autre à une certaine distance de ce centre, cherchons comment de telles forces peuvent produire le repos ou le mouvement du centre de masse d'un corps qui est appuyé sur un plan. Supposons, le centre de masse d'un corps en  $o$  (fig. 70), une force  $F$  dirigée suivant  $og$  & une force  $P$  qui agit aussi sur le même corps dans le sens  $ef$ . Les directions  $ef$  &  $og$  de ces forces, (si l'effet combiné de celles-ci est de maintenir le centre  $o$ , sans mouve-

ment progressif, sur le plan  $AB$ ), doivent être placées dans un même plan qui soit, comme leur résultante, perpendiculaire à  $AB$ . (Le plan d'appui du corps n'est ici représenté que par  $AB$  qui est la ligne d'intersection de ce plan avec celui des directions des deux forces). Ces directions prolongées se rencontrent en  $e$ ; & celle *en* de la résultante des forces  $F$  &  $P$  doit être non-seulement perpendiculaire à  $AB$ , mais elle doit aussi passer par un point de contact  $z$  du corps avec  $AB$ ; parce que ce n'est qu'à ces conditions que le centre de masse  $o$  doit rester en repos sur  $AB$  ou sans mouvement progressif. Dans cet état d'équilibre, on peut faire cette proportion (187)  $F:P :: \sin. fen \sin. neq$ . Ainsi une puissance  $P$ , est-elle employée à détruire l'effet d'une force  $F$  qui tend à entraîner le centre  $o$  d'un corps de  $B$  vers  $A$  sur un plan  $AB$  incliné à  $F$ , il faut toujours qu'elle soit telle qu'on ait l'équation  $F. \sin. neq = P. \sin. fen$ . Elle doit donc être la plus petite possible lorsque l'angle *fen*, est de  $90^\circ$ , ou lorsque sa direction est parallèle au plan incliné  $AB$ . Dans tout autre cas, il faut pour produire le repos du corps, une puissance  $P$  plus considérable: ainsi il en résulte cette règle de pratique, que pour maintenir un corps pesant sur un plan incliné, comme un vaisseau ou son berceau sur son chantier, il faut que les cordages, ou les clefs du berceau, qu'on emploie dans ce dessein, soient dirigés parallèlement au plan du chantier, lorsque les vues sont d'économiser les forces ou d'être plus assuré du succès des moyens. Néanmoins on pourroit à soutenir un vaisseau dans une situation droite sur son chantier, en l'étauçant par des acores multipliées, qui s'appuyant par leurs pieds sur ce plan, de part & d'autre de la quille & du centre de masse, & s'unissant par leur tête au corps du bâtiment, rendent si nombreux, les points de contact de ce corps avec sa cale, que dans cet état la verticale dirigée par le centre de masse, tombe nécessairement entre les pieds de ces acores. Le même objet est rempli par des colombiers & des clefs, lorsqu'un vaisseau est prêt à être lancé à la mer.

De cet état d'équilibre que nous venons de considérer,

un corps doit donc passer à celui de mouvement, si l'une des forces  $P$  ou  $F$ , sans changer de direction, varie en intensité relative; ou si on n'a plus l'équation  $P \sin. fen = F \sin. neq$ . C'est ainsi que le berceau d'un vaisseau, étant dégagé de toutes ses entraves glisse sur le chantier qui est incliné à la direction de la pesanteur, & emporte à la mer le vaisseau qu'il soutient. C'est ainsi qu'un vaisseau remonte sur une cale ou sur un chantier, lorsque la force  $P$  employée pour cet effet est telle que  $P \sin. fen$  surpasse  $F \sin. neq$  (en n'ayant égard, ni au frottement, ni aux autres causes qui peuvent retarder ou arrêter un tel mouvement). Nous remarquerons seulement que l'économie des forces exige que la direction de  $P$  soit parallèle à la cale, dans cette opération importante.

Supposons que deux lignes  $AC$  &  $BC$  soient menées, l'une perpendiculairement & l'autre parallèlement à la direction  $og$  de la force  $f$ . Nommons  $AC$ , la base du plan  $AB$ , &  $BC$  sa hauteur; l'angle  $neq$  est égal à  $BAC$ , on a l'inclinaison du plan  $AB$  à l'égard de sa base  $AC$ . Ainsi lorsque la direction  $fe$  de  $P$  est parallèle à  $BA$  on peut dire dans l'état d'équilibre que  $F$  est à  $P$  comme la longueur  $AB$  du plan incliné est à sa hauteur  $BC$ . Si  $fe$  est parallèle à  $AC$  alors  $F:P::AC:BC$ ; & on voit, dans cette situation relative des forces, qu'une partie de  $P$  est employée uniquement à presser le plan  $AB$ , sans contribuer à maintenir le corps en repos. Enfin généralement on peut dire que la partie de  $P$  qui sert utilement à soutenir un corps pesant sur un plan incliné, & sans mouvement progressif, est d'autant plus grande que sa direction  $ef$  approche plus d'être parallèle au plan; & cette force  $P$  qui est nécessaire à cet effet est d'autant plus petite que l'inclinaison  $BAC$  du plan à l'égard de l'horizon est moins considérable. Réciproquement le corps est d'autant moins sollicité par  $F$  à glisser de  $B$  vers  $A$ , que l'angle  $BAC$  a moins de grandeur.

236. On peut faire une application utile, de cette théorie à la marine en considérant comment deux forces qui agissent sur une ancre, & dont l'une passe par son centre de masse, tandis que l'autre est dirigée par tout autre point, peuvent produire le renversement de cette ancre, lorsqu'il



lorsqu'il devient nécessaire. C'est sur ces principes, qu'on a imaginé les dispositions relatives de toutes les parties d'une ancre, & qu'on a jugé que pour être propre au service des vaisseaux, elle doit avoir, un jas & une verge d'une grande longueur; des bras courts, & perpendiculaires au plan de la verge & du jas; & enfin un centre de masse très-rapproché de la croisée. Ce dernier point a été obtenu en partie, en donnant un jas de bois aux ancres qui pour d'autres raisons sont faites de fer forgé; & l'expérience a justifié l'utilité de toutes ces regles.

237. Considérons actuellement une combinaison du plan incliné, & du levier, dans une machine qui porte le nom de VIS. Il faut pour en avoir une idée simple, imaginer, 1<sup>o</sup> une ligne *urhn* (fig. 71) qui soit tracée spiralement, & extérieurement sur la surface d'un cylindre *urhn*, & de maniere qu'elle fasse, dans chaque point de sa longueur un même angle, avec le côté *uh*, ou avec l'axe *mf* de ce cylindre; il faut 2<sup>o</sup> imaginer une seconde ligne *pqaab* qui comparée à la première soit tracée en dehors dans une direction qui lui soit parallèle, & qui dans tous ses points s'éloignant également de la base du cylindre, soit à une distance plus grande de l'axe *mf*. Alors ces lignes, par leur longueur, par leur direction, & par la surface qu'on peut imaginer dans l'intervalle qui les sépare, indiquent la figure de ce qu'on nomme un filet qui ayant une certaine épaisseur pour sa solidité, enveloppe un cylindre pour en composer une vis.

Soit une puissance *F* qui, dirigée suivant *Bu* (fig. 84) parallèlement à l'axe *mr* est appliquée sur la face supérieure du filet d'une vis, & perpendiculairement à l'extrémité du rayon *ui* du cylindre. Si la vis est supposée fixe, & n'avoir la liberté que de tourner autour de son axe, représentons (fig. 85) sa force *F* par *db*, & la partie élémentaire du filet de la vis sur laquelle cette force est appliquée, par *sc*. Décomposons *F* en deux forces placées dans un plan *edb* auquel le rayon *fb* du cylindre est perpendiculaire. L'une *be* est perpendiculaire au filet *sc*, & l'autre *ed* lui est parallèle. La première agit seule sur le filet de la vis, & en la décomposant en deux autres *bu* & *ue*, dans le même plan, le filet est sollicité,

à descendre, par *ub* parallèle à l'axe *AB* de la vis, & à se mouvoir horizontalement par l'autre composante *eu* qui est perpendiculaire à *bd*. Mais la vis qui est supposée ne pouvoir être déplacée, ne doit prendre ni l'un ni l'autre mouvement progressif. Il ne reste donc qu'à considérer les mouvemens angulaires que ces mêmes forces excentriques tendent à lui communiquer (sans avoir égard au frottement). La vis est sollicitée à tourner, par *eu*, autour de l'axe *AB*, & par *bu*, autour de l'axe *fg* qui est perpendiculaire aux deux lignes *AB* & *fb*. Ce dernier mouvement ne peut même naître dans la situation fixe de la vis; ainsi celle-ci, sollicitée par une force *F* dirigée parallèlement à son axe, ne peut prendre qu'une vitesse de rotation autour de son axe *AB*. Si on nomme *i* l'angle *dbf* de *F* avec le filet *fc*, & *a* le rayon *fb*; & si on calcule dans les triangles rectangles *deb* & *beu*, les lignes *be* & *eu* en supposant que *F* soit représentée par *db*, on a  $eb = F. \sin. i$ ; &  $eu = db. \cos. i$ , ou  $eu = F \sin. i. \cos. i$ ; ainsi  $Fa \sin. i \cos. i$  est le moment de *eu* pour faire tourner la vis autour de son axe *AB*. Fixons les idées par une application de ce résultat. Supposons que cette force *F* soit transmise en *u* (fig. 84) suivant *Bu* au filet *ux* d'une vis sans fin *nr* (telle que celle qui fait partie du rouage d'un tourne-broche & qui n'a d'autre liberté que celle de tourner autour de l'axe *nr*) par une dent *no* d'une roue *R* qui ne peut tourner aussi que dans son plan *oMR* dirigé par l'axe *nr* de la vis. Cherchons le mouvement de la vis & de la roue dentée. La vis pressée par *F*, est sollicitée à tourner sur son axe, par une force telle que *eu* de la fig. 85, & dont le moment est  $Fa \cos. i \sin. i$ . La dent *no* est elle-même pressée par la force *BA*, de se mouvoir parallèlement au filet *ux*, mais elle ne peut lui obéir entièrement. En effet décomposons *BA* en deux autres forces *Bq* & *Aq*, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire au plan de la roue dentée *R*. La force *Aq* doit rester sans effet, parce que la roue *R* ne peut se mouvoir dans le sens de cette force; ainsi la dent *o* ne peut que descendre suivant *Bu* avec la vitesse qui lui est communiquée par *Bq*. Cette dernière force *Bq*, ou *du* (fig. 85) doit être calculée dans les tri. *deb* &

*deu* qui donnent  $de = F \cos. i$ , &  $du = de \cos. i$  ou  $du = F \cos. i^2$ . Dans la machine indiquée, une force  $F$  dirigée comme on l'a supposé, doit donc (comme l'expérience le prouve) faire tourner sur elle-même, la vis sans fin (fig. 84) & pousser dans le sens  $uz$  chaque dent de la roue  $R$  qui engrene avec cette vis.

Le moyen d'arrêter le mouvement & de la vis & de la dent  $o$ , est d'appliquer au point  $b$  du filet de la vis une force  $m$ , représentée (fig. 85) par  $bt$  & dirigée perpendiculairement au rayon  $fb$ , dans un sens contraire à la force  $eu$ . Cette force transmise par le filet  $fc$  à la dent  $ro$ , ne peut agir sur celle-ci que par sa composante  $bq$ , qui est perpendiculaire à  $ro$  ainsi qu'à  $fc$  sa parallèle. Cette dent n'est donc sollicitée au mouvement que par la force  $bq$  composante de  $m$ ; & le filet de la vis  $fc$ , est poussé par la force  $qt$  perpendiculaire à  $bq$  & seconde composante de  $m$ . La première  $bq$ , étant décomposée particulièrement en deux forces  $qi$  &  $bi$ ; l'une  $bi$ , qui est perpendiculaire au plan  $fbd$ , ne peut donner à la dent le mouvement qu'elle tend à produire, puisque cette dent ne peut se mouvoir latéralement; mais l'autre  $qi$  qui est dans le plan de la roue dentée peut obtenir son effet lorsqu'elle agit seule. Cette force  $qi$ , opposée à la force  $du$  doit être calculée dans les tri. rectangles comparés  $bqt$ , &  $bqi$ . On y trouve que  $bq = m \cos. i$ , &  $qi = bq \sin. i$ ; donc  $qi = m \sin. i \cos. i$ .

La force  $qt$  qui agit en  $b$  sur le filet  $fc$  de la vis, doit aussi être décomposée en deux forces parallèles aux précédentes. L'une  $qi$ , qui ne tend qu'à déplacer la vis fixe, est détruite; mais l'autre  $ti$ , quoique sans effet pour mouvoir latéralement la vis, la sollicite à un mouvement qu'elle peut prendre autour de son axe, & cherchant la valeur de  $ti$ , par la comparaison des tri.  $bqt$  &  $qit$ , on trouve que  $ti = m \sin. i^2$ .

L'état d'équilibre de la roue dentée & de la vis sans fin, sous l'action combinée des forces  $F$  &  $m$ , exige l'égalité, non-seulement des forces  $qi$  &  $du$ , mais aussi des momens des forces  $ti$  &  $eu$ . On doit donc avoir ces équations,  $m \sin. i \cos. i = F \cos. i^2$ ; &  $ma \sin. i^2 = Fa \cos. i \sin. i$  qui se réduisent à l'équation unique  $m \sin. i = F$

*cos. i.* Si la force employée réellement pour balancer  $F$  est  $M$ ; & si elle est placée parallèlement à  $m$ , mais à une distance  $\chi$  plus grande que  $a$ , à l'égard de l'axe de la vis, alors  $ma = M\chi$ , & dans l'état de repos  $M\chi \sin. i = Fa \cos. i$ .

Considérons actuellement, dans le parallélogramme qui est le développement du cylindre de la vis, le développement particulier d'un tour entier  $ux\chi$  d'un filet. Celui-ci est représenté par  $AB$  (fig. 84 & 70), tandis que celui de la circonférence *int*, est  $AC$ ; & la hauteur  $uz$  du pas de vis est indiqué par  $BC$ . Dans le tri. rectangle  $ABC$ , l'angle  $ABC$  est celui qui a été nommé  $i$ , & on peut y faire cette proportion  $\sin. i : \cos. i :: AC : BC :: cir. a : H$ . (en nommant  $H$ , la hauteur du pas de vis &  $cir. a$ , la circonférence qui a pour rayon  $a$ .) Substituons le rapport trouvé de  $\sin. i$  à  $\cos. i$  dans l'équation de l'équilibre; & elle se change en celle-ci  $M\chi \text{ cir. } a = FH a$ , ou  $M \text{ cir. } \chi = FH$  (parce que  $\chi. \text{ cir. } a = a. \text{ cir. } \chi$ ). Nous devons donc conclure de cette équation, qu'en augmentant les valeurs de  $M$  ou de  $\chi$ , qui en résultent, la force  $M$  peut vaincre la pression ou la résistance  $F$ . On voit aussi que l'effet d'une force donnée  $M$ , est plus grand, ou que la résistance susceptible d'être surmontée par  $M$ , est plus considérable à mesure que la hauteur  $H$  du pas de vis a moins d'étendue.

Il est aisé, après ces raisons, de juger de l'effet d'une vis fixe qui tourne dans un écrou mobile. (Un écrou 20, présente comme on fait, dans son épaisseur des filets concaves, propres à recevoir les filets saillans de la vis (fig. 71)). Si une force  $F$  parallèle à l'axe, est transmise en  $b$  (fig. 85) au filet de la vis, non par la dent d'une roue, mais par un écrou qui ne peut recevoir du mouvement que parallèlement à l'axe; les conséquences précédentes sont applicables ici dans toute leur étendue. Il en résulte donc que la pression  $F$  exercée sur l'écrou, & par communication sur la vis, doit être balancée ou surpassée par une force  $M$ , à une distance  $\chi$  de son axe; lorsque le produit  $M \text{ cir. } \chi$ , égale ou surpassé  $FH$ . Le micrometre adapté aux instrumens astronomiques présente une utile application de ces principes.

Un écrou est-il fixe dans tous les sens, & la vis qui le traverse, a-t-elle la liberté de se mouvoir sur elle-même, ainsi que dans le sens de son axe  $sm$ , (fig. 71) supposons une pression  $F$  qui agit en  $s$  suivant  $sm$  sur la vis  $nu$ , & qui doit être vaincue ou balancée. La force  $f$  ou  $db$  (fig. 85) que le filet de la vis transmet par divers points à l'écrou a pour composante la force  $be$  qui est détruite par l'écrou immobile auquel elle est perpendiculaire; & la vis n'est pressée, que par la composante  $ed$ , ou par ses propres composantes  $eu$  &  $ud$ , qui ne peuvent produire que, sa rotation autour de son axe  $AB$ , & son ascension suivant  $bd$ . On sait que  $eu = f \cos. i \sin. i$  &  $ud = f \cos. i.$  Ainsi une force  $m$  est-elle appliquée en  $b$  à la vis, dans le sens  $bt$ ; celle-ci ne peut obéir, qu'à la force  $iq$  qui opposée à  $ud$ , est égale à  $m \cos. i \sin. i$ ; & à la force  $ti$ , contraire à  $eu$ , dont la valeur est  $m \sin. i.$  C'est pourquoi la pression  $F$  qui se distribue également sur tous les points de contact de la vis & de l'écrou doit donc être balancée ou surmontée, lorsque le produit  $m \sin. i$ , égale ou surpasse  $F \cos. i$ ; ou lorsque de tels rapports regnent entre  $M. cir. z$  &  $FH$ , si une force  $M$  agit à une distance de  $z$  de l'axe de la vis.

C'est une pareille vis, qui sous le nom de *vis de rappel*, est adaptée aux sextans & cercles de réflexion pour faire glisser sur le limbe de ces instrumens, par une marche uniforme & peu sensible, l'extrémité de l'alidade, lorsqu'on se propose de faire concourir ou correspondre certaines divisions du limbe & du *nonius* de l'alidade.

Enfin une vis *hnr* (fig. 71) est-elle fixée dans tous les sens, & son écrou  $zo$  est-il seul susceptible d'être mu dans le sens de l'axe, & de tourner autour de lui. Si une pression  $F$  agit sur cet écrou suivant  $ad$  parallèle à  $ms$ ; cette force représentée par  $bd$  (fig. 85) doit être décomposée comme précédemment. L'une de ses composantes  $be$  est détruite par le filet de la vis, sur lequel est appliqué celui de l'écrou & il ne reste que la force  $ed$ , qui sollicite l'écrou  $ro$  au mouvement, par ses composantes  $eu$  &  $ud$ . L'une de celles-ci tend à produire sa rotation dans le sens  $eu$ , & l'autre son ascension suivant  $ud$ . On arrête, ou on surmonte l'effet de  $F$ , en

appliquant à l'écrou *ro* en *b* une force *m* dirigée dans un sens parallèle & opposé à *eu* ; car une composante *bq* de la force *m* , est détruite par le filet fixe de la vis ; & l'autre composante *iq* , produit un effet, composé, de celui d'une force *iq* opposée à *ud* , & de celui de *ti* contraire à *eu*. Ainsi l'effet de *F* est balancé ou vaincu, lorsqu'il y a égalité ou supériorité entre les produits *m sin.i*, & *F cos.i*, ou entre *M cir. z* & *FH*.

Les applications de cette théorie de la vis sont très-nombreuses & très-variées dans les arts , mais les principes établis servent à expliquer ses effets dans tous les cas ; & ils rendent raison des grands efforts qu'on produit dans les ports, à l'aide des *verins*, lorsqu'on emploie ces espèces de vis, pour soulever ou disposer convenablement sur des cales, des petits bâtimens dont le poids est considérable.

238. Un *coin* est encore une variété, parmi les applications des forces à des corps placés sur des plans inclinés. On sait qu'un coin est un prisme triangulaire tel que *abcdef* (fig. 3) qu'on introduit par une de ses arrêtes *fe*, entre deux corps qu'on se propose, de séparer, de comprimer, ou de maintenir à une certaine distance. La face *abde* de ce prisme & à laquelle est appliquée la force motrice, est nommée la *tête* du coin, dont le *tranchant*, est l'arrête opposée *fc*. La force *F*, employée à mouvoir le coin, pourroit être dirigée obliquement à la tête du coin. Mais alors supposons qu'on la décompose en deux autres, dont l'une seroit perpendiculaire à la face de la tête, tandis que l'autre lui seroit parallèle ainsi qu'au tranchant. Celle-ci ne pourroit produire l'introduction de ce tranchant entre les objets à séparer ; ainsi le prisme en vertu de cette force ne serviroit pas comme coin. Il faut donc pour expliquer l'usage du coin, ne considérer que les forces motrices, qui sont utiles & perpendiculaires à sa tête. Soit *za* ( fig. 72 ) la direction de la force *F* perpendiculaire à la face *gnup*. Imaginons que par cette ligne on ait fait dans le coin une section *ACB*, au plan de laquelle soient perpendiculaires les arrêtes *xq* & *up*, afin qu'elle le soit aux faces *pust* & *qust* du coin. Afin de simplifier la question ( & sans égard au frottement ), ne considérons

d'abord qu'un coin tel que *qmtsinq*, dont la tête *nqmi*, est perpendiculaire, à la face *imts* à laquelle la direction *za* de *F*, est parallèle; & soit représentée la section *AVC* par le triangle rectangle *ABC* (fig. 86). La force *F* tend à mouvoir le coin suivant *oz* parallèle à *Ac*, & les résistances, qui contraires à ce mouvement, sont à vaincre ou à balancer, doivent être appliquées sur les faces du coin, en quelque points des lignes *Bc* & *AC*, ou se réduire à des forces qui aient cette position. Ces résistances d'ailleurs n'agissent sur ces faces que dans une direction, qui leur est perpendiculaire & qui par conséquent est dans le plan *ABC* parce que la force *F* employée, à les balancer ou à les surmonter doit se partager en deux autres qui leur soient directement opposées. Toutes ces conditions sont nécessaires puisqu'on ne peut supposer que le coin prenne un mouvement, autre que celui qui est dirigé dans le sens *oz*, & sans aucune rotation autour d'un axe quelconque. Si ces conditions n'étoient pas remplies, des mouvemens angulaires auroient lieu pour ramener le coin dans une position convenable.

Soit *P* le point d'application de la résistance extérieure qui agit sur la face *BC* du coin; & soit élevée en *P*, à *BC* la perpendiculaire *NV* qui représente la composante de *F* représentée elle-même par *EV*. Alors si de *V*, intersection de *NV* & de la direction de *F*, on abaisse une perpendiculaire *VD* sur la face opposée *AC*, le point *D* est le lieu où doit être appliquée la résistance exercée sur *AC*. Car autrement le coin tourneroit sur lui-même. Le coin étant supposé ne devoir tourner en aucun sens, & les résistances étant appliquées en *P* & *D*; on trouve en achevant le parallélogramme *DVNE*, que  $F \sin. VEN = VN \sin. VNE$ . Mais  $VEN = 90^\circ$  &  $VNE = ACB$ , donc  $F = VN \sin. ACB$ ; ou  $F:VN::\sin. ACB:1$ , c'est-à-dire que la résistance, qui peut être balancée par *VN*, composante de *F*, & qui est appliquée sur la face latérale *BC* du coin, l'emporte sur la valeur de *F*, dans le rapport du rayon au sinus de *ACB*, ou d'autant plus que l'angle *ACB* est plus petit. Ainsi une résistance *VN* doit être vaincue lorsqu'on emploie une force *F* plus grande que  $VN \sin. ACB$ . C'est par cette raison

qu'on rend très-aigus, les coins nommés *langues* qu'on emploie pour soulever un vaisseau dans son berceau. Leur face AC repose horizontalement sur un billot ou sur la coite; & la face BC s'insinue sous la ventrière, lorsque la tête AB, est chassée à coup de masse dans le sens CE. La composante VN, résultante de ce choc, agit sur le vaisseau, & l'autre composante VD est détruite par la résistance de la coite ou de la cale.

Dans les chantiers de construction, des coins de la forme ABC servent aussi à pousser comme à maintenir les pieds des acores. Souvent aussi pour assurer, modérer, ou anéantir facilement l'effet qu'on leur fait produire, on accouple deux coins égaux tels que ABC & rba; on rend leurs faces latérales BC & ab parallèles, & ces coins frappés en sens contraire dans cette situation indiquée, ne peuvent se séparer, mais ils doivent glisser l'un sur l'autre dans des directions opposées à celle des chocs. C'est encore avec de tels coins qu'on presse les bordages contre les couples d'un vaisseau qu'ils doivent couvrir.

Imaginons que deux coins rectangles & tels que ABC, & rba, soient réunis par leurs faces AC & ra, pour ne composer qu'un seul & même coin *nqptfu* (fig. 72) sous la forme ordinaire qu'on leur donne dans plusieurs arts. Alors la tête de la section de ce coin est représentée par bB (fig. 86) & le tranchant commun passe par le point C confondu avec le point a. Supposons que la force motrice F soit dirigée suivant Fn perpendiculaire à bB. Décomposons-la en deux autres parallèles & égales à f, qui soient dirigées suivant oz & uq, & qui placées dans le même plan bBC, soient à égale distance de Fn ou des faces confondues AC & ra. Dans cet état des choses, & décomposant comme précédemment chaque force partielle f, il faut pour l'état d'équilibre du coin & des résistances, 1° que la force VD soit égale à id afin que le coin ne puisse se mouvoir latéralement ou perpendiculairement à Fn; or  $VD = f \cdot \text{tang. } ABC$ , &  $id = f \cdot \text{tang. } rba$ , il faut donc que  $f \cdot \text{tang. } ABC = f \cdot \text{tang. } rba$ , ou que  $ABC = rba$ . Les faces *pust* & *qusi* doivent, par cette raison, & pour cet effet, faire un angle égal avec le plan *mist* qui est perpendiculaire à la tête *nqu* (fig. 72); c'est d'après



ces principes qu'une telle figure a été donnée aux coins les plus habituellement en usage. Remarquons que ces forces  $VD$  &  $id$  doivent aussi être directement opposées, car autrement le coin sous l'impulsion de la force  $F$  seroit sollicité à tourner sur lui-même, ce qui est contre la supposition.

Quant aux forces composantes, dirigées suivant  $VN$  &  $ip$ , leurs valeurs sont indiquées par les équations  $f=VN$ . *sin.*  $ACB$ , &  $f=ip$ . *sin.*  $bar=ip$ . *sin.*  $ACB$ . Donc  $2f$  ou  $F=(VN+ip)$  *sin.*  $ACB$ . On voit donc que l'effet  $(VN+ip)$  de la force motrice  $F$  devient d'autant plus grand qu'on rend plus aigu l'angle  $BCA$ . On peut faire aussi la proportion  $(VN+ip):F::1:\sin. ACB::BC:BA$ . Ainsi une résistance  $(VN+ip)$  doit être surmontée par une force  $F$ , lorsque celle-ci surpasse  $(VN+ip)$ . *sin.*  $ACB$ . Ce rapport explique l'effet, des canifs, des ciseaux, des couteaux, des haches, des herminettes & des instrumens coupans en général. Ils agissent comme des coins, & ils doivent présenter des tranchans d'autant plus fins ou aigus, qu'ils sont destinés à être plus facilement introduits entre des corps, ou entre les parties d'un corps.

Les instrumens pointus, & faits pour pénétrer dans les corps, tels que les aiguilles, les poinçons, &c., ont aussi des effets dont l'explication est fondée sur les mêmes principes. Leur forme est-elle conique (fig. 6); supposons que la force motrice  $F$  soit appliquée suivant  $oa$  perpendiculairement à la base  $cdb$ . Imaginons dans un tel cône autant de sections triangulaires  $abc$ , qu'il y a de diamètres dans la base; & enfin considérons  $F$  comme étant décomposée en autant de forces qu'on peut tirer de lignes diverses  $ac$ ,  $ab$ ,  $ah$ , &c. dans la surface du cône. On voit alors par la théorie précédente qu'un tel cône, poussé par une force  $F$  suivant  $oa$ , pour être introduit parmi des corps qui le touchent dans tout son contour, & pour les séparer, doit les repousser également dans tous les sens, & avec d'autant plus d'effet que l'angle  $cao$  est plus petit. C'est cette propriété qui dans la marine a fait donner une forme conique, aux instrumens qui sous le nom d'épissaires sont employés à écarter les torons d'un cordage étroitement commis, pour

faire des épissures convenables ou enlacer des cordages séparés. C'est enfin par cette raison que la forme pyramidale & triangulaire ( fig. 5 ) convient aux aiguilles qui sont nécessaires & commodes pour coudre ou des voiles , ou des ralingues , &c.

239. *Des forces physiques ou naturelles, qui ont des rapports utiles à l'art de la marine.* Jusqu'ici nous avons parlé des forces motrices en général; nous avons indiqué les mouvements qu'elles doivent produire, lorsqu'elles sont appliquées aux corps, soit immédiatement, soit par le secours intermédiaire des machines; ainsi il reste encore à expliquer, par les principes précédens, les effets des forces naturelles & physiques, dont l'action mérite d'être considérée dans la pratique de l'art de la marine.

Parmi ces forces, les principales sont, la gravité; les efforts dont les hommes ou les animaux sont habituellement capables; la pression de l'eau; sa résistance; l'action du vent, des lames, des courans; le frottement, la roideur des cordes; &c. Occupons-nous d'abord de la gravité. Cette force agit sur toutes les parties de la terre; elle paroît même animer toute la nature, sous le nom d'attraction; & présente la source des affinités de tous les corps de l'Univers, ainsi que des liaisons des élémens matériels de chaque corps. Sur toute la terre, sans cesse elle sollicite les corps à descendre vers le centre du globe, & perpendiculairement à sa surface; & lorsqu'aucun obstacle ne s'y oppose, elle communique à un corps, quelle que soit sa masse, ou quelque soit le nombre de ses parties matérielles, un égal degré de vitesse, à chaque instant de la durée.

C'est l'expérience qui a dévoilé, l'universalité, ainsi que l'égalité de cette action de la gravité; & c'est elle aussi qui a fait connoître que cette force s'exerce de la même manière sur les corps qui sont en mouvement comme sur ceux qui sont en repos. Dans ce dernier état, les corps conservent donc une tendance toujours renaissante, au mouvement; & c'est cette tendance, lorsqu'elle ne peut avoir son effet, qui est précisément la force naturelle qu'on suppose à tous les corps terrestres, & qu'on nomme leur *poids*. Par cette raison, un corps

pesant ne peut être maintenu dans un repos durable, qu'autant qu'une puissance étrangere exerce sur lui une action égale, contraire & directement opposée à son poids ou à sa gravité. Comme toutes les parties d'un corps sont également sollicitées au mouvement par cette force, (suivant l'expérience) la résultante de toutes ces forces partielles, paralleles & égales doit passer nécessairement par le centre de masse d'un tel corps, & ce point reçoit alors le nom de *centre de gravité*; parce que le poids du corps peut être regardé comme réuni dans ce point unique. Nommons  $M$ , la masse d'un corps, ou la somme de ses particules matérielles,  $G$  le poids de cette masse ou la résultante de toutes les forces égales qui sollicitent au mouvement, chaque particule considérée comme pesante. Considérons aussi la gravité (ainsi que l'expérience le démontre) comme une force accélératrice constante. Ainsi nous devons exprimer les rapports des effets de cette force par les équations déjà connues (210)  $MV = Gt$ , &  $ME = \frac{1}{2}Gt^2$ . Quant à la mesure de ces effets, elle est donnée par l'expérience qui a fait connoître que pendant une unité de temps, telle qu'une seconde, la gravité fait parcourir un espace de 15,098 pieds, à un corps quelconque qu'elle anime seule & qui, placé à la surface de la terre, obéit à son action librement & sans obstacle. Ainsi  $E = 15,098$  pieds lorsque  $t = 1$ ; & alors  $G = 2 \cdot 15,098$ . M. Représentons 2. 15,098 pieds par  $g$ ; les équations générales se changeront en celles-ci  $v = gt$ . &  $E = \frac{1}{2}gt^2$ , pour exprimer particulièrement les rapports des effets de la gravité; & on en conclura celles-ci  $2gE = v^2$ ,  $vt = 2E$  &  $Mv^2 = 2GE$ . Ces formules servent à déterminer, soit la vitesse qu'un corps a pu acquérir après un temps  $t$ , qu'il a employé à descendre librement d'une hauteur connue  $E$ ; soit le temps de sa chute, lorsque sa vitesse acquise  $v$ , & la hauteur  $E$  sont données; soit enfin la hauteur  $E$ , lorsqu'on indique les valeurs de  $v$  ou de  $t$ . Par exemple, un corps est-il tombé du haut d'un mât ou d'une élévation de 150 pieds, sa vitesse à la fin de sa chute est indiquée par l'équation  $v^2 = 2gE = 2 \cdot 15,098 \cdot 150$ ; car on en conclut qu'elle est de 95,178 pieds; ou telle qu'elle seroit parcourir au même

corps cet espace uniformément, dans l'intervalle d'une seconde. Réciproquement si on cherchoit quelle devoit être la hauteur de la chute à la fin de laquelle un corps auroit acquis une vitesse de 95, 178 pieds, elle seroit trouvée de 150 pieds par la même formule. Enfin veut-on savoir le temps ou la durée d'une telle chute ( toujours libre ) on la détermine par l'équation  $2E = gt^2$  & elle doit être de 3", 152.

240. Remarquons que toutes les vitesses imaginables peuvent être communiquées à un corps par la gravité, en variant les hauteurs desquelles on peut le faire descendre. C'est pourquoi, quelque soit la vitesse imprimée à un corps par une puissance différente de la gravité, il est permis de regarder cette vitesse comme celle que ce corps eût acquise, par sa chute d'une hauteur convenable, & elle est toujours donnée par l'équation  $v^2 = 2gE$ .

Ajoutons quelques remarques, pour l'application des formules qui sont relatives, soit au mouvement des corps, soit à leur équilibre. 1.<sup>o</sup> Une force quelconque  $F$  peut être au besoin représentée par le poids d'un corps; car ce poids est aussi une force qui sollicite le corps à se mouvoir avec une certaine vitesse  $v$ ; & si  $mu$  exprime l'énergie de  $F$ , on peut toujours imaginer un corps dont la masse  $M$  est telle que son poids  $MV$  soit égal à  $mu$ . 2.<sup>o</sup> La masse d'un corps ou la somme de ses particules matérielles peut être représentée par son poids; car le poids étant proportionnel à la masse, il peut être choisi pour lui servir de mesure. 3.<sup>o</sup> Enfin il faut se souvenir que la quantité  $t$  qui se trouve dans ces formules n'exprime que le rapport de plusieurs secondes à une seule qui est l'unité de temps.

241. Les formules précédentes sont relatives au mouvement d'un corps qui obéit librement à la gravité & qui se meut perpendiculairement à la surface de la terre, mais ce corps peut être placé sur un plan qui est incliné à la direction verticale  $eq$  (fig. 70) de la gravité; & alors voici comment son mouvement sur ce plan doit être déterminé. Lorsque  $G$  représente la gravité du corps  $G \sin. i$  exprime la force qui le sollicite à suivre la direction  $BA$ , ( en nommant  $i$  l'angle  $qen$  ou  $BAC$  )

& l'action de  $G \sin. i$  étant continue & égale, comme la gravité, elle est accélératrice, constante, ainsi les formules précédentes doivent exprimer ses effets en y substituant  $G \sin. i$  à la place de  $G$ . De là il suit que si on compare les vitesses acquises, par un corps, lorsqu'il tombe perpendiculairement de  $B$  en  $C$ , ou lorsqu'il se rend de  $B$  vers  $A$  par l'effet de la gravité, on trouve qu'elles sont parfaitement les mêmes. Car alors on a  $MV^2 = 2G \cdot BC$ , &  $Mu^2 = 2G \cdot BA \sin. i$ ; & comme  $BC = BA \sin. i$ , la vitesse  $u$  acquise de  $B$  en  $A$  est égale à la vitesse  $V$  qui est due à la hauteur  $BC$ . De là il suit aussi que si on compare les durées de la chute d'un corps, lorsqu'il parcourt, ou le diamètre vertical  $id$  d'un cercle (fig. 15) ou sa corde  $bd$ , qui est inclinée sous un angle  $i$  avec l'horizontale  $zde$ , on reconnoît qu'il y a égalité entre les temps  $t$  &  $T$  de ces mouvemens. En effet on a pour l'un & l'autre cas les équations suivantes  $2M \cdot id = Gt^2$ , &  $2M \cdot bd = G \sin. i \cdot T^2$ ; mais  $id \sin. i = bd$  dans le triangle rectangle  $ibd$ ; c'est pourquoi  $t = T$ .

Concluons de cette théorie, qu'un vaisseau qui est lancé à la mer, & qui glisse sur un chantier de 300 pieds de longueur, dont l'inclinaison est d'un pouce par pied, devroit acquérir par sa descente entière, & sans l'obstacle du frottement, une vitesse due à la hauteur de 300 pouces ou de 25 pieds. On voit aussi que la durée de sa descente est la même que s'il tomboit d'une hauteur égale à 3,600 pieds.

Employons cette même théorie pour indiquer les circonstances importantes du mouvement des projectiles pesans tels que des boulets & des bombes, lorsqu'ils sont lancés dans l'espace par une force quelconque. Nous n'aurons pas égard ici aux effets très-sensibles de la résistance de l'air; de sorte que ce qui va être dit, en donnant une idée de ces mouvemens dans le vuide, ne peut que faire préjuger en partie les effets des projections ordinaires qui sont faites à travers les couches plus ou moins épaisses de l'atmosphère. Soit  $a$  le point (fig. 87.) d'où part une bombe, chassée avec une vitesse  $V$  dans une direction  $ar$  qui fait avec l'horizontale  $ac$  un angle  $rac = \alpha$ . Décomposons cette vitesse en deux autres, l'une horizontale

dirigée suivant  $ac$ , dont la valeur est exprimée par  $v \cos. a$ ; & l'autre parallèle à la verticale  $az$  qui est égale à  $v \sin. a$ . Aussi-tôt que la bombe sort de  $a$  où est placée la bouche de la pièce, la pesanteur agit sur elle, & constamment pendant toute la durée de sa course. Sans effet sur la vitesse horizontale de projection; elle ne cesse de détruire à chaque instant quelque degré de sa vitesse verticale. Si, avec la seule vitesse  $v$ , la bombe parcourroit uniformément sur la direction  $ar$  un espace  $ai$  dans l'unité de temps; & si la pesanteur est capable de lui faire parcourir pendant le même temps une hauteur  $az = io$ . Alors la bombe sollicitée en même temps par la pesanteur & par la force de projection, ne peut se trouver après l'unité de temps qu'au point  $o$ , qui est l'extrémité de la diagonale du parallélogramme des forces  $aioz$  & ainsi successivement. C'est pourquoi la bombe étant parvenue au plus haut point  $d$  de sa course  $adc$ , & ne pouvant pas s'élever à une plus grande hauteur, il faut alors que sa vitesse verticale de projection se trouve entièrement détruite à son arrivée au point  $d$ . Il faut donc qu'alors la pesanteur ait communiqué à ce projectile une vitesse contraire & égale à  $v \sin. a$ . Soit  $t$  le temps employé par la bombe pour arriver de  $a$  en  $d$ , on a l'équation  $v \sin. a = gt$ . Pendant ce temps, la bombe avec la seule vitesse  $v$  seroit parvenue au point  $r$  de la ligne  $ar$ , & par l'effet isolé de la pesanteur elle seroit descendue de  $r$  en  $d$ : c'est pourquoi  $rd = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}vt \sin. a$ ; & comme  $rb = vt \sin. a$  puisqu'on suppose que  $ar = vt$ , il s'ensuit donc que  $rd = \frac{1}{2}rb = db$ . Soit  $h$  la hauteur de laquelle devoit tomber un corps pesant pour acquérir la vitesse  $v$ , on doit dire que  $2hg = v^2$ , ainsi la ligne  $rd$  étant telle que  $2.rd.g = v^2 \sin. a^2$  il faut que  $rd = h \sin. a^2 = db$ . Concluons aussi que l'abscisse  $ab$  ou la distance horizontale de  $a$  au point de la plus grande ascension de la bombe est égale à  $2h \sin. a \cos. a$ . Car dans le triangle rectangle  $abr$  on peut dire  $ab:br$  ou  $2.bd.: \cos. a: \sin. a$ , ainsi  $ab \sin. a = 2.h \sin. a^2 \cos. a$ , ou  $ab = 2h \sin. a \cos. a = h \sin. 2a$ .

Ces réflexions font voir qu'une bombe dans sa route curviligne de  $a$  en  $d$  ne cesse de s'élever, & qu'après avoir passé  $d$ , elle doit descendre à l'horison. Soit  $T$  le temps

qu'elle met à arriver en  $u$ , ou qu'elle eût mis à parcourir avec la vitesse uniforme  $v$  l'espace  $as$ , si la pesanteur n'eût pas contrarié son mouvement, la ligne  $sf$  dont elle se feroit élevée, seroit  $= VT \sin.a$ ; mais dans le temps  $T$  la pesanteur doit la faire descendre d'une hauteur  $su = \frac{1}{2}gT^2$ ; ainsi nommant  $y$  &  $x$  l'ordonnée  $uf$ , & l'abscisse  $af$ , on a  $y = VT \sin.a - \frac{1}{2}gT^2$  &  $x = VT \cos.a$ . Tel est le rapport de  $x$  &  $y$  pour chaque point de la route de la bombe, & ces équations combinées donnent celles de cette courbe. On voit que dans deux cas l'ordonnée  $y = 0$ ; 1°. lorsque  $T = 0$ , c'est-à-dire en  $a$ , & 2°. lorsque  $VT \sin.a = \frac{1}{2}gT^2$ , c'est-à-dire en un point  $c$  de l'horizontale  $ac$ . Cette dernière équation fournit la valeur de  $T$  ou la durée du mouvement de la bombe de  $a$  en  $c$ ; & en la multipliant par celle-ci  $x = VT \cos.a$ . On a  $\frac{1}{2}gT^2 x = V^2 T^2 \cos.a. \sin.a$ . On fait d'ailleurs que  $2hg = V^2$ , donc  $x = 4h \cos.a. \sin.a = 2h \sin.2a$ . Telle est la valeur de  $ac$  ou de l'amplitude du jet de la bombe qui est lancée sur une direction  $ar$  dont l'inclinaison à l'horison est  $a$ . Cette portée  $x$  doit donc être la plus grande possible, lorsque  $a = 45^\circ$ . puisqu'alors  $\sin.2a$  est le plus grand des Sinus. Dans tout autre cas la portée est plus petite, & elle peut être produite en lançant la bombe sous une inclinaison, qui soit, ou  $a$  ou  $(90^\circ - a)$ ; parce que les valeurs de  $\sin.2a$  & de  $\sin.2(90^\circ - a)$  sont parfaitement les mêmes. L'équation  $ac = 2h \sin.2a$ , peut servir à déterminer si une piece peut porter de  $a$  en  $c$ , mais alors il faut connoître la valeur de  $h$ ; & on l'obtient en éprouvant la portée  $B$  de la piece tirée avec une poudre donnée sous un angle  $A$  de  $45^\circ$ . Car alors  $B = 2h$ , puisque  $\sin.2 = 1$  & on peut dire que la portée de la piece sous un autre angle  $a$ , est telle que  $ac = B \sin.2a$ ; donc  $B:ac::1:\sin.2a$ . Cette proportion doit donc démontrer dans tous les cas, & la possibilité d'une portée désirée  $ac$ , & l'angle  $a$  qui lui convient.

242. La méthode de mesurer le temps en secondes est encore une application des précédens principes, & un homme de mer doit la connoître pour vérifier au besoin les sabliers qui servent à estimer en mer la longueur de la route d'un vaisseau. Dans cette vue d'utilité, considérons le mouvement d'une balle de plomb d'un petit

diametre sur un arc *ard* (fig. 15) qu'il parcourt, par l'effet de sa pesanteur, (en supposant vertical le diametre *ad*). Décomposons cet arc *ard* en des arcs infiniment petits, tels que *qr*. Soit menée la petite ligne *qu* parallele à *id*, on peut dire (à cause des tri. semblables *orp* & *qur*),  $qr : ro :: qu : rp$ , ou en nommant *r* le rayon *ao* de cet arc,  $qr^2 : r^2 :: qu^2 : (2r - pd) pd$  (124) ou enfin,  $qu.r^2 = 2r.pd.qr^2$  parce que, l'arc *ad*, & la ligne correspondante *pd*, sont supposés d'une très-grande petitesse.

La vitesse *v* que cette balle a pu acquérir après avoir parcouru l'élément *ar*, est donnée par l'équation  $v^2 = 2g.cp$  (240)  $= 2g(cd - dp)$ . Le temps infiniment petit *q* qui est employé par la balle à parcourir *qr*, permet de considérer, comme uniforme, sa vitesse sur *qr*. Il est donc donné par l'équation  $qr = v.q$  (212). Ainsi  $qr^2 = v^2.q^2$  &  $uq^2.r^2 = 2r.pd.v^2.q^2 = 4.g.r.pd(cd - dp)q^2$ , ou  $uq^2 : (cd - dp) dp :: 4gq^2 : r$  (B).

Si dans un autre cercle, dont, *cd* seroit le diametre, & *a* un élément infiniment petit de sa circonférence qui correspondroit à une partie *uq* du diametre; on pourroit dire, (comme on l'a dit du petit arc *qr* qui appartient au cercle dont le rayon est *r*)  $a^2 : \frac{1}{4}dc^2 :: qu^2 : (dc - dp) dp$ ; & comparant cette proportion à la précédente (B) on en conclut que  $a^2 : dc^2 :: gq^2 : r$  ou  $a^2 : q^2 :: g.dc^2 : r$ . Le rapport de *a* avec *q* est donc constant. Raisonnons de la même maniere sur tout autre arc, tel que *qr* qui fait partie de *ardb* (en supposant que les arcs très-petits *ard* & *db* placés de chaque côté de la verticale sont égaux, & parcourus dans un même temps, soit dans la descente, soit dans l'ascension de la balle): formons une suite de rapports égaux  $a : q :: a' : q' :: \&c.$ , & nous concluons, que la somme de tous les petits arcs *a*, ou la circonférence entiere *A*, dont *cd* est le diametre, est à la somme *T* de tous les instans de la durée du mouvement de la balle sur l'arc entier *adb*, comme *a*:*q*. On peut donc dire que  $A.^2r = T.^2g.dc.^2$  Mais  $A = c.cd$  lorsque le rapport d'une circonférence à son diametre est *c*:1. Il suit donc de cette théorie que  $c.^2r = g.T^2$ . La longueur de l'arc *adb*, ne se trouve plus dans cette équation; ainsi des arcs, très-variés dans leur grandeur, pourvu qu'ils soient très-petits, doivent



doivent être parcourus dans un même temps  $T$  par une balle pesante.

Remarquons que si on compare le temps  $\frac{1}{2}T$  qu'une telle balle met à descendre de  $a$  en  $d$ , avec celui  $t$  qu'elle emploieroit à parcourir la corde  $ad$  de ce même arc, (& qui est exprimé par l'équation  $gt^2=4r$ ), on trouve que  $\frac{1}{4}T^2:t^2::\frac{1}{4}c^2:4$ , ou  $\frac{1}{2}T:t::\frac{1}{4}c:1$ , c'est-à-dire que  $\frac{1}{4}c$  ou le quart d'une circonférence étant plus petit que le diamètre  $1$ , la balle descend de  $a$  en  $d$  par l'arc  $ad$ , en moins de temps que par la corde  $ad$  de cet arc.

Si cette balle, pour se mouvoir sur l'arc  $adb$ , est suspendue, par un fil inextensible, à un point  $o$ , la formule précédente indique la longueur qu'il convient de donner au rayon  $ro$ , pour en composer un pendule à seconde, ou pour que dans une seconde de temps la balle supposée parcoure l'arc entier  $adb$ . En effet l'expérience (239) a fait connoître  $g=2$  (15,098) pieds. Ainsi  $T$  devant être d'une seconde, il faut que  $r=3,0595$  p.  $=3$  p. 0p 8lig, 57. Réciproquement la même formule démontre que si un pendule simple, qui fait ses oscillations en une seconde de temps, a une longueur de 3,0595 p., la pesanteur doit faire tomber, dans le même temps, tout corps pesant, d'une hauteur de 15,098 p. On voit aussi que si on compare les longueurs différentes de plusieurs pendules, on a pour chacun une équation semblable à celle-ci  $T^2g=r.c^2$ . Ainsi leurs longueurs sont entr'elles comme les quarrés des durées de leur oscillation. C'est pourquoi veut-on connoître la longueur  $l$  d'un pendule à demi-seconde, on la trouve en disant  $\frac{1}{4}T^2:T^2::l:r::1:4$  ou  $l=\frac{1}{4}r=0p$  9pou 2l  $\frac{1}{7}$ . On conclut de ce résultat un moyen facile & commode de vérifier en mer les sabliers de demi-minute, &c. Une balle de plomb, d'un petit diamètre, doit être suspendue pour cet effet à un point fixe par un fil inextensible, de maniere que la distance du centre de la balle au point de suspension soit de 9 ou 2lig  $\frac{1}{7}$ , & ce pendule abandonné à lui-même après avoir été écarté de quelques degrés de la verticale doit faire des oscillations  $adb$  dont chacune s'exécute dans une demi-seconde. Enfin on doit voir, par cette formule, l'utilité des observations que les

circonstances présentent si souvent aux navigateurs, lorsque transportés dans divers lieux de la terre ils peuvent y mesurer la longueur variable des pendules à secondes. Car c'est par elles, que la constance ou les variations de la pesanteur peuvent être déterminées sur les points les plus éloignés du globe, & qu'on peut décider d'une manière plus approchée de la régularité qu'on doit supposer à la figure de la terre.

243. La vitesse angulaire (202)  $u$  de la balle B (supposée très-petite) au commencement de sa rotation autour de l'axe O, est exprimée par l'équation  $u.Br^2 = G \sin. i.r$ . En nommant  $Br^2$  le moment d'inertie de la balle, &  $i$  l'angle du fil avec la verticale. Mais si, sans changer, ni son poids, ni la distance de son centre de masse à l'axe O, son volume est augmenté ainsi que son diamètre; alors cette boule auroit à l'égard d'un axe qui, parallèle à o, passeroit par le centre de masse, un moment d'inertie exprimé par  $BA^2$  & sa vitesse angulaire  $v$  seroit alors donnée par l'équation  $v(BA^2 + Br^2) = G \sin. i.r$ . Cette vitesse  $v$  ne seroit donc plus dans ce nouvel état de la boule, égale à celle de la petite balle. Elle lui seroit même inférieure; car alors  $v:u::r^2:A^2+r^2$ . Ainsi pour les rendre égales, ou pour qu'un grand corps, sous le nom de pendule composé fasse ses oscillations dans le même temps qu'un pendule simple, il faut que la distance du centre de masse de ce dernier, au point de suspension, soit plus grande que celle du centre du pendule composé. Nommons  $d$  celle-ci, & nous voyons que l'égalité des oscillations de ces deux corps ne doit avoir lieu que dans le cas où  $rd = A^2 + d^2$ , ou lorsque  $r:d::A^2+d^2:d^2$ . Remarquons, pour indiquer une application utile de ces principes, que cette équation peut servir à trouver la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps qu'un grand corps qui est connu sous toutes les faces nécessaires.

244. Nous avons dit (193) que, chaque partie élémentaire d'un corps, étant sollicitée au mouvement par une force qui est proportionnelle à la masse particulière de chacune, la résultante de toutes ces forces partielles passe nécessairement par le centre de masse d'un tel

corps. C'est ainsi que la pesanteur agit sur tous les élémens d'un corps terrestre & dans des directions parallèles. La résultante des poids de toutes les parties d'un corps, passe donc par le centre de masse, nommé alors *centre de gravité*; sa direction est verticale, & sa valeur est composée de celle de tous les poids élémentaires. Un corps, par conséquent, est-il suspendu par un fil dont la résistance fait équilibre au poids total de ce corps, ou à la résultante indiquée; la direction verticale de ce fil doit passer par le centre de gravité du corps. Il en est de même si celui-ci est suspendu par un fil attaché à un nouveau point de sa surface. C'est pourquoi le point d'intersection des directions de ce fil, dans ces états de suspension & d'équilibre, doit être le lieu du centre de gravité du corps proposé. Tel est le moyen simple qu'on doit employer, lorsqu'il peut l'être, pour déterminer par expérience le lieu du centre de gravité d'un corps quelconque, & il est utile à connoître pour une telle recherche, dans une infinité d'occasions. Le calcul conduit aussi à trouver le lieu du centre de gravité des corps, par une méthode générale & son importance nous engage à l'exposer ici avec tous les détails nécessaires.

245. Soit proposé de fixer le lieu du centre de gravité d'une ligne solide *ad* (fig. 78) qui est composée d'un nombre *n* de parties homogènes *a* ou également pesantes & également distribuées sur sa longueur. Ces parties sont sollicitées au mouvement par la pesanteur, & toutes de la même manière, suivant des directions verticales telles que les lignes *ef* & *ao*, qui indiquent particulièrement comment agit cette force sur les points extrêmes de *ad*. Soit *ig* la direction de la résultante de toutes ces forces partielles. Elle passe par le centre de gravité *m*, de *ad*. Nous avons vu qu'à l'égard d'un point *O*, la somme des momens de toutes les forces partielles qui agissent sur les éléments *a* de *ad* est égale au moment de leur résultante. Ainsi *ogf* étant une ligne perpendiculaire à la direction de la pesanteur, & nommant *b*, *c*, *d*, *e* & *c* les distances diverses de *O* aux directions des poids des éléments de *ad*, on doit avoir cette équation  $a(o + b + c + d + \dots + of) = na.og$ . Mais la

somme ( $o+b+c+d\dots+of$ ) est celle des termes d'une progression arit. dont le premier est  $o$ , le dernier  $of$ , & le nombre  $n$ . Ainsi  $(85) \frac{1}{2} a.n.of = n.a.og$ ; ou  $og = \frac{1}{2} of$ . On doit en conclure que  $am = md$ , ainsi le centre de gravité  $m$  d'une ligne droite est placé au milieu de sa longueur.

Comme il est essentiel de savoir déterminer la position d'un tel point  $m$  dans l'espace, imaginons trois plans perpendiculaires entr'eux, l'un  $Rqt$  horizontal & les deux autres verticaux  $zqR$  &  $zqt$ . Les lignes  $mg$ ,  $ao$ ,  $df$  sont les distances des points  $a, m$ , &  $d$ , au plan  $Rqt$ , & sur ce plan, les lignes  $on$ ,  $gu$  &  $ft$  perpendiculaires à  $qt$  sont les distances des mêmes points  $a, m, d$  au plan  $zqt$ , comme  $qn$ ,  $qu$  &  $qt$  sont leurs distances au troisieme plan  $zqR$ . Puisque  $og = gf$ , on peut dire & que  $gm = \frac{1}{2}(ao+df)$ ; & que  $gu = \frac{1}{2}(on+ft)$ . Ensuite  $nu = \frac{1}{2}nt$ , par conséquent  $nu+qn$  ou  $qu = \frac{1}{2}(nt+nq+nq) = \frac{1}{2}(qt+nq)$ . La distance du centre de gravité  $m$  d'une ligne solide  $ad$ , tracée dans l'espace, à l'un quelconque de trois plans perpendiculaires entr'eux, est donc donnée par celle de ses points extrêmes à ces mêmes plans; & ces dernières distances étant connues la position de  $m$  est suffisamment indiquée dans l'espace. L'application de cette regle est très-facile. Soit proposé de trouver le centre de gravité du contour du tri.  $oqp$  (fig. 2). Il faut dans le plan  $cdab$  de ce tri. mener deux lignes  $da$  &  $ab$  perpendiculaires entr'elles & abaisser des sommets  $o, q$ , &  $p$  des perpendiculaires sur ces axes  $ad$  &  $ba$ . Ensuite on forme la somme des produits particuliers de la moitié de chaque côté, multipliée par la somme des distances des deux extrémités à l'un des axes, & on divise cette somme par le contour du triangle. L'équation est alors la distance du centre cherché à l'axe de comparaison. On calcule de la même maniere sa distance au deuxieme axe, & on parvient à trouver la position de ce point sur le plan du triangle donné. La même méthode doit être suivie dans la recherche du centre de gravité du contour d'un polygone quelconque. S'agit-il de celui de la circonférence d'un cercle? Il ne peut être placé que dans le plan du cercle. Ainsi en y traçant deux

diametres perpendiculaires entr'eux, pour les considérer comme les deux axes de comparaison; on voit (fig. 20) que les momens des élémens de *ucdn* à l'égard de l'axe *un*, sont les mêmes que ceux de *ufn*; c'est-à-dire que leur somme est nulle (200). Ainsi le centre de gravité doit être situé sur le diametre *un*. On démontreroit de la même maniere que ce centre est sur l'autre axe *fc*, & on en concluroit qu'il est placé au centre même du cercle. On en diroit autant de celui de tout polygone régulier, en le supposant inscrit à un cercle.

246. Faut-il trouver le centre de gravité de la surface d'un tri. *oqp* (fig. 2)? On peut supposer que cette étendue est formée par celle d'une infinité de lignes matérielles & uniformement pesantes, qui seroient placées parallèlement à *qp* entre les côtés *oq* & *op*. Alors une ligne *oe* menée du sommet *o* au milieu du côté opposé *qp*, doit passer par le milieu & par le centre de gravité de toutes les lignes matérielles supposées. Leur centre commun de gravité, ou celui de la surface du triangle est donc placé sur la ligne *oe*. Le même tri. *oqp* peut également être regardé comme composé d'une infinité d'autres lignes matérielles, qui soient menées parallèlement à *op*, entre les côtés *qo* & *qp*, & alors le centre de gravité de ces lignes, ou celui du tri. devroit se trouver sur une ligne *qi* menée du sommet *q* au milieu du côté opposé *op*. Le centre de gravité du triangle est donc en même temps & sur *oe* & sur *qi*; son lieu est donc le point d'intersection des deux lignes *oe* & *qi*. Tel est le moyen mécanique qu'il faut employer pour assigner le lieu de ce centre, & voici comment on calcule sa position.

Si on mene une ligne *ei*, elle est nécessairement parallèle à *oq*, & les tri. *qio* & *eri* sont semblables. On peut donc dire  $ri:rq::ei:oq$ ; mais  $ei=\frac{1}{2}oq$ , ainsi  $ri=\frac{1}{2}rq$ , ou *ri* est le tiers de *qi*; c'est-à-dire que si dans un tri. on mene du sommet d'un de ses angles une ligne droite au milieu du côté opposé, le centre de gravité de sa surface est placé au tiers de la longueur de cette ligne (à compter du côté qu'elle divise). On peut dire aussi que la distance de ce centre à l'un ou l'autre de deux

axes *da* & *ab* perpendiculaires entr'eux & dans le même plan, est donnée par celles des sommets de ce triangle aux mêmes axes. Car soient menées perpendiculairement à *da*, les lignes *pf*, *qg*, *rn*, *it*, *oh* des sommets *p*, *q*, *o*, & des centres de gravité *r* & *i*, du tri. & du côté *op*, on a l'équation  $rn = \frac{2}{3} it + \frac{1}{3} qg$ , parce que la figure *ggin* est un trapeze & parce que  $ri = \frac{1}{3} iq$ ; mais  $it = \frac{1}{2} (oh + pf)$ , c'est pourquoi  $rn = \frac{1}{3} (oh + pf + qg)$ . On démontreroit de même que  $na = \frac{1}{3} (ga + fa + ha)$ . On peut donc dire qu'étant données les distances des sommets des angles de ce tri. à deux axes perpendiculaires tracés dans son plan, la position de son centre de gravité doit être déterminée sur le même plan. La même méthode conduiroit aussi à conclure que la distance de ce centre à l'un ou l'autre de trois plans ou axes perpendiculaires entr'eux dans l'espace, est égale au tiers de la somme des distances des sommets des angles de ce tri. aux mêmes plans ou axes. De là, on doit conclure le procédé qu'il faut suivre pour trouver le centre de gravité de tout polygone, puisqu'on peut regarder toutes les figures planes comme composées de triangles. Le centre de gravité d'un cercle est donc placé au centre de sa surface, & on peut le démontrer comme on l'a fait dans la recherche du centre de gravité d'une circonférence de cercle.

247. Soit le trapeze *cabd* (fig. 42) dont le centre de gravité est demandé. Ce centre est sur une ligne *sl*, qui réunit les milieux des bases parallèles *cd* & *ab*. Si une diagonale *cb* partage ce trapeze en deux tri. *cdb* & *cba* dont les centres de gravité sont aux points *r* & *u* qui sont joints par la ligne *ru*; le centre commun de ces tri. doit être placé sur *ru* & comme il l'est aussi sur *sl*, le lieu du centre de gravité du trapeze est au point *n* d'intersection des lignes *ur* & *sl*.

Veut-on calculer la distance de ce point *n* à la base de *ab*? Soit menée par *n*, la ligne *mo* qui est la hauteur du trapeze ainsi que des triangles qui le composent. Alors conformément à ce qui a été dit précédemment, on a l'équation  $no \cdot \frac{1}{2} om(ab + cd) = \frac{1}{2} om \cdot cd \cdot \frac{2}{3} om + \frac{1}{2} om \cdot ab \cdot \frac{1}{3} om$  ou  $no(ab + cd) = \frac{1}{3} om(2 \cdot cd + ab)$ . Ainsi on peut déterminer

no étant données les bases & la hauteur d'un trapeze. On trouveroit auffi, par un calcul semblable aux précédens, que la distance du centre de gravité d'un trapeze, à l'un quelconque de trois plans perpendiculaires entr'eux, est toujours donnée par celles des centres de gravité, ou des sommets des angles, des triangles dont est formé un trapeze proposé.

C'est par tous ces moyens qu'il est possible d'assigner la position du centre de gravité des voiles d'un vaisseau, parce que leur forme est celle d'un triangle ou d'un trapeze. On trouveroit encore le lieu d'un tel centre dans un parallélogramme, à l'aide de la même formule dans laquelle on regarderoit comme égaux les côtés *ab* & *dc*.

248. S'il s'agit d'assigner le centre de gravité d'une ligne d'eau de vaisseau. Cette figure *abde* (fig. 24 G) est composée de deux parties *abd* & *aed* parfaitement égales, & ce centre doit être placé nécessairement sur la ligne diamétrale *ad* qui les sépare. La distance de ce centre au point *a* est donc la même que celle de la moitié *abdc*. Pour trouver cette dernière, imaginons, comme ailleurs (131), cette figure partagée en trapezes, & sous les mêmes conditions. Soient menées aussi des diagonales dans chacun de ces trapezes. L'intervalle, tel que *qs*, qui sépare deux ordonnées voisines, est la hauteur commune de tous les trapezes comme des triangles qui les composent. Ainsi la recherche du centre de gravité de cette figure exigeant celle des centres particuliers des triangles composans, voici les expressions des momens de ces derniers à l'égard d'un plan qu'on imagineroit passer par *a*, & auquel *da* seroit perpendiculaire.

Le moment du triangle *afm*, est  $\frac{1}{2}qs.fm^2qs = \frac{2}{6}qs.^2fm$ ; celui de *fmq* est  $\frac{1}{6}qs.^24.fm$ ; celui de *foq* est  $\frac{1}{6}qs.^25.oq$ ; celui de *oqs*, est  $\frac{1}{6}qs.^27.oq$ . Enfin ceux de *ons*, *nli*, *ilc*, *leb*, &c, sont  $\frac{1}{6}qs.^28.ns$ ,  $\frac{1}{6}qs.^210.ns$ ,  $\frac{1}{6}qs.^211.li$ ,  $\frac{1}{6}qs.^213.li$ ,  $\frac{1}{6}qs.^214.bc$ , &c.

Remarquons que le moment de chaque tri. qui a pour base une ordonnée *y* dont le rang est *n*, ou qui correspond à la division *n* de l'axe *ad*, est  $= \frac{1}{6}qs.^2(3n-4)y$ ; car les momens de *afm*, *foq*, *ons*, *nli*, *lbc*, &c. (qui terminent chaque tranche composante de la ligne d'eau *abdc*)

ont pour facteurs les nombres, 2, 5, 8, 11, 14, &c, ou une suite de nombres en progression arit. Ainsi le dernier (14 par exemple) est égal à  $2+3(n-2)$  parce que le nombre  $n$  des ordonnées placées depuis  $a$  jusqu'en  $c$ , excède d'une unité, celui des termes de cette progression. La somme des momens de ces triangles qui composent  $abdc$  est donc  $\frac{1}{6}qf^2(6.fm+12.oq+18.nf+24.li+.....+(3n-4)y)=qf^2(\frac{1}{2}fm+2.oq+3.nf+4.li+.....+\frac{1}{2}(3n-4)y)$ . Si on divise cette somme ( ) par celle des surfaces de tous ces triangles ( qu'on fait être égale à  $qf(\frac{1}{2}fm+oq+nf.li+.....+(\frac{1}{2}y)$  le quotient doit être la distance du centre de gravité de cette demi-ligne d'eau  $abdca$  comme de celui de la ligne d'eau entière  $abdea$  au plan A qui passe par le point  $a$ , ou la distance au point  $a$ , du point de  $ad$  où est situé le centre de la ligne d'eau entière. On doit remarquer que le contour de la ligne d'eau supposée rencontre l'axe  $ad$  aux deux points  $a$  &  $d$  auxquels correspondent des ordonnées nulles, & on voit aisément comment le calcul présenté devroit être modifié si ces ordonnées extrêmes étoient de quelqu'étendue.

249. Faut-il déterminer le lieu du centre de gravité d'une pyramide triangulaire  $abcd$  (fig. 74)? On peut supposer que sa solidité est formée par une suite infinie de triangles matériels, qui placés parallèlement à  $bcd$ , décroissent progressivement depuis cette base jusqu'au sommet  $a$ . Si le centre de gravité de  $bcd$  est supposé en  $u$  ou au tiers de la ligne  $de$  qui est menée du sommet  $d$  de ce triangle au milieu  $e$  du côté opposé  $bc$ , les autres tri. élémentaires, parallèles, & semblables à la base  $bdc$ , ont leur centre de gravité semblablement placé dans leur surface; c'est pourquoi une ligne menée du sommet  $a$  de la pyramide, au centre  $u$  de la base  $abc$ , doit nécessairement passer par le centre commun de gravité de tous les tri. supposés, c'est-à-dire par celui de la pyramide. Celui-ci doit aussi, par la même raison, être placé sur une autre ligne qui seroit menée du point  $d$  à un point  $o$  qui dans la face opposée  $abc$ , est au tiers de la ligne  $ae$  menée de  $a$  au milieu du côté opposé  $bc$ . Ainsi le centre de gravité de la pyramide, qui doit,



en même temps, être situé sur les deux lignes *do* & *au*, a son lieu au point *x* d'intersection de ces lignes. Tel est le moyen mécanique de désigner ce centre dans une pyramide triangulaire.

Calculons actuellement le rapport de *ux* à la longueur de *ua*; & à cet effet soit menée une ligne *ou*, qui nécessairement est parallèle à *ad*, puisque les lignes *ed* & *ea* sont coupées en parties proportionnelles aux points *o* & *u*. Les tri. *oxu* & *xad* sont donc semblables, & on peut dire  $ux:xa::ou:ad$ ; mais  $ou=\frac{1}{3}ad$  parce que  $eu=\frac{1}{3}ed$ ; donc  $ux=\frac{1}{3}xa$ , ou le point *x* qui est le lieu du centre de gravité d'une telle pyramide, est placé au quart de la longueur de la ligne *au* qui est menée du sommet de ce solide au centre de gravité de la surface de sa base.

La distance du centre *x* à l'égard d'un plan donné de position dans l'espace, peut aussi être déterminée par les distances des sommets des angles de la pyramide triangulaire, à ce même plan. Soit *av* un tel plan (fig. 73) au-dessus duquel est supposée cette pyramide dont la base est *Apr*, & le sommet *u*. Soient abaissées des perpendiculaires *zs*, *uq*, *pm*, *Af*, *rc*, & *ob*, des points qui sont, le centre de gravité *z* de la pyramide, son sommet *u*, ceux des angles de la base *Apr*, & le centre de gravité *O* de cette base. La distance  $zs=\frac{1}{4}uq+\frac{3}{4}ob$ ; on a aussi  $ob=\frac{1}{3}na+\frac{1}{3}pm$ ; &  $na=\frac{1}{2}(Af+rc)$ . Ainsi en substituant & réduisant on trouve  $zs=\frac{1}{4}(uq+pm+Af+rc)$ . D'après ce résultat qui a toute la généralité convenable, on voit que dans un corps dont la forme est quelconque, & qui peut toujours être décomposé en pyramides triangulaires, il devient facile de déterminer dans l'espace le point où est placé son centre de gravité en cherchant à l'aide des principes précédens, sa distance à trois plans perpendiculaires entr'eux.

Si on fait l'application de ces résultats à la recherche du centre de gravité d'une sphere, on trouve qu'il est placé au centre même de cette sphere; mais l'application la plus importante que nous puissions en faire, c'est à déterminer le lieu du centre de gravité du volume de fluide qui est déplacé par un vaisseau flottant, ou de

celui de la carene en la considérant comme homogène.

250. Imaginons cette carene *dagfcsdb* (fig. 75. G) décomposée en un très-grand nombre de tranches horizontales, également minces, & comprises entre des sections parallèles dont la forme est à-peu-près telle que *abde* (fig. 24. G). Les plans qui divisent ainsi la carene, coupent aussi le maître couple, & on voit (fig. 27 G) sur ce dernier plusieurs des sections de ces plans, en *ba*, *qd*, *re*, *if*; ainsi que l'épaisseur égale & très-petite de chacune des tranches, en *bq*, *qr*, *ri*.

Toutes ces tranches supposées, ainsi que les lignes d'eau qui les terminent, ont une même forme, de chaque côté du plan *diamétral*, *gfcfdig* qui passe par la quille *sf*, l'étrave, *gf*, & l'étambot *df*; & ce plan les partage en deux parties parfaitement égales & semblables. Le centre de gravité de la carene homogène est donc placé nécessairement dans un tel plan. Il ne reste donc qu'à chercher dans ce plan la distance de ce centre à deux autres plans perpendiculaires, entr'eux, & au premier. Supposons que l'un de ces deux derniers plans passe par la face supérieure de la quille qu'on suppose horizontale ou parallèle aux lignes d'eau. Celui-ci sera nommé *horizontal* & l'autre sous le nom de *vertical* sera supposé passer par l'extrémité arrière de la quille.

Cherchons la distance du centre de gravité de la carene au plan *horizontal*. Regardons la solidité de chaque tranche élémentaire, comme formée par une suite de trapezes matériels, dont les bases sont les ordonnées correspondantes des lignes d'eau terminatrices, dont la hauteur commune est l'épaisseur égale de chaque tranche & dont le plan est parallèle au vertical. La figure *abqd* (fig. 27. G) donne l'idée d'un de ces trapezes élémentaires qui entrent dans la composition d'une des tranches de la carene. Nommons *a* la distance du centre de gravité d'un tel trapeze à sa base inférieure *qd*, le moment de ce trapeze à l'égard de *qd*, est  $x. \frac{1}{2} bq. (ab + dq) = \frac{2}{3} bq.^2 ba + \frac{1}{6} bq.^2 dq$  (A). Ainsi la somme des momens de tous les trapezes qui composent la tranche supérieure, à l'égard de la ligne d'eau inférieure est égale à la somme du double (2L) de la surface de la ligne d'eau supé-

rière qui termine cette tranche & de celle (1) de la ligne d'eau inférieure, multipliée par le sixième du carré de l'épaisseur. Soit  $z$  la distance du centre de gravité de cette tranche à l'égard de la ligne d'eau inférieure, comme d'ailleurs sa solidité est exprimée par  $(L+l)\frac{1}{2}bq$ , on doit avoir cette équation  $z\frac{1}{2}bq.(L+l)=\frac{1}{6}bq^2(2L+l)$ . Comparons cette expression à celle trouvée (A) précédemment; & nous aurons ces rapports égaux  $x(ab+dq):z(L+l)::2ab+dq:2L+l$ , c'est-à-dire que le rapport des distances  $x$  &  $z$  est le même que celui de pareilles lignes dans des simples trapezes, qui ayant même hauteur, auroient pour bases supérieures & inférieures, l'un  $ab$  &  $qd$ , & l'autre  $L$  &  $l$ . De cette égalité, nous devons conclure que le lieu du centre de gravité de la tranche supérieure de la carene, peut être déterminé comme celui d'un trapeze, qui auroit, pour hauteur, l'épaisseur de la tranche, & pour bases parallèles les lignes d'eau qui terminent cette même tranche. En étendant ce raisonnement à toutes les tranches qui composent la carene entière, on peut donc dire que la distance du centre de gravité de leur assemblage, au plan horizontal, peut être déterminé comme celle du centre de gravité d'une suite de trapezes qui ayant même hauteur auroient pour bases les lignes d'eau terminatrices des tranches de la carene. On est donc fondé à dire comme précédemment (248) qu'il faut 1° ajouter ensemble le sixième de la section la plus basse de la carene, le sixième de celle qui est la plus élevée, ou de la flottaison multipliée par le triple du nombre des lignes d'eau moins 4; la deuxième ligne d'eau (en comptant depuis la quille jusqu'au niveau de l'eau); le double de la troisième; le triple de la quatrième; & ainsi de suite; 2° faire une somme des moitiés des deux lignes d'eau extrêmes & des autres lignes d'eau intermédiaires & entières. Alors le quotient de la division de la première somme par la seconde étant multiplié par l'épaisseur commune des tranches devient la distance cherchée du centre de gravité de la carene, au plan *horizontal*, ou à la face supérieure de la quille.

Celle du même centre au plan *vertical* qui passe par

le talon de la quille doit ensuite être déterminée par la méthode suivante. Continuons de considérer les tranches composantes comme formées elles-mêmes de trapezes élémentaires semblables à  $bqda$  (fig. 27. G). On voit aisément que le plan de chaque trapeze, étant parallele au plan *vertical*, la distance  $x$  de leur centre de gravité à ce dernier, doit être la même que celle des sommets des angles de ces figures. Le moment d'un de ces trapezes  $abqd$ , est ainsi  $\frac{1}{2}bq.ab.x + \frac{1}{2}bq.dq.x$ . Il faut donc, ( pour déterminer la somme des momens de tous les trapezes qui composent par exemple la tranche supérieure de la carene ), ajouter ensemble 1° tous les produits des lignes matérielles telles que  $ab$  multipliées par leurs distances respectives  $x$  au plan *vertical*; 2° tous les produits des lignes  $qd$  multipliées par leurs distances au même plan; ensuite on doit multiplier l'une & l'autre de ces sommes par la demi-épaisseur de la tranche considérée. Mais la somme premiere, est le moment  $Aa$ , de la surface  $a$  de la ligne d'eau supérieure qui termine cette tranche ( à l'égard du même plan vertical ): & la seconde somme est le moment  $Bb$  de la deuxième ligne d'eau terminatrice dont la surface est  $b$ . C'est pourquoi le moment de cette tranche extrême & supérieure de la carene, à l'égard du plan vertical, est  $(Aa+Bb) \frac{1}{2}bq$ . Si on applique le même raisonnement, à la tranche suivante & immédiatement inférieure, dont les lignes d'eau terminatrices ont pour surface  $b$  &  $c$ , & dont les centres de gravité sont à des distances  $B$  &  $C$  du plan *vertical*, le moment de cette tranche doit être  $(Bb+Cc) \frac{1}{2}bq$ . Celui de la troisième tranche doit donc être aussi  $(Cc+Dd) \frac{1}{2}bq$ ; & ainsi de suite. La somme des momens de toutes les tranches de la carene à l'égard du plan *vertical* est donc  $bq ( \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}Bb + \frac{1}{2}Cc + \frac{1}{2}Dd + \dots + \frac{1}{2}Pp )$  ( en nommant,  $p$  la surface de la ligne d'eau extrême & inférieure, &  $P$  la distance de son centre de gravité au plan vertical ).

Concluons de là que pour déterminer la distance du centre de gravité de la carene au plan supposé, il faut, 1° multiplier la surface de chaque ligne d'eau par la distance de son centre de gravité à ce plan. 2° Ajouter ensemble & les moitiés des momens des lignes d'eau

extrêmes, & les momens entiers des lignes d'eau intermédiaires ; 3<sup>o</sup> diviser cette première somme par celle des moitiés des surfaces des lignes d'eau extrême ajoutées à toutes les lignes d'eau intermédiaires ; & le quotient doit être la distance cherchée du centre de la carene au plan vertical. Par cette distance & par celle du même centre au plan horizontal, le lieu du centre de gravité de la carene d'un vaisseau peut être exactement assigné sur l'étendue d'un plan diatéral.

Ce centre, comme on l'a dit, n'est que celui du volume de fluide qui est déplacé par la carene d'un vaisseau ; mais la recherche du centre de gravité de la masse totale d'un vaisseau qui est entièrement armé, quoique fondée sur les mêmes principes, ne doit pas être faite de la même manière. Elle exige qu'on prenne les momens de chaque partie, de la coque, du chargement, de la mâture, du gréement, &c. à l'égard de deux plans au moins dont l'un est l'*horizontal*, & l'autre le *vertical*. La distance de ce centre de gravité à chacun de ces plans, est égale à la somme des momens indiqués, divisée par le poids total du vaisseau. C'est dans ce dernier centre qu'on peut regarder comme réunis les poids de toutes les parties intégrantes d'un vaisseau lorsqu'on considère ce dernier, ou sur le plan incliné de sa cale, ou sollicité au mouvement par des forces extérieures. Sa position d'ailleurs sert au manœuvrier pour distinguer les voiles de l'avant & de l'arrière, & par conséquent pour combiner leurs effets avec autant d'avantage que de sûreté.

251. Il est à propos d'exposer comment on doit déterminer le centre d'un cône à bases parallèles. Soit donc (fig. 6) *kcdbl* un tronc de cône droit. Son centre de gravité doit être placé nécessairement dans la ligne *ao* qui joint le sommet *a* & le centre *o* de la base. Soient *A* & *H* la solidité, & la hauteur du cône entier *acdb*. Représentons par *a* & *h*, les mêmes choses, dans le petit cône retranché *akl*. On doit avoir l'équation suivante (en prenant à l'égard du sommet *a*, les momens des deux cônes & du tronc)  $x(A - x) = \frac{3}{4}(AH - ah)$ . Ainsi la grandeur de *x*, ou la distance au point *a* du

centre de gravité du tronc, dont le lieu est sur la ligne diamétrale  $ao$  peut être déterminée, puisque les gravités  $A, a, H, h$  sont susceptibles d'être calculées d'après les parties connues du tronc de cône. Ces résultats indiquent comment on peut trouver le centre de gravité d'un mât. En effet, un mât, construit suivant les règles de l'art, doit être regardé comme formé par une suite de cônes tronqués, dont les bases parallèles, ont des diamètres connus & sont à des distances données. Ainsi la recherche du centre de gravité des corps de cette forme ne présente aucune difficulté. Il en est de même de celle du centre de gravité d'une vergue puisque chaque vergue est composée de deux suites égales de cônes tronqués qui sont disposées dans le même ordre, de part & d'autre du milieu de sa longueur. Ces principes s'appliquent aussi très-facilement à la recherche des centres de gravité, ou des bouées, ou des canons, ou des cabestans, &c.

252. *De la force de l'homme.* Nous ne chercherons pas à analyser la nature de la force animale, & il nous suffit de connoître que l'homme est capable, par l'action de ses muscles, de communiquer du mouvement à des corps d'une certaine masse, ou de vaincre une résistance déterminée. Mais quelle peut être la mesure de la force de l'homme? Elle doit, comme toute autre force, être proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle peut faire naître dans une masse connue. Cet effet a une grandeur qui varie suivant la manière dont la force humaine est appliquée. Ainsi pour l'apprécier avec justesse il faut avoir égard aux remarques suivantes.

1.<sup>o</sup> Un homme qui agit, sans donner à son corps un certain mouvement, peut développer une force supérieure ou produire un effet plus grand que lorsque, pour exercer son action, il donne une certaine vitesse soit à la masse entière de son corps, soit à quelques-unes de ses parties.

2.<sup>o</sup> Lorsque dans l'exercice de sa force un homme prend & conserve une attitude quelconque, il doit consumer à cet égard, une partie de sa force naturelle. C'est pourquoi on peut dire qu'un homme debout, ou assis, ou incliné, fait un effort plus ou moins grand pour se tenir

dans chacune de ces attitudes , & on peut estimer cet effort comme étant égal à celui qu'il emploieroit pour soutenir pendant le même temps le poids d'un corps plus ou moins grand. 3.<sup>o</sup> le poids de la masse d'un homme , peut être employé à augmenter plus ou moins l'effet de sa force musculaire , comme dans le cas où l'homme agit pour presser , pousser , ou tirer des corps dont la résistance doit être vaincue. 4.<sup>o</sup> La force dont un homme est capable journellement , peut être appliquée sans interruption , ou par intervalle. C'est ainsi que les hommes agissent soit pour virer au cabestan , soit pour tirer un vaisseau à la cordelle , soit pour vaincre avec des rames la résistance de l'eau , soit pour haler des cordages , soit pour faire tourner avec des leviers un cabestan horizontal , &c. Dans ces divers cas , les efforts employés sont ou continus , ou répétés par intervalle , & les effets momentanés présentent des différences dont les causes sont indiquées par les réflexions qui précédent. Cependant ajoutons à ces remarques que les hommes , quoique d'une organisation plus ou moins parfaite , produisent , comme on en convient assez généralement , des effets à-peu-près égaux , lorsqu'ils éprouvent des fatigues égales ; & c'est une semblable considération , qui nous permet d'établir quelques vues générales , sur la force de l'homme , ou sur la fatigue qu'il peut supporter & réparer journellement. Nous allons les exposer avec d'autant plus de raison , qu'elles deviennent utiles , pour juger , suivant les circonstances , des effets qu'on peut attendre de la force humaine appliquée à surmonter des résistances , ou directement ou à l'aide de quelques machines.

253. Dans ce dessein , consultons l'expérience , pour y trouver une base sur laquelle puissent reposer les calculs des effets de la force humaine , de quelque manière qu'elle soit appliquée. Suivant *Desaguliers* , un homme ordinaire faisant tourner un treuil AB (fig. 68) à l'aide d'une manivelle égale au rayon (de 14 pouces) du cylindre , lorsque sur celui-ci est enroulée une corde à laquelle est suspendu un poids de 25 liv. , fait faire à ce cylindre 30 tours par minute , & continue cette action constante , journellement , pendant huit heures ,

sans éprouver d'autre fatigue que celle qui peut être réparée dans les 24 heures.

Considérons, quelle est dans une telle expérience, la somme des efforts employés par l'homme moteur, pendant le temps de son travail journalier. 1.<sup>o</sup> Il donne à un corps  $M$  de 25 liv. une vitesse  $u$  de  $\frac{11}{3}$  pieds par seconde. 2.<sup>o</sup> Ses mains se meuvent sans cesse avec la vitesse  $u$ ; 3.<sup>o</sup> quoiqu'on le suppose assis, il fait effort pour garder constamment son corps droit ou panché; 4.<sup>o</sup> il soutient le poids du corps  $M$  pendant un temps  $t$  qui est de 8<sup>h</sup>, ou de 28800". 5.<sup>o</sup> Enfin le frottement qui s'oppose au mouvement du cylindre, exige aussi pour être surmonté un certain effort du moteur. La somme de tous ces efforts partiels peut être représentée par conséquent par une quantité  $A = (Mu + qHu + aHpt + nMpt)$ . Nous nommons  $qHu$ , la quantité du mouvement que produit le moteur dont le poids est  $H$ , en donnant à ses bras & à ses mains la vitesse convenable au travail supposé, & en entretenant cette vitesse. Ici, la quantité  $qH$  peut être supposée 0,03.H.  $aH$  est un poids, qui, pour être soutenu par le moteur pendant le temps  $t$  exigeroit le même effort que le moteur ne cesse d'employer pour conserver l'attitude de son corps pendant l'action. Ici on peut supposer  $a = 0,01$ ; (le moteur étant assis; & s'il étoit debout on devroit faire  $a = 0,03$  à-peu-près). Enfin  $nM$  exprime la somme de la masse  $M$ , & de celle dont le poids équivaut au frottement de la machine. Ici, ce dernier poids peut être regardé comme égal aux huit centièmes de  $M$ ; ainsi  $n = 1,08$ .

Substituons dans cette formule les valeurs supposées ou données, de  $M, u, q, a, n, t$ , en nous rappelant d'ailleurs que  $p = 30,2$ , & en estimant à 140 liv. le poids moyen  $H$  de l'homme. On aura  $A = 25145372$  liv.; & ce nombre de livres, est la mesure approchée de la fatigue qu'un homme est capable, de supporter & de réparer pendant chaque jour d'un travail uniforme & qui n'exige pas à chaque instant des efforts trop violents.

Quelque soit donc l'ouvrage qu'on se propose de faire exécuter à un homme ou à un nombre  $N$  d'hommes, pendant un temps  $T$ , on peut aisément juger si ce travail



est au-dessus des forces humaines proposées en comparant la somme des efforts qu'il exige avec la quantité  $A$  ou  $NA$  qui est la mesure fondamentale de ces forces. Veut-on savoir, par exemple, si un homme, sans être chargé d'aucun fardeau, peut marcher chaque jour pendant huit heures, en faisant 3000 toises par heure. Alors ses efforts sont employés, 1°. à donner à son corps une vitesse de cinq pieds par seconde; & 2°. à garder une attitude droite pendant sa marche. L'expression de la force absorbée par ce travail est donc  $(HV + aHp)t$  & cette quantité doit être égale à  $A$ ; or en substituant à la place de  $H$ ,  $V$  &  $a$  les valeurs 140, 5, & 0, 03; la valeur de ce travail est de 23812992. Un homme ne doit donc éprouver par une telle marche, qu'une fatigue supportable: & c'est aussi ce que l'expérience confirme tous les jours.

S'agit-il de savoir si des hommes, en nombre  $N$ , appliqués à l'extrémité des barres d'un cabestan vertical, sont capables de faire tourner, pendant un temps  $t$ , cette machine chargée d'un poids  $B$  tel que celui d'une ancre qui doit être élevée du fond de l'eau à sa surface? Alors on peut considérer le poids de cette ancre, comme décomposé en deux autres forces parallèles; l'une qui passe & qui est détruite par l'axe fixe du cabestan; l'autre qui est dirigée par le point extrême des barres auxquelles les mains & les bras des moteurs sont appliqués horizontalement. Cette seconde force nommée  $mB$  est celle qui doit être le résultat de la somme des efforts des moteurs. Mais quelle est cette somme? Soit  $u$  la vitesse de l'extrémité des barres, les efforts déployés dans ce travail sont exprimés nécessairement par,  $mBu + mBpt + NHut + NaHpt$  en regardant  $mB$  comme un poids qui, à l'extrémité des barres doit être mu avec une vitesse  $u$ , & doit être soutenu pendant le tems  $t$ . C'est, cette quantité qui ne doit pas excéder  $NA$ ; autrement les  $N$  hommes ne pourroient supporter un tel travail pendant le tems  $t$ . Remarquons d'ailleurs que si l'attitude des moteurs pendant leur action, est telle que leurs corps soient inclinés sous un angle  $i$  à l'horison, alors le poids  $H$  de chaque moteur sert à augmenter l'effet possible de leurs efforts, d'une

quantité proportionnelle à  $\frac{3}{5}Hpt\ cot. i$ . Car soit *ce* (fig. 32) la position inclinée du corps d'un moteur, à l'égard de la ligne horizontale *en* qui passe par ses pieds en *e*. Soit *i* le lieu du centre de gravité de ce corps; & *c* le point, sur lequel sont appliqués pour agir horizontalement les bras ou les mains du moteur. Le rapport de *ie* à *ic*, ou des distances de *i* aux points *e* & *c*, est à peu-près celui de 3 à 2. C'est pourquoi si la pesanteur du moteur, regardée comme concentrée en *i*, est représentée par *iu* & décomposée en deux autres forces *ie* & *ue*, la 1<sup>re</sup> *ie* se transmet & se perd au point *e* dans le plan solide sur lequel portent les pieds du moteur. La valeur de la seconde *ue* est *ui. cot. i*. Cette force *ue* appliquée en *i* étant décomposée particulièrement en deux forces, qui lui soient parallèles, & qui passent l'une par *e* & l'autre par *c*, on voit que cette dernière qui est horizontale, & qui en *c* tend à pousser la barre du cabestan, est exprimée par  $\frac{3}{5}ui.cot.i$ . Elle agit continuellement pendant un tems *t*; cet effet est représenté par  $\frac{3}{5}Hpt.cot.i$ . comme on l'avoit annoncé. Il faut donc exprimer par ( $mBu+mBpt+NHut+NAHpt$ ) la somme des efforts nécessaires pour l'opération indiquée, & l'exécution ne devient possible qu'autant que cette somme n'excede pas la valeur de  $NA+\frac{3}{5}NHpt.cot.i$ .

Les mêmes raisonnemens conduisent aussi à déterminer si un grand nombre d'hommes peuvent à l'aide de cordelles, & marchant sur les bords de l'eau, traîner un bâtiment, sur un canal, ou sur une riviere. On doit alors remarquer, que les gens de cordelle, doivent non-seulement mouvoir leur corps & le bâtiment, mais aussi surmonter la résistance toujours renaissante que l'eau peut opposer; & que pour cet effet ils emploient avec leurs forces naturelles, une partie du poids de leur corps s'ils marchent inclinés à l'horizon. Ensuite une formule établie comme précédemment sur ces considérations, fait connoître la convenance ou l'insuffisance des hommes employés à une telle opération.

Est-il question de destiner des hommes à ramer dans un bâtiment, & d'apprécier les effets dont ils sont capables? Imaginons la résistance que l'eau oppose à la

pelle de chaque rame, décomposée en deux forces parallèles qui passent l'une par le tolet (189) & l'autre par la poignée de l'aviron. Représentons cette dernière par  $R$ . C'est celle que le rameur doit vaincre par des efforts répétés & discontinus, parce qu'elle renaît à chaque coup d'aviron, & parce que ces coups se succèdent avec des intervalles. L'observation a d'ailleurs fait connoître que l'intervalle égal des coups est double de la durée de chacun ou de chaque action de rameur. Soit donc  $u$  la vitesse que le rameur donne à ses mains ou à la poignée de la rame. (Négligeons, le poids de la rame qui est soutenu par le bâtiment & par l'eau, ainsi que la quantité de mouvement qui lui est communiquée par le rameur.) Alors, en ayant égard à toutes les remarques précédentes qui sont relatives à cette opération, & en conservant les mêmes dénominations, l'expression de l'effet que doit produire chaque rameur pendant ce tems  $t$ , est  $\frac{1}{3}t(R + qHu + aHp)$ . La valeur de cette quantité ne doit pas excéder  $A$ ; car autrement les rameurs ne pourroient pendant le tems  $t$ , soutenir le travail qu'on attend de leurs forces. D'ailleurs si les rameurs, dans leur action, ajoutaient aux efforts de leurs bras, une partie du poids de leur corps, il faudroit alors y avoir égard dans la recherche des effets qui résultent des coups d'avirons, sur la vitesse du bâtiment.

Lorsque des cordages, ou des manœuvres sont tirés par des hommes qui ne répètent leurs efforts que par intervalles, on trouve encore aisément par une formule analogue aux précédentes, s'ils suffisoient pour vaincre une résistance déterminée; & on peut juger non-seulement des efforts dont ils sont capables pendant un tems  $t$ , mais aussi de l'effet que le poids de leur corps peut ajouter au résultat de leurs forces naturelles.

Des hommes sont-ils appliqués à l'extrémité des barres d'un cabestan horizontal, pour élever des poids, ou pour tout autre objet, leurs efforts ne sont pas continus, mais ils sont déployés par intervalles & le poids de leur corps ajoute ici beaucoup à leur effet. Dans cet usage particulier de la force des hommes, les formules & les réflexions précédentes aident aussi à juger, ou du résultat

qu'elles peuvent produire, ou de leur insuffisance pour un travail proposé.

Enfin il est des cas, où il devient nécessaire, que de grands efforts soient déployés dans un seul instant, & pour une seule fois; alors, dans ces circonstances extraordinaires, la formule A ne peut plus être employée pour indiquer la valeur des efforts instantanés qu'on peut attendre des hommes. L'expérience cependant présente encore une base pour ces appréciations importantes. Car on a éprouvé qu'un homme ordinaire, qui est sain, & jouissant de ses forces naturelles, peut s'élancer à la hauteur de deux pieds, soit en frappant la terre de ses pieds, soit en s'appuyant par ses bras sur un point fixe. Il s'ensuit donc qu'un homme peut communiquer instantanément à la masse de son corps une vitesse telle qu'il l'eut acquise en tombant de la hauteur de deux pieds. Cette vitesse  $u$  est donnée par l'équation  $u^2 = 2ep$  ainsi  $Hu$  ou  $H(2ep)^{\frac{1}{2}}$  est l'expression de cet effort que fait un homme dans l'expérience indiquée. En la développant, elle est en nombres  $= 140. 10,7 = 1498$  liv.; & la grandeur de ce résultat fait voir seule qu'une telle action d'un homme qui peut être déployée dans un instant, ne peut être répétée, qu'après de grands intervalles de tems.

Telles sont à peu-près les vues générales qui sont utiles à tous les hommes de mer pour appliquer convenablement les forces humaines dans une infinité d'opérations, ou seules, elles peuvent être employées.

254. *Du frottement.* Lorsque des forces sont employées à mouvoir des corps qui reposent sur des surfaces sur lesquelles ils doivent dans leur mouvement ou glisser ou rouler; leur effet est toujours diminué, & quelquefois anéanti par le frottement. Il est donc à propos, pour aider à juger des forces motrices, directes, ou appliquées à des machines, de faire connoître cet obstacle particulier qui souvent s'oppose au mouvement des corps.

Le frottement ne semble naître qu'au moment où un corps appliqué sur une surface, tend à prendre ou à conserver de la vitesse dans le sens de cette surface. La direction de cette espèce de force accidentelle, est toujours contraire à celle d'une vitesse naissante ou acquise;

& son effet est de la diminuer ou de la détruire. Sa cause n'est sans doute due qu'aux inégalités dont les faces des corps sont hérissées ; & ces aspérités en s'engrainant les unes dans les autres , & d'autant plus profondément que les surfaces en contact se pressent plus fortement , forment ces obstacles que toute force motrice doit surmonter avant de parvenir à faire naître , ou à entretenir la vitesse des corps glissans ou roulans les uns sur les autres.

Le frottement peut donc être toujours considéré comme une nouvelle force , qui agit sur un corps tangentielllement à sa surface , au point de contact de ce corps avec la surface sur laquelle il se meut , & sur une direction toujours contraire à celle de la vitesse communiquée. Ainsi un corps est-il sollicité au mouvement ; & ne peut-il obéir à cette action qu'en glissant ou en roulant sur un autre corps ; il faut pour juger de la vitesse définitive qu'il doit prendre , le regarder comme soumis à l'action , non-seulement de la force *motrice* supposée , mais aussi d'une autre force *résistante* , dirigée dans un sens contraire tangentielllement au corps , & connue sous le nom de frottement. Dans cet état des choses , le mouvement d'un tel corps peut-être déterminé par les principes précédemment exposés qui ont pour objet le mouvement des corps sollicités , à la fois , par plusieurs forces quelconques , soit sur des plans inclinés , soit à l'aide de leviers , de tours , de poulies , de vis & de coins. Comme la position & la direction de la force du frottement sont indiquées par ce qui précède , il ne reste , pour parvenir à la solution de toutes les questions de ce genre qui peuvent se présenter , qu'à désigner le degré d'énergie que peut avoir cette force , & ses variétés régulières ou accidentelles. Comme il n'appartenoit qu'à l'expérience de fixer les idées sur l'intensité de cette force , elle a été consultée ; & voici le résumé général des résultats que ces recherches ont fait découvrir.

255. Le frottement qu'éprouvent les corps dans leurs mouvemens sur les surfaces , est toujours à peu-près proportionnel aux pressions que ces corps exercent sur ces surfaces ; & il paroît presque indépendant de l'étendue de ces dernières. Malgré ce rapport commun & général

qui regne toujours entre les frottemens, dans des circonstances égales; des variétés distinguent ces forces résistantes, lorsqu'il s'agit, ou de faire sortir les corps de l'état de repos ou d'entretenir leur mouvement, soit qu'ils glissent à sec, soit qu'un enduit intermédiaire sépare les surfaces qui se pressent mutuellement. En effet le frottement qui s'oppose à la naissance de la vitesse d'une pièce de bois placée sur du bois, est supérieur à celui qu'il faut vaincre pour entretenir la vitesse qui auroit pu être communiquée à la même pièce; & leur rapport est celui de 9,5 à 2,2. Une telle différence ne se retrouve pas dans la comparaison des métaux qui glissent à sec sur des métaux, & le frottement qu'ils éprouvent est constamment le même. Lorsque des bois appliqués sur des métaux doivent être tirés de l'état de repos, le frottement, (plus petit que celui des bois sur les bois) a un rapport constant avec la pression des surfaces; mais sont-ils animés d'une vitesse plus ou moins grande, on a reconnu que les forces qui entretiennent leur mouvement, augmentant en progression arithmétique les vitesses communiquées augmentent en progression géométrique. Ce même rapport variable se présente encore dans les expériences où les bois glissent dans le sens de leurs fibres, sur des métaux recouverts d'un enduit, tandis que s'ils glissent perpendiculairement à la longueur de leurs fibres, (comme dans la rotation des axes de fer dans des boîtes de bois) le rapport du frottement à la pression reste constant, sans aucune dépendance des vitesses. Des enduits intermédiaires produisent des diminutions dans les frottemens des bois & des métaux; sur-tout lorsque les corps se touchent par de larges surfaces; & le suif qui est l'enduit le plus propre à atténuer le frottement des bois, n'adoucit pas autant que l'huile celui qui s'oppose au mouvement des métaux sur des métaux. Les enduits diminuent sur-tout le frottement des axes qui roulent dans des boîtes, mais ils n'affoiblissent pas sensiblement le frottement qui contrarie le mouvement des rouleaux sur des plans horizontaux. Ce dernier frottement de l'espèce la plus foible est en raison directe des pressions & inverse du diamètre des rouleaux.

Telles sont les idées générales qu'on doit avoir des frottemens. Lorsqu'il faudra en faire des applications dans la pratique des arts, on aura recours aux divers résultats, qui ont été donnés par l'expérience, & qui ont été savamment recherchés, combinés, & expliqués par Coulomb dans son mémoire sur *la théorie des machines simples*. Nous présenterons ailleurs plusieurs de ces applications, & nous nous bornerons ici à faire quelques remarques théoriques & utiles relativement à l'influence du frottement sur l'action des forces employées à mouvoir des machines. Car, après ce qui a été dit sur les forces en général, il devient superflu de répéter ici le calcul des effets des machines, en y faisant entrer la considération du frottement.

256. Dans l'usage des poulies, des cabestans, des vire-vaux, & des rouleaux, un objet mérite d'être considéré particulièrement; c'est la forme la plus convenable de l'appui sur lequel repose & roule chaque extrémité, des axes de ces machines, ou généralement de celui d'un cylindre. Soit AEF (fig. 75) l'extrémité de l'axe solide d'un cylindre dont le rayon particulier est GH. Si dans sa rotation cet axe cylindrique repose par un bout, en F & E sur un appui formé par deux plans tangens ML & LN, soit GH la direction d'une force P qui presse cet axe sur son appui ou contre les points F & E. Soit décomposée cette force P en deux autres perpendiculaires aux plans LM & LN, l'une *a* dirigée suivant GF & l'autre *b* suivant GE. Nommons *m* & *h* les angles EGH, & FGH alors on aura la proportion  $P : a + b :: \cos \frac{1}{2}(m + h) : \cos \frac{1}{2}(m - h) (R)$ .

Si l'axe ne reposoit pas sur les deux plans LM & LN, mais sur un seul point de LN, alors la force P étant encore décomposée en deux autres l'une A perpendiculaire à LN & l'autre parallèle à ce plan, on auroit  $A : P :: \cos H : I (Z)$  en nommant H l'angle nouveau de la direction de P avec GF. Ainsi en multipliant par ordre les proportions (R) & (Z), on auroit celle-ci  $A : (a + b) :: \cos H : \cos \frac{1}{2}(m + h) : \cos \frac{1}{2}(m - h)$ . Elle fait voir que la quantité A est inférieure à  $(a + b)$  parce que le terme  $\cos H$  est inférieur à  $\cos \frac{1}{2}(m + h)$  a une moindre valeur que  $\cos \frac{1}{2}(m - h)$ . Mais le rapport de A avec  $(a + b)$  est égal au rapport  $nA : n(a + b)$

qui est celui des frottemens dans les deux cas comparés ; (en supposant que la pression soit au frottement ::1:n). C'est pourquoi on doit conclure de cette considération que la forme du support , de l'axe cylindrique , d'un corps qui tourne autour de lui , doit diminuer le frottement lorsqu'elle est courbe , & telle qu'elle n'offre qu'un seul point pour appui à chaque extrémité de l'axe de rotation. Il est donc convenable que les axes des poulies , des cabestans , des rouleaux &c. portent par leurs extrémités , sur des appuis circulaires , pour que leurs rotations soient plus faciles.

257. Examinons ces machines lorsque leur rotation est uniforme ; & réduisons cet examen à celui d'une poulie , ( fig. 75 ) dont le rayon est  $R$  , & telle que l'axe  $AEF$  qui lui est fixé tourne dans une boîte  $KE$  ,  $FI$  , ou telle qu'elle roule , ( comme la plus grande partie des poulies qui entrent dans le gréement des vaisseaux ) sur un axe porté par une caisse ou une chape.

Dans le premier cas , un poids  $P$  entretient-il la rotation uniforme & insensible de la poulie autour de  $G$  , en surmontant , & l'effort d'un poids  $p$  suspendu en  $bp$  , & la résistance du frottement de l'axe en  $F$  sur le trou de la chape ; il faut que , dans l'état d'équilibre supposé , il y ait égalité entre le moment de  $P$  & la somme des momens de  $p$  & du frottement. Soit  $G\ H$  la direction de la résultante des forces parallèles  $P$  &  $p$  , alors la pression sur  $F$  dans le sens perpendiculaire  $G\ F$  , qui résulte des poids dont la poulie est chargée est  $(P+p)\cos. HGF$ . Le moment du frottement en  $F$  , à l'égard de  $G$  est donc  $n. GF (P+p)\cos. HGF$  ; ainsi on a l'équation  $PR = PR + n. GF (P+p)\cos. HGF$  , ou  $(P-p)R = n. GF (P+p)\cos. HGF$ . Elle fait voir que la force absorbée par le frottement , ou employée à le vaincre , est d'autant plus petite que le rayon  $GF$  a moins de grandeur. C'est pourquoi des axes en fer qui sous peu de volume offrent un grand degré de résistance , conviennent particulièrement aux machines dont nous venons de parler , afin de diminuer la dépense des forces qui sont employées à vaincre les frottemens.

Dans le deuxième cas , la poulie qui tourne sur un



axe fixé à la chape, s'appuie ou s'applique en A sur cet axe, par un point A correspondant du contour du trou qui est pratiqué dans son épaisseur; & sa rotation a lieu autour du centre  $u$  de ce même trou. Soit AT la direction de la résultante des forces ou des poids  $P$  &  $p$  dont la poulie est chargée. Alors la pression perpendiculaire qui est exercée en A, sur l'axe de la poulie, est  $(P+p) \cos. GAT$ ; & c'est de cette pression que dépend le frottement qui agit en A suivant NA; ainsi  $P R = p R + N$ . Au  $(P+p) \cos. GAT$ , ou  $(P-p) R = n$ . Au  $(P+p) \cos. GAT$ . La force absorbée par le frottement, est donc d'autant moins grande, que le rayon  $Au$  du trou de la poulie est moins considérable.

Remarquons, que s'il falloit faire glisser sur un plan immobile, un corps qui le presseroit avec une force  $P$ , alors il faudroit employer inutilement & perdre une partie  $nP$ , de la force motrice  $F$  pour faire équilibre au frottement; mais supposons que ce même corps, au lieu de frotter sur un plan fixe s'appuie sur le contour d'un rouleau, qui a la liberté de tourner autour d'un axe immobile AFL, & qu'il presse avec une force  $P$ . Soit aussi  $bp$  la direction de la force motrice  $F$  qui sollicite le corps à se mouvoir tangentielllement au rouleau. Alors la pression  $P$  est transmise à l'axe de celui-ci, & il en résulte un frottement  $nP$ , dont le moment qui s'oppose à la rotation du rouleau sur l'axe, est  $nP. Au$ . Ainsi la partie  $f$  de la force  $F$ , qui devient nécessaire, dans ce cas, pour vaincre le frottement, est telle que  $fR = nP. Au$ . Comparons cette force partielle  $f$  avec celle  $z$  qu'il eut fallu employer pour vaincre le frottement  $nP$  qui a lieu lorsque le corps doit glisser sur un plan inébranlable  $bp$ . On a la proportion  $zf : nPR : nP. Au : R : Au$ ; c'est-à-dire qu'une même force peut faire avancer le corps proposé, avec plus de facilité, ou avec moins de perte, en le faisant glisser sur un rouleau, plutôt que sur une surface plane & immobile. Le rapport des forces propres à balancer les frottemens dans les deux situations, est celui des rayons du rouleau & du trou de ce rouleau si l'axe est immobile. La facilité des mouvemens imprimés dépend donc de la petitesse du trou du rouleau, & elle exige

qu'il n'y ait pas trop de jeu entre le trou du rouleau & son axe. C'est un tel avantage attaché à l'usage des rouleaux, qui en a fait placer à bord des vaisseaux, sous le cable, à son passage par l'écubier, dans les lieux-ou la tournevire peut frotter lorsqu'on leve une ancre, à l'arriere des chaloupes qui sont employées à lever des ancres &c. Il faudroit en général, en placer par-tout où il est utile d'atténuer les frottemens. Cette théorie sert ainsi à expliquer les effets des moyens de ce genre dont on fait usage dans la marine pour ménager les forces des hommes. Nous la compléterons en examinant l'utilité du frottement, pour retenir de grands poids à l'aide d'un cordage qui s'enroule, par plusieurs circonvolutions, autour d'un cylindre, ou d'un pilier de forme réguliere, dont l'établissement est inébranlable.

Soit (fig. 20.) *abcde* le contour régulier de la section d'un pilier, telle qu'une bitte, ou un taquet, ou &c.; autour duquel une corde tendue est enroulée. Supposons que la tension de la portion *lsa* de cette corde soit due à une force *R* qui agit dans le sens *ast*; & cherchons quelle doit être la grandeur de la puissance *B*, qu'il faudroit appliquer au point *b* de cette corde dans le sens *ab*, pour faire équilibre, à l'aide du frottement sur *fab*, avec la force *R* qui agit en *l* en sens contraire. Ce frottement dépend de la pression, qui résulte des forces *R* & *B* employées à roidir en sens contraire les portions *fa* & *ab* de la corde, & qui est exercée en *a* perpendiculairement au contour de cette section, ou dans le sens *ao*. (Le point *o* étant le centre du polygone régulier *abcde*.) Soit *f* la résultante des forces *R* & *B*; nommons *m* & *h*, les angles que sa direction qui passe par *a*, forme avec les côtés *af* & *ab*; & désignons par 2. *A* l'angle intérieur tel que *fab* du polygone régulier. On doit avoir (187) la proportion  $f:(B+R)::\cos.\frac{1}{2}(h+m):\cos.\frac{1}{2}(h-m)$ . Comme *B* est plus foible que *R*, la direction de la résultante n'est pas *ao*, mais elle fait avec cette ligne un angle qui est égal à  $\frac{1}{2}(h-m)$ ; ainsi la pression *P* qui résulte de *f*, ou des forces *R* & *B*, dans le sens de *ao*, c'est-à-dire, perpendiculairement en *a*, au contour du polygone, est donnée par la proportion  $P:f::\cos.\frac{1}{2}(h-m):1$ .

Multipliant ces deux proportions par ordre on obtient celle-ci,  $P:(B+R)::\cos\frac{1}{2}(h+m):1$  ainsi  $P=(B+R)\cos A$ . Le frottement exercé en  $a$  est donc  $nP=n(B+R)\cos A$ . Cette résistance ajoutée à la force  $B$ , doit faire équilibre à la force  $R$ , c'est pourquoi on a l'équation  $R=B+nB\cos A+nR\cos A$ , ou  $R(1-n\cos A)=B(1+n\cos A)$ , ou enfin  $B=RS$  si on représente par  $S$  le quotient de  $(1-n\cos A)$  divisé par  $(1+n\cos A)$ .

Supposons, que la corde embrasse les trois côtés égaux  $fa$ ,  $ab$ ,  $bc$ ; & qu'on demande la grandeur d'une force  $c$ , qui agissant au point  $c$  de la corde, dans le sens  $bc$ , & réunie à la résistance du frottement, suffiroit pour faire équilibre à  $R$ . Déjà nous connoissons une force  $B$ , qui avec le frottement sur le point  $a$ , résiste à  $R$ ; & comme la tension qu'elle produit dans la partie  $ab$  de la corde, est la même dans le sens  $ab$  comme dans le sens  $ba$ , il s'ensuit que la force  $C$  réunie au frottement de la corde sur le point  $b$ , faisant équilibre à la force  $B$ , doit aussi anéantir tout l'effet de  $R$ . En suivant le procédé précédent, nous voyons que la résultante  $T$  des forces  $B$  &  $C$  est donnée par la proportion  $T:B+C::\cos\frac{1}{2}(H+M):\cos\frac{1}{2}(H-M)$ . Mais la pression  $q$  qui résulte de  $T$ , perpendiculairement au contour du polygone & au point  $b$ , ou suivant  $bo$ , est telle qu'on a la proportion  $q:T::\cos\frac{1}{2}(H-M):1$ . Ainsi en multipliant ces proportions par ordre, on en conclut que  $q=(B+C)\cos A$ . Le frottement qui est  $n(B+C)\cos A$ , étant donc ajouté à  $B$ , on a l'équation  $B=C+nB\cos A+nC\cos A$ , ou  $C=BS=RS^2$ .

Si le cordage embrassoit les quatre côtés égaux  $fa$ ,  $ab$ ,  $be$ ,  $cd$ , la force  $D$ , qu'il faudroit lui appliquer en  $d$  dans le sens  $cd$  pour faire équilibre à  $R$ , en ajoutant à la première l'effet du frottement, seroit trouvée par un raisonnement semblable aux précédens, de la grandeur  $RS^3$ . On voit donc que ces forces  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , forment une suite de termes en progression géométrique, lorsque les parties du contour du polygone, qui sont embrassées par la corde, ne sont que les termes d'une progression arithmétique. La puissance propre à faire équilibre à la force  $R$  diminue donc dans un rapport très-grand, lorsque le cordage à l'aide duquel elles se balancent, ne fait que

peu de révolutions autour d'un pilier fixe : & même le nombre de ces révolutions étant augmenté, il ne faut souvent aucune puissance pour produire l'équilibre cherché. Si le pilier fixe, au lieu d'être de forme polygonale, étoit cylindrique, ou conique, les mêmes raisonnemens conduiroient à des résultats semblables. On voit donc pourquoi souvent la force d'un seul homme suffit pour empêcher de glisser un cordage qui enveloppe par plusieurs tours la cloche d'un cabestan ou d'un vireveau, lorsque ces machines sont employées à élever de grands poids tels que ceux des ancrs &c. C'est ainsi que le frottement empêche de glisser un câble qui ne fait qu'un ou deux tours sur un montant de bitte, lorsqu'attaché à une ancre mouillée, il sert à soutenir un vaisseau contre les chocs irréguliers & souvent réunis, des lames, des vents & des courans. Enfin c'est au frottement que sont dus les effets si considérables & si utiles, des amarrages, des aiguilletages, des bridures, des portugaises, des mariages de tournevires, des nœuds, des tours morts, des étalingures &c.

258. *De la roideur des cordes.* Les forces comme nous l'avons déjà dit, transmettent souvent, à l'aide des cordes, leur action aux corps qu'elles doivent mouvoir ; & leur effet, suivant le mode d'application de ce moyen, est alors plus ou moins diminué par la roideur des cordes.

Si, à l'aide d'un ruban ou d'un cordon infiniment flexible, qui passe sur une poulie fixe  $Abm$  (fig. 76), deux poids sont attachés en  $S$  &  $P$  ; l'un d'eux  $P$  peut entraîner l'autre  $p$ , dès qu'il le surpasse seulement d'une quantité plus grande que le frottement produit par ces poids sur l'axe de rotation de la poulie. Mais si ces poids  $P$  &  $p$  sont liés par un cordage  $PABS$ , qui soit composé, comme ils le sont tous, de fils & de torons qui ont reçu une torsion ; on doit penser, qu'un tel cordage, ne peut comme un ruban, se plier sans effort, & que sa roideur doit l'empêcher de s'appliquer aussi parfaitement sur la gorge de la poulie, lorsque le poids  $P$  commence à entraîner  $p$ . Sans doute cette même roideur qui s'oppose à son enroulement sur la poulie du côté de  $p$  en  $b$  sembleroit devoir aussi rendre nécessaire une certaine force employée au déroulement du cordage du

côté de  $P$ , mais cette force propre à redresser le cordage ou à le replacer dans son état primitif est bien moindre que celle qu'il faut pour le plier; & elle peut même être supposée négligeable & nulle. Ainsi supposons que  $P$  soit sur le point d'entraîner  $p$ . La portion  $bs$  de ce cordage, qui étoit tangente en  $b$  & verticale au moment du repos, devroit s'étendre sur l'axe  $bu$  au premier mouvement de la poulie; mais elle résiste par sa roideur, & prend la position  $bdp$ , de manière qu'elle reste tangente à la poulie en  $b$ , au lieu de le devenir en  $u$ . On peut donc regarder cette petite portion  $bd$  du cordage, comme sollicitée en même tems, au point  $d$ , par deux forces qui l'obligent à prendre & à garder la situation  $bd$ . L'une de ces forces représentée par  $cd$  ou  $bu$  est le poids  $p$ , qui la tire verticalement dans le sens  $dp$ ; & l'autre, dirigée dans le sens  $ud$ , avec une action qui, proportionnelle à la roideur du cordage, est représentée par  $ud$  ou  $bc$  tend à l'éloigner de la position verticale  $us$ . dans cet état des choses, & formant le parallélograme des forces  $beud$  on peut faire la proportion,  $bd:du+dc::\cos.\frac{1}{2}(bdu+bdc):\cos.\frac{1}{2}(bdu-bdc)$ . L'angle  $bdc$ , est peu comparable  $abdu$ , lorsque le poids  $p$  est un peu considérable. Ainsi on peut regarder  $bd$  comme étant de même valeur que  $(du+dc)$ . Donc  $bd=du+dc$ , ou  $P=p+du$ , &  $(P-p)=du$  (A.)

Cette différence  $(P-p)$ , qui seroit nulle dans l'état d'équilibre, si deux poids  $P$  étoient suspendus par un ruban, est donc la portion de  $P$  qui est consommée, non à soutenir  $p$ , mais à vaincre la roideur du cordage représentée par  $ud$ . Cherchons donc à exprimer l'effet de cette roideur; & pour y parvenir, considérons le *commettage* d'un cordage.

Des fils reçoivent d'abord une torsion particulière. Ils sont ensuite réunis en faisceaux dont on fait des *torons*, en les tordant en sens contraire; & enfin ces torons commis ensemble, composent un cordage dont la longueur est plus ou moins inférieure à celle des fils élémentaires. Dans ce cordage, ces fils forment des spirales, alongées, couchées & ferrées les unes sur les autres, en s'étendant d'un bout à l'autre de la longueur totale. Ils se pressent

mutuellement, & avec d'autant plus de force que la torsion des torons est plus considérable. Ainsi un tel cordage, qui pendant sa formation reste toujours étendu dans toute sa longueur, vient-il à être forcé, dans l'usage qu'on en fait, d'embrasser une surface courbe; les fils qui s'appuyent les uns sur les autres résistent par conséquent au changement qu'on veut produire dans leur direction primitive. Leur résistance doit même être d'autant plus grande que la tension du cordage est plus forte, & que la courbure de la surface sur laquelle on veut l'appliquer est plus considérable. Sous ce dernier rapport, la roideur s'oppose d'autant moins à la flexion d'un cordage, que le rayon d'une poulie sur laquelle il s'enroule, est plus grand; ou son effet est en raison inverse du rayon  $R$  de cette poulie. Quant à la tension du cordage, on doit la trouver par celle des fils élémentaires. Celle-ci dépend de deux causes; de la puissance qui agit sur le cordage, & de la torsion que chacun des fils a reçu de la main du cordier. Il faut donc ajouter ensemble les effets de ces deux causes (dont l'une est constante) pour estimer toute l'influence de la tension de chaque fil. C'est ensuite en répétant cette somme autant de fois qu'il y a de fils dans le cordage, qu'on peut connoître tout l'effet de la tension du cordage même. Le nombre des fils de divers cordages également commis, croit comme les quarrés de leurs rayons; ainsi l'effet de la tension du cordage, ou la résistance partielle que cette cause lui fait opposer à sa flexion, est proportionnelle à  $r^2(a + bp)$  (en représentant, par  $ar^2$ , la partie de cet effet qui est due à la torsion, & par  $bpr^2$  celle que produit le poids ou la force motrice  $p$ ). Réunissant enfin ce rapport à celui qui dépend du rayon  $R$  de la poulie, on peut dire que  $ud$ , ou l'effet de la roideur du cordage est (dans l'usage des poulies) en raison directe de  $r^2(a + bp)$ , & inverse de  $R$ . La formule précédente (A) qui exprime ces rapports est donc  $(P - p)R = r^2(a + bp)$ . Cette force  $(P - p)$  est donc toujours celle qu'il faut ajouter à  $F$  ou à la force destinée à mettre une poulie en mouvement, lorsqu'on veut obtenir un effet utile qui soit proportionné à  $F$ .

Les résultats de cette formule s'accordent parfaite-

ment avec l'expérience, lorsque les cordes sont grosses & neuves. Mais sont-elles à demi usées, l'effet de leur roideur n'est plus proportionnel à  $r^2$ , mais à la puissance  $\frac{2}{3}$  de  $r$ ; & pour des cordes tres-petites, & très-flexibles, il n'est plus qu'en raison du simple rayon  $r$ .

Au reste l'expérience (voyez le mémoire de *Coulomb*) a fait voir que l'effet de la roideur des cordes, dans la marine, peut être regardé comme indépendant de la vitesse des cordes. Ensuite cette résistance dans les cordes goudronnées, n'excede pas d'un fixieme celle des cordes blanches, & elle peut être exprimée par la même formule. Enfin les cordes employées, sont-elles mouillées & imbibées d'eau, leur résistance en reçoit quelque accroissement, parce qu'alors la tension des fils doit nécessairement être augmentée par une telle cause. Ces réflexions, ces résultats de l'expérience, & la formule indiquée, suffisent pour aider à évaluer la force, qui équivaut à la roideur des cordes dans tous les usages qu'on peut en faire. Ainsi une telle force dans le calcul des machines, doit être employée, comme toutes les autres forces motrices qui leur sont appliquées, lorsque par les principes généraux déjà établis précédemment, on se propose de déterminer l'effet réel & utile qu'on doit en attendre.

259. *De l'action de l'eau & de l'air.* L'eau est composée d'une infinité de molécules élémentaires, dont la forme & l'arrangement sont encore inconnus aux physiciens. Ses parties doivent cependant être regardées, comme indépendantes les unes des autres, & sur-tout d'une mobilité si grande qu'elles cedent & changent de place à la moindre impulsion; tandis que leur assemblage ou la masse qu'elles composent reste incompressible, ou conserve un même volume sous la pression la plus puissante.

L'eau peut être considérée, en repos ou en mouvement; ainsi que les corps qu'elle enveloppe, ou qu'elle soutient flottans à sa surface. Dans ces divers états, chaque molécule fluide exerce ou éprouve une action différente. Sous tous ces rapports, de tels effets méritent d'être connus & expliqués, soit pour éclairer la pratique de l'art de la marine, soit pour accélérer ses progrès. C'est pourquoi

nous allons analyser , d'abord les loix de l'équilibre d'une masse d'eau ; & ensuite nous examinerons l'état des molécules fluides , lorsqu'elles forment un courant , ou lorsqu'elles font partie des lames dont se couvre une mer agitée par le vent. Enfin nous présenterons les loix générales que paroît suivre la nature dans l'action que l'eau calme ou courante exerce sur les corps qui flottent & sur ceux qui ont un mouvement quelconque.

260. L'extrême mobilité, & l'indépendance réciproque des molécules élémentaires de l'eau , conduisent à penser que dans une masse fluide le repos de chaque élément , ne peut avoir lieu , que lorsque chacun est sollicité également à se mouvoir sur toutes sortes de directions. Cette égalité d'action & de réaction , ou de pression , qui est éprouvée & exercée par chaque molécule d'une masse d'eau en repos , est donc une de ces vérités fondamentales auxquelles notre raison ne peut refuser d'adhérer ; & l'expérience d'ailleurs en offre des preuves sensibles qu'il est à propos de présenter.

Verse-t-on de l'eau dans un tuyau *abdo* (fig. 88) composé d'une branche verticale *ab* , qui est liée , & qui communique à deux autres branches cylindriques *db* & *do* , inclinées sous un angle quelconque à l'horizon. On observe que l'eau ne parvient à un repos parfait que lorsque les molécules supérieures , placées en *o* & *a* , sont sur une même ligne horizontale *oe*. Dans cet état de repos , la molécule *d* éprouve dans le sens *bd* une certaine pression ; & l'équilibre exige que dans le sens *db* elle soit repoussée par une pression égale. Cet état de repos subsiste encore lorsqu'à la colonne inclinée *ao* , on substitue non-seulement , une colonne verticale *dr* , mais aussi des colonnes multipliées & inclinées à volonté qui se réunissent & se communiquent en *d*. Il faut donc alors que la pression exercée sur *d* suivant *bd* , balance , & les pressions isolées de chacune de ces colonnes inclinées diversement ; & leurs pressions , réunies , même lorsque leur nombre est infini. Il faut donc que la pression exercée sur *d* suivant *bd* soit transmise par cette molécule dans le sens de toutes les colonnes supposées & imaginables. Il faut même aussi qu'elle soit égale , sur toutes leurs directions ; car s'il étoit une



une ligne suivant laquelle la pression seroit inférieure ; alors la molécule  $d$  s'échapperoit de ce côté. La pression que chaque molécule d'une masse fluide éprouve & exerce , est donc égale dans tous les sens.

Remarquons que toutes les colonnes fluides supposées qui autour de  $d$  sont en équilibre , & qui contiennent des masses d'eau différentes , n'ont de commun entr'elles qu'une même hauteur verticale  $dr$ , ou une égale distance de leur base commune au niveau de l'eau. On doit donc conclure que les pressions qui sont exercées en tout sens par deux molécules quelconques , paroissent devoir être proportionnelles à leurs distances au niveau de l'eau. Cette vérité peut d'ailleurs être démontrée directement. En effet ne considérons que le filet fluide & vertical  $dr$ . Incompressible , il est composé d'autant de molécules  $m$  qu'il y a de points dans la verticale  $dr$  dont la longueur est  $h$ . La molécule  $d$  , ne doit être pressée par ce filet qu'en raison de la somme des poids  $mg$  des molécules  $m$  qui le composent. ( $g$  est la vitesse que tend à imprimer la pesanteur à chaque partie de matière , sur le globe). C'est cette pression qui en  $d$  fait équilibre , seule , à celle de tous les filets inclinés qu'on peut imaginer avoir  $d$  pour base , Il s'ensuit donc que la pression qui est éprouvée ou exercée en tout sens par une molécule élémentaire  $d$  , d'une masse d'eau en repos , est proportionnelle à  $hmg$ . Elle est par conséquent en raison de sa distance  $dr$  ou  $h$  au niveau de l'eau. On auroit encore démontré cette vérité en considérant un filet  $dz$  , inclinée à l'horison sous un angle  $i$  , & ayant  $d$  pour base. Car la somme des poids des molécules qui composent ce filet  $dz$  , est  $mg \cdot dz$  ; mais ces poids que la pesanteur dirige verticalement , n'agissent dans le sens  $zd$  , qu'avec une force qui est à leur force verticale ::  $dr:dz$  ; c'est pourquoi leur action sur  $d$  , dans le sens  $dz$  est encore , comme celle du filet  $dr$  , représenté par  $mgh$ . La pression de chaque molécule d'une masse d'eau , est donc égale en tout sens ; & cette égalité de pression me paroît être seule nécessaire pour l'explication de tous les effets que l'eau peut produire , comme force *motrice & résistante*.

261. Supposons qu'une masse d'eau renfermée dans un vase *onqpm* (fig. 4) puisse s'échapper par une ouverture *a*, d'un diamètre très-petit à l'égard de celui de la base *nqpr* du vase : & cherchons la vitesse *v* avec laquelle l'eau doit s'écouler. Remarquons que si la base du cylindre vertical, ou la masse d'eau *onqpm* est renfermée, étoit subitement anéantie ; l'eau descendroit en masse, en suivant les loix de la chute des corps graves. Il en seroit de même d'un simple filet vertical *sa*, si celui-ci isolé, étoit enfermé séparément dans un canal convenable. mais ce filet *sa*, fait-il partie de la masse d'eau *onqpm*, toutes les molécules qui la composent, sont alors pressées dans tous les sens (260) par les molécules environnantes, en raison de leurs distances au niveau de l'eau *om* ; & cette pression n'a pas lieu lorsqu'un cylindre isolé, separe de la masse, le filet fluide *sa*. C'est pourquoi la molécule, qui dans cette masse *onqpm* se trouve placée à l'orifice *a*, est la seule du filet *as*, qui ne soit pas pressée de bas en haut, tandis qu'elle est pressée de haut en bas comme les autres molécules supérieures. Cette dernière pression doit donc tendre à la chasser du vase par l'orifice *a*. Cette molécule écoulée, est aussi-tôt remplacée par une nouvelle qui est poussée par l'orifice *a*, non-seulement par le filet *as*, mais par l'action de toutes les molécules de *onqpm* qui toutes tendent à s'échapper par *a*. On doit donc conclure que si le vase reste constamment plein d'eau, & à la même hauteur *h* au-dessus de l'orifice *a* dont la surface est *A*, chaque molécule qui s'échappe successivement est chassée par une même pression proportionnelle au poids du filet *as*, ou *hmg*. Ainsi pendant un instant infiniment petit *t* (qu'on prendra pour l'unité de tems) il doit s'écouler une masse d'eau *M* dont toutes les molécules reçoivent une égale vitesse *v* à leur sortie. Cette masse *M* écoulée pendant *t*, peut-être regardée comme ayant la forme d'un cylindre dont la base est *A*, & la hauteur une ligne représentée par *v*, puisque cette ligne est l'espace parcouru par la première molécule dans l'unité de tems. Rappelons-nous maintenant, qu'une force motrice est toujours proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle fait naître, par son action répétée

pendant une unité de tems  $t$  ; & nous verrons qu'on doit faire cette équation  $hmg t = MV = AV^2$  (B). Si le vase n'eut été plein que jusqu'à une hauteur  $z$  , alors on auroit eu  $zmg t = Ab^2$  en nommant  $b$  la vitesse de l'eau qui s'écouleroit dans le nouvel état des choses ; & en comparant les vitesses des écoulemens dans ces deux suppositions , leur rapport est donné par cette proportion ,  $h:z::V^2:b^2$ . Les quarrés des vitesses des écoulemens , sont donc comme les distances de l'orifice au niveau de l'eau , ou comme les quarrés des vitesses qu'acqueroit un corps en tombant des hauteurs  $h$  &  $z$ .

Ce résultat annonce que la vitesse  $v$  , doit être réellement celle qui seroit acquise par un corps dans sa chute de la hauteur  $h$  , & il est facile d'en compléter la démonstration. Car supposons que le filet  $af$  , enfermé dans un cylindre qui l'isole de la masse  $onqpm$  , descende par l'orifice  $a$  , en vertu de la seule pesanteur ; il doit s'écouler pendant la première unité de tems  $t$  , une portion  $f$  du filet  $af$  , avec une vitesse  $g$  qu'on peut regarder comme uniforme puisque le tems  $t$  est très-petit. Cette portion  $f$  est cylindrique. Sa base est  $A$  , & sa hauteur  $x$  peut être représentée par  $g$ . Ainsi sa masse est  $Ag$ . La quantité de mouvement qui est communiquée à cette masse pendant  $t$  est  $Ag^2$ . La force qui la produit est le poids de  $f$  qui est  $xmg$  , & elle lui est proportionnelle ; ainsi on peut dire que  $xmg t = Ag^2$ . Comparons cette équation à (B) , on en conclura cette proportion  $hmg t : xmg t :: AV^2 : Ag^2$  ; ou  $h:x::V^2:g^2$  (D) , si  $g$  est la vitesse acquise par une molécule  $m$  en tombant d'une hauteur  $x$ . Soit  $q$  la vitesse qu'elle acqueroit en tombant de la hauteur  $h$ . Leur rapport est tel qu'on a la proportion  $x:h::g^2:q^2$  , de sorte qu'en multipliant par ordre cette proportion & celle (D) , on en conclut celle-ci  $1:1::V^2:q^2$ . Elle prouve que  $V=q$  , ou que la vitesse avec laquelle l'eau s'écoule par le petit orifice  $a$  d'un grand vase , est égale à celle qu'acqueroit un corps grave en tombant du niveau de l'eau jusqu'à cet orifice. La même règle s'étend aussi à la vitesse d'écoulement par un orifice latéral ; car la pression qui est égale dans tous les sens , doit produire latéralement la même vitesse avec laquelle elle chasse l'eau par un orifice

a fait au fond *nqv*. On doit donc conclure que l'eau de la mer qui s'introduit par quelque ouverture dans la cale d'un vaisseau, s'y précipite avec une vitesse dont le quarré est proportionnel à la hauteur du niveau de la mer au-dessus de la voie d'eau; & qu'ainsi les voies d'eau les plus profondes sous l'eau, sont aussi les plus dangereuses.

262. Puisque la pression éprouvée & exercée en tout sens, par une molécule qui fait partie d'une masse fluide, dépend du poids d'une colonne, dont elle est la base, & qui a pour hauteur sa distance  $z$  au niveau de l'eau; puisque la vitesse qu'elle tend à prendre, est celle qu'acqueroit un corps en tombant de cette hauteur; il s'ensuit que si cette molécule peut se soustraire totalement à cette pression, (ce qui ne peut avoir lieu que lorsqu'elle fuit avec une vitesse  $v$  due à la hauteur  $z$ ), elle ne doit plus exercer de pression dans aucun sens. Car elle n'en éprouve plus elle même dans sa fuite, & son action est essentiellement la même (260) sur toutes les directions possibles. une molécule fluide qui s'écoule avec toute la vitesse  $v$  due à sa distance  $z$  au niveau de l'eau, ne presse donc aucunement les parois du canal ou elle coule librement. Mais cette molécule ne peut-elle fuir avec cette vitesse  $v$ , & ne peut-elle prendre qu'une vitesse plus petite  $u$  due à une hauteur  $z$ , alors on doit considérer la pression qu'elle éprouveroit dans l'état de repos, comme produite par les poids de deux colonnes d'eau exhaustées l'une sur l'autre, & ayant pour hauteur, l'une  $z$  & l'autre  $z-z$ . Remarquons aussi que si dans l'état de mouvement, cette molécule n'eut été pressée que par une colonne fluide d'une hauteur  $z$  (la vitesse étant due à cette même hauteur) elle n'eut éprouvé ni exercé aucune pression pendant son mouvement; ainsi la pression qu'elle éprouve, & qu'elle exerce lorsqu'elle se meut avec une vitesse  $u$ , ne peut provenir que du poids ou de la pression d'une colonne fluide qui a pour hauteur  $(z-z)$ . C'est pourquoi dans un courant d'eau qui a une vitesse due à la hauteur  $z$ , chaque molécule emportée d'un mouvement commun, ne presse & n'est pressée qu'en raison du poids d'une colonne fluide qui auroit  $(x-z)$  de hauteur en supposant que  $x$  soit sa distance au niveau de l'eau courante.

L'expérience confirme évidemment les résultats de ces réflexions & on en trouve des preuves décisives dans les ouvrages de Daniel Bemoulli & de Bossut. Moi-même j'ai plongé verticalement dans l'eau, un tuyau cylindrique *ao* (fig. 1. G) ouvert par les deux bouts, ainsi qu'un tuyau coudé *bif*, en tenant la branche *bi* verticalement. Dans l'un & l'autre tuyau, j'ai introduit un flotteur *pgq*. Les flotteurs, lorsque les tuyaux étoient plongés dans l'eau calme se tenoient à la hauteur de *a* & de *b*, ou à la surface de l'eau environnante; mais les tuyaux étant plongés, jusqu'à *a* & *b*, dans la même eau lorsqu'elle formoit un courant, dirigé suivant *dc*, avec une vitesse due à la hauteur  $z = ae$ , dès lors les flotteurs s'abaissoient de la hauteur *ae* ou *z* dans chaque tuyau. Les hauteurs *ao* & *bi* des colonnes fluides intérieures, diminuoient ainsi par l'effet du courant de la quantité *z*, à laquelle étoit due la vitesse commune des eaux environnantes. Ce même abaissement avoit encore lieu dans le tuyau recourbé, lorsque le coude *if* étoit placé dans une direction perpendiculaire à celle du courant; ce qui devoit être, puisque la pression de l'eau en *f* étoit également affoiblie en tous sens. La pression de chaque molécule intégrante du courant n'est donc pas en raison de sa distance au niveau de la masse de ces eaux, mais en raison de cette distance diminuée de la hauteur *z* à laquelle est due la vitesse des eaux. C'est pourquoi, au milieu d'une rivière, lieu où le mouvement de ses eaux est parfaitement libre, le niveau est plus élevé que sur les bords du lit où la vitesse commune est diminuée, ou retardée soit par le frottement, soit par d'autres obstacles accidentels.

263. Examinons aussi l'action des molécules d'une eau courante sur celles d'une eau tranquille, lorsque les premières animées d'une vitesse due à la hauteur *z*, viennent choquer les dernières. Un tuyau coudé *bif* est-il plongé jusqu'en *cd*, dans un courant dirigé de *c* en *d*; ou suivant *fi*; le courant vient choquer immédiatement par l'orifice *f*, le fluide qui est renfermé dans *bif*. Pour connoître l'effet de ce choc, remarquons que chaque molécule qui arrive & frappe en *f*, est arrêtée par l'orifice qui est ouvert directement au courant. Elle ne peut donc plus alors se soustraire par sa vitesse hori-

fontale, à la pression des colonnes fluides environnantes, qui ont pour hauteur la distance  $h$  de  $f$  au niveau de l'eau. Ces molécules agissent donc sur l'eau intérieure du tuyau, en raison de cette hauteur  $h$ , & forcent la colonne intérieure de prendre d'abord la hauteur  $h$ ; mais l'action que des molécules qui se succèdent sans interruption, exercent à l'orifice  $f$ , est d'ailleurs en raison de la vitesse qu'elles perdent par leur réduction au repos, ou plutôt en raison de la pression de la colonne qui auroit pour hauteur celle  $z$  à laquelle est due la vitesse commune. Le fluide intérieur sous cette pression, ne doit donc pas se fixer à la hauteur  $h$ , mais il doit s'élancer & se maintenir à la hauteur  $h+z$ . L'expérience a confirmé ce nouveau résultat; car un flotteur introduit dans le tuyau indiqué *bi*, s'élève d'une quantité  $z$  au-dessus de la situation qu'il conserveroit dans une eau calme; lorsque le courant dans lequel il est plongé, aborde perpendiculairement l'orifice  $f$  & lorsque sa vitesse est due à une hauteur  $z$ . *Pitot* avoit observé cet effet; & il en avoit fait usage pour mesurer la vitesse des eaux d'une rivière. Mais les autres effets déjà indiqués (262) lui étoient échappés. On a voulu faire de la découverte de *Pitot* une application à la marine, & en déduire la mesure du sillage des vaisseaux; mais l'agitation des bâtimens à la mer doit rendre cette méthode impraticable. On a même été plus loin tout récemment; & on a vu fausement, des moyens sûrs pour indiquer aux navigateurs les vrais tirans d'eau de l'avant & de l'arrière d'un vaisseau flottant, dans des tuyaux recourbés tels que *vis*, qui placés intérieurement à la proue & à la poupe, communiqueroient avec la mer par un orifice  $f$ . De tels moyens ne donnent des résultats exacts dans un vaisseau en repos, qu'au milieu des eaux calmes. Mais dans un courant, ils indiquent la vitesse des eaux, soit par l'abaissement du flotteur dans le tuyau placé sous le courant, soit par son ascension dans le tuyau ouvert au courant. Les mêmes principes démontrent qu'il y a des erreurs nécessairement attachées à ces instrumens, lorsqu'un vaisseau est sur une mer agitée, ou lorsqu'il a un mouvement propre.

264. Ces principes simples & clairs, ont aussi d'autres conséquences qui sont très-importantes; mais elles ne

peuvent pas trouver place dans cet ouvrage , soit parce qu'il est élémentaire , soit parce qu'elles doivent faire partie d'un traité direct de *l'art de la marine*. On en peut conclure , & la pression qu'éprouvent & exercent les molécules qui entrent dans la composition d'une lame *rbq* de la mer (fig. 5. G) , & la formation de ces mêmes lames , & enfin leur marche progressive dans l'espace sous l'impulsion du vent , qui les produit. On en conclut la figure qu'a dû prendre la surface des mers du globe , en combinant , avec l'effet de la rotation de la terre sur son axe , la pesanteur qui anime toutes ses parties , ou plutôt l'attraction générale qui porte tous les corps de l'univers les uns vers les autres , en leur imprimant une tendance mutuelle , qui est en raison inverse des quarrés de leurs distances respectives.

On en conclut encore que le globe , s'il eut été recouvert totalement par la mer , eut dû prendre & garder une forme qui n'étoit pas parfaitement sphérique , mais elliptique , (fig. 89) avec des axes dont les longueurs seroient dans le rapport de 229 à 230 , tel que *Newton* l'avoit présumé , & tel qu'il a été donné par des mesures géodésiques. Enfin on conclut de ces principes combinés avec les loix de l'attraction , les effets que le soleil & la lune doivent exercer & exercent sur les eaux de la mer ; c'est-à-dire les marées , leurs circonstances , leur grandeur , leur cours , les époques de ces phénomènes , l'ordre de leur succession , & les variétés qui les distinguent soit en pleine mer , soit sur les côtes des grands continens (fig. 90). — Tous ces objets dont les détails sont immenses autant qu'intéressans , & qui ont les rapports les plus immédiats à la marine seront considérés avec tous les développemens qu'ils doivent avoir dans un traité sur cet article ; traité qui doit suivre ces élémens pour en présenter les applications aussi utiles qu'elles sont générales pour toutes les branches de cet article.

265. Ces applications s'étendent aussi aux phénomènes de *l'air* , c'est-à-dire de ce fluide qui enveloppe la terre dans tout son contour & qui la recouvre sans interruption jusqu'à une certaine hauteur. Car les parties de ce fluide sont mobiles & pesantes comme celles de l'eau , & chaque mo-

lécule dans la masse de l'atmosphère , exerce , comme elle éprouve dans tous les sens , une pression qui est proportionnelle à sa distance au niveau de l'atmosphère. C'est pourquoi , dans ce fluide , comme dans une mer qui environneroit la terre , le soleil & la lune par l'effet de l'attraction universelle doivent produire un courant oriental dont la vitesse varie suivant les positions des molécules aériennes à l'égard des astres attirans. C'est donc à cette cause bien naturelle qu'on doit attribuer en partie , le vent alisé qui regne constamment dans la zone torride & qui est due , en plus grande partie aux effets de la raréfaction occasionnée par la chaleur directe ou réfléchie du soleil. Les développemens de ces phénomènes , ainsi que des *moussons* , & des *vents variables* , sont aussi renvoyés au traité de *l'art de la marine* , & nous ne nous arrêterons ici qu'à certaines considérations particulières.

266. Un des caractères distinctifs de l'eau & de l'air ; & celui que nous devons sur-tout remarquer , est que le premier fluide est incompressible , & que sa densité est égale dans tous les points d'une colonne verticale lorsque sur toute sa longueur elle éprouve une même température. Dans une colonne d'air , il en est autrement. Les parties supérieures , compriment par leur poids , le fluide inférieur ; ces parties inégalement denses se dilatent inégalement par l'action d'un même degré de chaleur ; & celles qui sont dans un état de compression , tendent par leur élasticité à reprendre le volume primitif qu'elles occuperoient isolées , avec une force qui est proportionnelle non-seulement à la force comprimante , mais aussi à la chaleur qui leur est communiquée. Soit partagée une colonne verticale de l'atmosphère en plusieurs tranches de même épaisseur. La densité de chacune ( en n'ayant pas égard à leur température ) est alors en raison de la compression qu'elle éprouve , ou de la somme des poids des tranches qui lui sont supérieures. Nommons *a, b, c, d* , &c. les poids ou les densités de ces tranches ( en les comptant de la couche supérieure ou extrême de l'atmosphère ). On peut dire que  $b:c:d:&c::a:a+b:a+b+c:a+b+c+d:&c$ . Les termes des derniers rapports sont en progression géométrique ; car on peut établir par exemple ces rapports



$a+b:a+b+c:a+b+c:a+b+c+d$  ; puisque  $d:c:a+b+c:a+b$  ; & par conséquent il est démontré que les densités  $a, b, c, d$ , &c. des tranches également épaissies de l'atmosphère, ou les pressions qu'elles exercent comme celles qu'elles éprouvent, croissent en progression géométrique, tandis que les distances des tranches au niveau de l'atmosphère ou à la couche extrême, sont en progression arithmétique. C'est pourquoi si on exprime ces densités par des nombres, ainsi que les distances indiquées, ces dernières doivent être les logarithmes des premières (87). Désignons par  $H$  la hauteur totale de l'atmosphère ; par  $X$  &  $x$  les distances de deux couches d'air, à la surface de la mer ; & par  $P, p$ , les pressions exercées par ces deux couches ; on peut dire que  $H-X \equiv \log. P$ , &  $H-x \equiv \log. p$ . On en conclut que  $X-x \equiv \log. p. - \log. P$  ; & si  $x=0$ , c'est-à-dire si une des couches est prise au niveau de la mer, on doit avoir  $X \equiv \log. p. - \log. P$ .

267. Remarquons qu'à la surface de la mer, la pression  $p$  de l'air fait équilibre au poids d'une colonne verticale de mercure qui a  $h$  de hauteur, & une densité uniforme  $D$ . Ainsi  $p=hD$ . De même  $P=BD$ , en nommant  $B$  la hauteur du baromètre dans la couche d'air qui est élevée de  $X$  au-dessus de la mer, d'où on conclut que  $X \equiv \log. hD - \log. BD \equiv \log. h - \log. B$ . Si  $m$  indique la hauteur du baromètre dans une couche d'air qui est à une distance  $z$  du niveau de la mer, on doit avoir  $z \equiv \log. h - \log. m$ , & en comparant ces équations on conclut que  $X:z :: \log. h - \log. B : \log. h - \log. m$ . On peut donc déterminer la grandeur de  $z$ , si on connoît les quantités  $x, h, m$ , &  $B$ . La hauteur d'un lieu au-dessus du niveau de la mer, peut donc être connue, si on a observé la hauteur du baromètre & dans ce lieu & au bord de la mer, & dans une autre station dont la distance au niveau de la mer a été mesurée. Cependant les résultats qu'on peut obtenir par la règle précédente, ne doivent pas être regardés comme très-exacts, puisque nous n'avons eu égard ni à la température des couches d'air, ni à la quantité d'eau plus ou moins grande que l'eau peut tenir en dissolution ; car ces causes font varier considérablement la pression de l'air.

Lorsqu'on a dit précédemment que la pression de l'air fait équilibre à une colonne de mercure dont la hauteur est  $h$ ; on doit entendre que la somme des poids de chaque unité de volume en mercure dont cette colonne est composée, presse sur sa base autant que celle-ci est pressée par le poids ou le ressort de l'atmosphère qui repose sur elle. La densité  $D$  du mercure est proportionnelle au poids d'une unité de son volume; ainsi en répétant  $D$  autant de fois qu'il y a d'unités de volume dans  $h$ , on doit dire pour l'équilibre que  $hD=p$ .

268. Si la base de la colonne de mercure, au lieu d'être pressée par le poids  $P$  de l'atmosphère, l'étoit uniquement par celui d'une colonne d'eau distillée, dont la hauteur seroit  $x$  & dont la densité  $r$  est 13, 6 fois plus petite que  $D$ , on voit que l'équilibre ne peut avoir lieu entre ces deux colonnes, l'une d'eau, & l'autre de mercure, que lorsqu'on a l'équation  $hD=xr$ , ou  $x=(13, 6)h$ . C'est pourquoi la hauteur  $h$  étant de 28 pouces, suivant des observations faites au bord de la mer, dans un tems calme, & par une température moyenne, on trouve que  $x=32$  pieds environ. La pression de l'air peut donc faire équilibre au poids d'une colonne d'eau distillée qui auroit 32 pieds de hauteur lorsque le mercure est de 28 pouces d'élévation dans le barometre; & elle est capable d'élever de l'eau à 32 pieds de hauteur dans un tuyau qui d'ailleurs n'offriroit aucun obstacle à ce mouvement d'ascension.

Cette dernière propriété est la base des effets des *pompes aspirantes*, car celles-ci ne servent qu'à supprimer la pression que l'air peut exercer verticalement au-dessus d'une colonne d'eau, afin que les collatérales qui ne cessent d'éprouver le poids de l'atmosphère & qui communiquent avec elle, l'obligent de s'allonger & de s'élever à une hauteur de 32 pieds au-dessus du niveau général.

Voici le mécanisme, le jeu, & les effets de ces instrumens si utiles à la marine. Dans un tuyau *qst* (fig. 91) percé cylindriquement, on introduit un corps solide *abh* nommé *piston*; qui d'une faible épaisseur, a la forme & le diamètre de l'intérieur du tuyau. Ce piston mobile, est fait pour être élevé & abaissé à volonté, à l'aide

d'une verge *i* dans un espace *gohb* qu'on nomme *jeu de piston*. Il est percé dans sa hauteur, & il porte à l'ouverture supérieure une soupape *a*, qui ne peut s'ouvrir qu'en partie, & qui abandonnée à elle-même retombe & recouvre l'ouverture indiquée. Dans le tuyau & au-dessous du jeu de pompe, en *fm*, on place un diaphragme fixe, au milieu duquel est un trou *A*. Celui-ci est recouvert par une soupape, qui s'ouvre dans le même sens que celle du piston, & sous une pareille inclinaison. On la nomme *soupape dormante*, pour la distinguer, comme fixe, de la première qui change de place avec le piston.

La pompe ainsi préparée doit-elle être mise en usage, son pied *st* est plongé dans l'eau qu'on veut élever & dont le niveau est *rp*. Alors l'espace intérieur *brph* du tuyau, ne contient plus que de l'air ordinaire qui ne communique plus avec l'air extérieur. Si la base du piston s'élève ensuite de sa position la plus basse *bh*, jusqu'à sa plus grande hauteur, c'est-à-dire en *go*, l'air renfermé d'abord dans *brph* s'étend dans l'espace *grpo*, & en se dilatant ainsi, son élasticité diminue en raison de l'accroissement de son volume. Il n'exerce plus sur l'eau intérieure *rp*, la pression que les eaux collatérales éprouvent au dehors, & celles-ci forcent alors la colonne intérieure de s'élever jusqu'à certain point *n* au-dessus du niveau *rp*. Le piston s'abaissant ensuite de *o* en *h*, la soupape *A* se ferme, l'air répandu dans *gofm* est comprimé, & il s'échappe par la soupape *a*, si cette compression rend son élasticité plus grande que celle de l'air extérieur, tandis que l'air renfermé dans *fmn*, reste dans l'état de dilatation où il avoit été réduit par l'ascension du piston. Une deuxième élévation de celui-ci produit une nouvelle dilatation de l'air renfermé, soit dans *bhfm*, soit dans *fmn*, & une plus grande ascension de l'eau intérieure. C'est enfin après plusieurs coups de piston, si la pompe est bien faite, que l'eau arrive, d'abord à la soupape dormante *A*, ensuite au-dessus de celle du piston qui en s'élevant en *o*, la force de se dégorger par l'ouverture latérale *q*. Telles sont à-peu-près les pompes aspirantes qui sont employées dans les vaisseaux; & on donne les

noms de *heuse* & de *chopine* aux parties désignées par les noms de piston & de soupape dormante.

269. Cherchons à quelles conditions une pompe doit produire tout l'effet qu'on est en droit d'en attendre. Désignons par  $q$  la distance  $op$ , par  $i$  la longueur  $oh$  du jeu de piston, par  $u$  l'intervalle  $hm$ , & par  $a$  la hauteur  $mp$ .

Avant le 1<sup>er</sup>. coup de piston, l'air occupe l'espace  $brph$ , & agit sur  $rp$  comme le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. Le piston étant élevé en  $o$ , cet air qui occupe un plus grand espace  $grpo$ , cylindrique comme le premier & de même base, n'a plus qu'un ressort proportionnel à  $P$ , & qu'on trouve par cette proportion  $P:32::a+u:a+u+i$ . La quantité  $P$  est donc plus foible que 32 pieds, & la pression de l'air extérieur est plus considérable. L'eau intérieure doit donc s'élever dans le tuyau  $frpm$ . Supposons que cette eau se soit élevée jusqu'en  $n$ , en désignant  $mn$  par  $y$ . Soit  $r$  la hauteur d'une colonne d'eau dont le poids équivaut au ressort de l'air dilaté qui reste renfermé dans l'espace  $fmn$  après l'abaissement de la soupape  $A$ . L'air qui se trouve dans  $bhmf$  entre le piston &  $fm$ , peut avoir le ressort de l'air extérieur & nous le lui supposons. Dans cet état des choses, le piston est relevé jusqu'en  $o$ , l'air de  $bhmf$  s'étend en  $gfmo$ , & ne conserve qu'une force élastique proportionnelle à  $p$ . Celle-ci est telle qu'on a l'équation  $p(i+u) = 32.u$ . Il peut arriver alors que  $p$  soit une quantité plus petite, ou plus grande que  $r$ , ou qui lui soit égale. Dans les deux derniers cas, la soupape  $A$ , ne peut être soulevée par l'air de  $fmn$  & l'eau ne peut pas s'élever dans la pompe. Un tel inconvénient doit être prévu dans la construction des pompes, ainsi examinons ce qu'il faut faire pour l'éviter. On sait que  $r+a-y=32$  (en représentant par  $(a-y)$  la hauteur de la colonne d'eau  $nrp$  qu'on a supposé être déjà élevée dans la pompe). Ainsi  $p$  étant égale à  $r$ , on doit, en combinant les deux équations précédentes, parvenir à celle-ci  $(32-a+y)(i+u)=32.u$ , ou  $y(i+u)=(i+u)a-32i$ . Une telle équation ne doit donc jamais avoir lieu pour une pompe où l'eau ne s'arrête pas dans son ascension ; ainsi  $y$  étant une quantité positive, où l'eau déjà élevée n'étant pas encore arrivée

à la soupape A, il faut que la quantité  $(i+u)a$  soit toujours plus petite que  $32.i$ ; & on l'obtient aisément en ne laissant aucun intervalle entre la soupape dormante & le piston au plus bas de sa course. Car alors  $y=a-32$ ; d'où on tire cette 2<sup>e</sup>. règle que  $a$  ou  $mp$  ne doit jamais valoir 32.

Supposons actuellement que l'eau, par le jeu du piston, dans une pompe bien organisée soit au-dessus de la soupape dormante & à une distance  $z$  du point  $o$ ; que la base du piston soit en  $bh$ ; & que l'air renfermé entre cette base & l'eau élevée, ait le même ressort que l'air extérieur. Alors le piston s'élève-t-il en  $o$ , l'air intérieur se dilate, & son ressort est égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit  $R$  de hauteur. On trouve  $R$  par cette équation  $Rz=32(z-i)$ , & elle doit être telle qu'étant ajoutée à la hauteur  $(a+i+u-z)$  de la colonne d'eau déjà élevée, la somme soit moindre que 32 pieds, afin que l'air extérieur tende de nouveau, après ce coup de piston, à produire l'augmentation de la colonne d'eau de la pompe.

Nommons  $m$  cette différence, & on aura  $R+a+i+u-z=32-m$ . Cette équation combinée avec la précédente, conduit à celle-ci  $mz=32i-qz+z^2$  (en désignant  $(a+i+u)$  par  $q$ ). On voit donc que  $m=0$  lorsque  $z^2=qz-32i$ , ou lorsque  $z=\frac{1}{2}q+(\frac{1}{4}q^2-32.i)^{\frac{1}{2}}$ . L'eau doit donc s'arrêter dans une pompe, dans deux cas; & il faut empêcher qu'aucun ne puisse avoir lieu. On y parvient en faisant ensorte que la quantité  $\frac{1}{4}q^2$  soit plus petite que  $32.i$ , parce qu'alors la valeur de  $z$  devient imaginaire, & démontre que la nullité de  $m$  n'est jamais possible, ou que l'eau doit s'élever à chaque coup de piston pour aller se dégorger par l'orifice  $q$ . On peut donc établir en règles générales, les indications de ces équations, & dire que l'effet d'une pompe est assurée, lorsque le piston au plus bas de sa course, n'est pas éloigné de la soupape dormante; lorsque celle-ci n'est pas à 32 pieds de distance du niveau de l'eau; & lorsque le jeu du piston répété 32 fois est un produit qui surpasse le quarré de la moitié de sa plus grande élévation au-dessus du niveau de l'eau.

270. L'effort qui est supporté par le piston pendant le jeu continu de la pompe est facile à calculer. Car le poids  $A$  de l'atmosphère, & celui de la colonne d'eau qui s'étend du piston au dégorgeoir  $q$ , pressent ce piston de haut en bas, tandis que de bas en haut, il est pressé par le poids  $A$  de l'atmosphère diminué de celui  $Q$  de la colonne d'eau qui remplit la pompe depuis le réservoir jusqu'à la base du piston. La différence  $s+Q$  de ces pressions & qui est la charge réelle du piston est donc égale au poids d'une colonne d'eau qui ayant la base du piston, auroit pour hauteur celle du dégorgeoir au-dessus du réservoir. Telle est la résistance que doivent vaincre des hommes employés à faire jouer une pompe aspirante, en y ajoutant d'ailleurs celle que produisent les frottemens.

Au reste la hauteur à laquelle l'eau peut être élevée à l'aide d'une telle pompe, varie comme la pression de l'atmosphère, & le mercure dans le barometre indique ces variations. Car toutes les causes qui le font descendre telles que, le vent, les mouvemens de l'air, & son humidité, diminuent l'effet des pompes qui est toujours plus grand, lorsqu'un air plus dense, plus calme, ou plus élastique produit l'ascension du mercure.

271. Les principes précédens servent aussi de base à la construction des ventilateurs, ou des machines qu'on peut employer pour renouveler l'air dans la cale d'un vaisseau. Cet air renfermé de toute part dans un espace *agfr* (fig. 73. G) & qui ne communique avec l'air extérieur que par des ouvertures faites en  $n$  & en  $z$ , ne peut en sortir que lorsqu'on augmente, ou lorsqu'on affoiblit la pression de l'air extérieur en  $n$ , sans qu'elle change en  $z$ , ou lorsqu'on donne à l'air intérieur qui correspond à  $n$ , un degré d'élasticité propre à lui faire surmonter la pression de l'air extérieur qui agit également en  $n$  &  $z$ . Voici les moyens de produire ces effets. 1°. Une longue & large manche en toile, & ouverte par les deux bouts, qui descend suivant  $nd$ , est-elle suspendue au-dessus du pont, & présente-t-elle au vent une ouverture latérale? Le courant d'air qui s'y introduit refoule suivant  $nd$  l'air de la cale qui s'échappe alors par l'écouille  $z$ . Cet effet est parfaitement analogue à celui d'une

eau courante *cd* (263) (fig. 22. G) qui reçue & arrêtée par l'orifice *f* du tuyau recourbé *bif*, fait remonter l'eau renfermée dans ce tuyau, à une hauteur d'autant plus grande que le quarré de la vitesse de l'eau affluente est plus considérable. 2°. L'air extérieur & calme qui repose sur *n*, est-il mis en mouvement ou pompé à l'aide d'une machine quelconque, sa pression en *n* diminue nécessairement, tandis qu'en *z* l'atmosphère agit sans éprouver cette variation. L'air de la cale doit donc sortir par *n*, & être remplacé par l'air extérieur qui s'introduit en *z*. 3°. La chaleur du feu peut-elle être appliquée en *n*, pour augmenter en ce lieu seul le ressort de l'air qui s'y trouve, alors celui-ci devenu plus élastique, doit s'élever au-dessus de *n*, il doit donc être suivi par d'autres parties d'air de la cale, qui viennent en *n*, acquérir successivement, par le feu, un nouveau degré d'élasticité, & s'élever comme celles qui les ont précédé. Le remplacement de cet air est fait en même tems par l'air extérieur qui s'introduit en *z*. Cette application du feu deviendrait facile même dans un vaisseau, en faisant passer par le brasier de la cuisine, un tuyau de tôle, qui seroit coudé pour éviter les accidens, qui ne serviroit qu'au passage de l'air de la cale, & dont les extrémités seroient ouvertes l'une sous le pont & l'autre au-dessus du foyer.

272. Après avoir ainsi analysé les pressions que l'air & l'eau en repos ou en mouvement exercent sur des molécules semblables à celles qui les composent, il faut examiner l'action des mêmes fluides sur des corps qu'ils rencontrent, qui y sont plongés en tout ou en partie, & qui s'y meuvent avec diverses vitesses, ou qui reçoivent le choc de ces mêmes fluides en mouvement.

Une ligne solide *de* (fig. 21. G), ou qui n'a d'épaisseur que celle d'une molécule d'eau, est-elle plongée au-dessous du niveau *om* d'une masse d'eau; cherchons la grandeur des pressions diverses que l'eau exerce sur *de*, dans tous les sens quelconques. On fait que chaque molécule fluide agit également sur toutes les directions possibles, ainsi on peut en conclure que dans le sens *dn*, par exemple, *de*, est sollicitée par autant de forces parallèles à *dn*, qu'on peut imaginer de filets fluides qui

paralleles auffi à  $dn$  agiffent immédiatement fur quelques parties de  $de$ . Le nombre de ces forces , ou celui des filets , eft indiqué par la grandeur d'une fection  $nr$ , perpendiculaire à  $dn$ . Car autant on pourroit ranger de molécules fur  $nr$ , autant il doit y avoir de filets fluides qui parallèlement à  $dn$ , fe dirigent fur  $de$ . D'ailleurs l'action de chacune de ces forces paralleles appliquées fur diverfes parties de  $de$  eft en raifon de la diftance de chacun de ces élémens au niveau de l'eau  $om$  (260) : & ces diftances forment enfemble une progreflion arithmétique dont les termes extrêmes font les diftances des points  $d$  &  $e$  à  $om$ . Ainfi la preffion totale exercée fur  $de$  dans le fens  $dn$ , étant compofée de la fomme de toutes les forces paralleles indiquées, on peut la trouver en prenant la fomme des termes d'une progreflion arithmétique, dont le nombre eft  $nr$ , & dont les termes extrêmes font les preffions de l'eau fur les extrémités  $d$  &  $e$  de  $de$ . Soient  $do$  &  $em$  les diftances de  $e$  &  $d$  au niveau de l'eau, &  $p$  la pefanteur fpécifique de l'eau, ou le poids de l'unité de volume de ce fluide, alors  $p.do$  &  $p.me$ , expriment la preffion exercée par l'eau en  $d$  &  $e$ . La preffion totale cherchée dans le fens  $du$ , eft donc égale à  $\frac{1}{2}p(do+me)nr$ .

En raifonnant de même fur la preffion exercée par l'eau fur  $de$  dans le fens vertical, on trouveroit que cette preffion eft exprimée par  $\frac{1}{2}p(do+me)on$ . La preffion fur  $de$  dans le fens horizontal, ou perpendiculairement à  $qe$  eft donc  $\frac{1}{2}p(do+me)qe$ . Les preffions dans tout autre fens fur  $de$ , feront déterminées de la même maniere, & comme les fections  $nr$ ,  $om$ ,  $qe$ , &c., par lesquelles on multiplie la quantité  $\frac{1}{2}p(do+me)$ , font les projections de  $de$  fur un plan auquel eft perpendiculaire la direction fuivant laquelle la preffion eft exercée; on doit conclure que la preffion de l'eau fur une ligne  $de$ , fuivant une direction désignée, eft égale à la fomme des deux preffions qui font exercées fur fes points extrêmes, multipliées par la projection de  $de$  fur un plan auquel cette direction eft perpendiculaire. Cette regle eft générale & voici fes applications.

Un triangle  $acd$  (fig. 9. G.) ou un prisme triangulaire qui auroit l'épaiffeur d'une molécule d'eau, eft-il plongé verticalement



verticalement dans une masse d'eau dont  $abd$  est le niveau, la pression verticale que l'eau exerce sur ses deux côtés  $ac$  &  $dc$ , est égale au poids de ce prisme considéré comme fluide. Car  $bc$  étant la distance de l'extrémité commune  $c$ , de ces côtés au niveau  $abd$ , alors  $\frac{1}{2}p.bc.ab$  exprime la pression verticale de l'eau sur  $ac$ ; & celle sur  $ed$  est  $\frac{1}{2}p.bc.db$ ; de sorte que ces pressions réunies forment la somme  $\frac{1}{2}p.bc.da$ ; c'est-à-dire que le volume de ce prisme étant estimé en pieds cubes, & son poids étant évalué à raison du poids de chaque pied cube, ce poids est la pression verticale exercée par l'eau sur le contour de  $acd$ .

La pression sur  $ac$ , dans le sens horizontal  $qi$ , est  $\frac{1}{2}p.cb.^2$ ; & celle sur  $dc$ , qui est dirigée dans un sens contraire  $ri$ , est aussi  $\frac{1}{2}p.cb.^2$ . Ces pressions égales & opposées diamétralement, se détruisent donc mutuellement. Ainsi toutes ces pressions exercées sur ce prisme pouvant se réduire à trois forces parallèles à trois axes perpendiculaires entr'eux, il s'ensuit qu'en supposant que deux de ces axes soient horizontaux, ce prisme n'est sollicité à se mouvoir, par l'eau qui le presse, que dans le sens vertical, & de bas en haut. Il ne peut donc flotter, ou rester en repos, étant plongé dans l'eau calme, qu'autant qu'il est en même-temps soumis à l'action directement contraire d'une force étrangère, égale à la pression  $\frac{1}{2}p.bc.ad$ , & telle que peut être le poids de la masse particulière de ce prisme considéré comme fluide.

273. Etendons ces idées à la recherche de la pression de l'eau sur la carene d'un vaisseau, en décomposant cette dernière en tranches verticales, minces & placées comme les demi-couples  $qmy$ ,  $tâp$ ,  $zsz$  &c. (fig. 57, G) ou telles que  $apnRQsgm$  (fig. 1. G), qui représente particulièrement un demi-couple dans toute son épaisseur.

Considérons l'élément quadrangulaire  $upg\zeta$  du contour antérieur de ce couple, plongé dans l'eau qui l'environne. Menons des lignes verticales,  $ub$ ,  $pc$ ,  $\zeta t$ ,  $qg$ , par les sommets des angles de cet élément & terminées par le niveau de l'eau  $asQR$ . La pression verticale de l'eau sur le seul côté  $up$  est  $\frac{1}{2}p(ub+pc)bc$ . Le facteur  $\frac{1}{2}(ub+pc)bc$  exprime la surface du trapeze  $bupc$ . Un pa-

reil raisonnement conduit à trouver que la pression verticale de l'eau sur chaque ligne élémentaire, telle que  $up$ , du quadrilatere  $upgz$ , est égale au produit de  $p$ , multiplié par la surface du trapeze correspondant, qui parallèle à  $bupc$  peut-être regardé ainsi que celui-ci, comme un élément du volume du prisme tronqué  $buzptqc$ . La somme des pressions verticales exercées par l'eau sur  $upgz$ , est donc égale au poids d'une masse d'eau dont le volume est  $bupgztc$ . Celle des pressions verticales de l'eau sur la carene du couple supposé, ou d'une tranche entiere, est donc égale au poids de cette tranche, en la considérant comme fluide. Enfin la carene d'un vaisseau éprouve donc, dans le sens vertical, & de bas en haut, des pressions dont la somme est égale au poids du volume d'eau qui est déplacé par cette carene.

Il est superflu de répéter ici que les pressions exercées horisontalement par l'eau environnante, sur la carene d'un vaisseau, se détruisent mutuellement, parce que la démonstration en est la même que celle qui a été donnée précédemment.

Le volume de la carene d'un vaisseau étant donc calculé comme on l'a enseigné (145); & le résultat étant multiplié, par 72 liv. (qui est le poids  $p$  d'un pied cube d'eau de mer, ou par 70 liv. qui est celui de l'eau douce), on obtient la valeur en livres de la force avec laquelle l'eau presse verticalement de bas en haut, la carene d'un vaisseau. Un corps submergé perd donc de son poids, & la partie qu'il perd est toujours égale au poids du fluide calme qu'il déplace. Un corps peut donc flotter sur l'eau si son poids est égal à celui d'un volume d'eau, qu'une de ses parties peut déplacer. Mais il ne peut flotter, en repos, & garder une certaine situation, que lorsque la direction de son poids & celle de la résultante des pressions de l'eau sur sa carene, sont diamétralement opposées. On sait que le poids d'un corps doit être regardé comme une force verticale qui est appliquée à son centre de gravité (239); d'ailleurs les pressions verticales que l'eau exerce sur le contour de la partie submergée, forment une somme déjà indiquée; & leur résultante est une force verticale dont la direction passe

nécessairement par le centre de grandeur de la carene. Car la pression verticale de l'eau sur chaque élément *upgz* de la carene, étant représentée par le poids d'une masse d'eau dont le volume est la partie correspondante *bupgz* de la carene; le moment de chacune de ces pressions, à l'égard d'un plan vertical quelconque, est donc égal à celui de chaque partie correspondante du volume de la carene. Ainsi la résultante de toutes ces pressions, & le centre de grandeur de la carene, doivent être également éloignés de tous les plans verticaux auxquels on peut les comparer. C'est pourquoi en supposant que tous ces plans soient dirigés par le centre de grandeur, la résultante des pressions verticales doit aussi se trouver dans chacun de ces plans, ou être dirigée verticalement par ce centre qui leur est commun. Un corps ne peut donc flotter & en repos, sur une eau calme, qu'à deux conditions. La 1<sup>re</sup>. est que le centre de gravité du corps, & le centre du volume de sa carene soient placés sur une même ligne verticale; & la 2<sup>me</sup>. est que le poids du corps soit égal à celui du volume d'eau dont il occupe la place. Ainsi lorsqu'on s'est proposé de construire un vaisseau de 74, qui tout armé, doit peser 3000 tonneaux, ou 6000000 liv. (à raison de 2000 liv. le tonneau), sa carene a dû être con-formée de manière, que son volume fut de 83333 pieds cubes environ, & que dans la situation particulière que ce vaisseau doit prendre & garder sur l'eau, son centre de grandeur fut placé sur la verticale qui passe par le centre de gravité du vaisseau armé.

Un tel corps flotte-t-il dans une eau courante, ou sur une mer agitée; alors il faut pour déterminer la résultante des pressions verticales se rappeler ce qui a déjà été dit (262) des courans & des lames. Il faut donc analyser la pression verticale, qui est exercée sur chaque élément de sa carene par les molécules qui agissent sur lui; & cette pression est, comme on fait, en raison de la distance de cet élément au niveau de l'eau, diminuée de la hauteur à laquelle seroit due la vitesse dont ces molécules se trouveroient animées, au moment de leur contact avec le corps.

274. Si les principes précédens peuvent servir à juger si un corps doit flotter en repos dans une situation déterminée , ils sont propres aussi à faire connoître les règles générales qu'on doit suivre pour donner à un vaisseau une forme telle , non-seulement qu'il flotte en repos lorsque son plan diamétral est vertical , mais aussi qu'il résiste fortement à toute cause étrangere qui tendroit à l'éloigner de cette position droite. (Ce plan diamétral est celui qui passe par l'étrave , la quille , & l'étambot ; c'est *aqfnod* fig. 29. G. ). Dans un vaisseau cette résistance est nommée *stabilité* , & elle est une de ses qualités essentielles. Elle dépend du moment de la résultante des pressions verticales de l'eau , à l'égard d'un axe horizontal qui passe par le centre de gravité de la carene , lorsque le vaisseau est incliné , comme le sont les tranches représentées (fig. 22 , 23 & 33. G. ) Plus ce moment est considérable , plus le vaisseau incliné est sollicité fortement à tourner sur lui-même pour reprendre une situation droite (fig. 32. G. ) qu'il doit toujours garder ; & plus , par conséquent il doit présenter de résistance aux puissances qui tendent à l'incliner. Le développement de ces momens & leur résultats , qui font connoître la stabilité d'un vaisseau à l'égard d'un axe horizontal qui passe par son centre de gravité , parallèlement soit à sa longueur soit à sa largeur , ne seront pas établis ici dans leurs détails , & ils appartiennent spécialement à un traité de l'art de la marine , où doivent être discutés les fondemens de toutes les qualités qui sont nécessaires aux bâtimens de mer.

275. Après les réflexions précédentes , sur les pressions qui sont exercées & éprouvées dans tous les sens , par chaque molécule intégrante d'une masse fluide , on peut déterminer quelle doit être l'impulsion d'un fluide sur la surface d'un corps fixe , lorsque ce fluide animé d'une vitesse due à la hauteur  $x$  vient rencontrer cette surface. Supposons , que ce corps soit un parallépipède rectangle BCEDIHGF (fig. 44) , qu'il flotte en repos , & que ses faces antérieure & postérieure , BHDI , CGFE , soient non-seulement verticales , mais aussi perpendiculaires à la direction du courant. L'eau

environnante n'exerce alors que sur le fond HGFI, une pression verticale qui feroit,  $p.HGFI (h-x)$  (en nommant  $h$  la distance du fond au niveau de l'eau BCED.) Si on compare cette pression à celle que ce prisme éprouveroit dans la même eau calme, on conclura aisément que celle-ci exprimée par  $p.HGFI.h$  est supérieure à la première, & que par conséquent le tirant d'eau d'un tel corps, ainsi que d'un vaisseau flottant dans une eau courante, doit être plus grand que lorsque ce corps est environné d'une eau calme & tranquille.

Quant aux pressions horizontales exercées par ce même courant, sur les faces verticales & latérales, du prisme supposé, elles ne se détruisent pas dans tous les sens, comme dans une eau calme. Le courant étant parallèle aux faces latérales & verticales, BHGC & DIFE, il y a équilibre entre les pressions exercées par le courant perpendiculairement à ces faces. Mais le courant est dirigé sur la face HBDI; c'est pourquoi, l'eau, venant frapper chaque ligne  $of$  (qui, parallèle au niveau de l'eau dont elle est éloignée d'une distance  $h$ , peut être regardée comme un élément de la face choquée) est alors arrêtée dans son mouvement par le corps qu'on suppose fixe. Elle perd toute sa vitesse dans le choc, & le courant amenant sans cesse de nouvelles molécules, exerce sur  $of$  la même pression qu'il feroit sentir à la base  $f$  (fig. 2. G.) de la colonne d'eau renfermée dans le tube recourbé *bis* de Pitor (263). Cette pression doit donc être exprimée par  $p.of (h+x)$ .

Le fluide en contact avec la face arrière du corps, peut prendre au contraire, & sans obstacle, toute la vitesse du courant. Ainsi il ne presse l'élément, (qui sur cette face correspond à  $of$  de la face antérieure) qu'avec une force  $p.of (h-x)$ . Les pressions du courant, sur les éléments correspondans  $of$  des faces avant & arrière du prisme, diffèrent donc de la quantité  $2p.of.x$ ; & l'impulsion horizontale du courant, sur le corps supposé, est donc  $2p.sx$  (en nommant  $s$  la surface égale, qui sur les faces arrière & avant du corps, est plongée dans le fluide.) Le corps est donc sollicité au mouvement, dans le sens BC, par une force qui doit varier comme le carré  $x$  de la vitesse du courant.

Si le corps étoit plongé entièrement sous l'eau , & à une profondeur  $a$  au-dessous du niveau de l'eau ; la pression du courant sur  $of$  élément de sa face avant , seroit exprimée par  $p.of(h+a+x)$  , & sur  $of$  de sa face arrière par  $p.of(h+a-x)$  . La différence de ces pressions  $2p.of.x$  étant multipliée par la hauteur  $BH$  du prisme , devient  $2p.fx$  ; & on voit que l'impulsion du courant sur ce corps est la même à la profondeur  $a$  , comme au niveau de l'eau , si la vitesse de ses eaux ne varie pas à raison des profondeurs.

Si la direction d'une eau courante , dont la vitesse est due à la hauteur  $x$  , est inclinée sous un angle  $i$  à une surface plane telle que  $eoio$  (fig. 7. G.) , cette surface éprouveroit une pression moins grande que si le courant lui étoit perpendiculaire. En effet cherchons la pression du courant , & sur la face antérieure , & sur la face postérieure de ce plan  $emio$  . Représentons un de ses élémens  $ab$  (qui horizontal est à une distance  $h$  du niveau de l'eau) par la ligne  $am$  (fig. 3. G.) . La direction du courant & sa vitesse sont indiquées par  $im$  ; ainsi en menant  $ir$  perpendiculaire à  $am$  , on doit reconnoître que les molécules fluides , à la rencontre de  $am$  , ne peuvent conserver que la vitesse représentée par  $mr$  qui est une composante de  $im$  ; & qu'elles doivent perdre la vitesse  $ir$  qui est due à la hauteur  $x \sin.i^2$  . La pression exercée par le courant sur  $am$  dans le sens  $ir$  est donc exprimée par  $p.am(h+x \sin.i^2 - x \cos.i^2)$  . Puisque l'eau agit perpendiculairement à l'avant en raison d'une force proportionnelle à  $x \sin.i^2$  , & qu'elle fuit l'arrière avec une vitesse due à la hauteur  $x \cos.i^2$  . La pression dans le sens  $im$  est  $p.mo(h+x \sin.i^2 - x \cos.i^2)$  ; & dans le sens perpendiculaire à  $im$  , elle est  $p.ao(h+x \sin.i^2 - x \cos.i^2)$  ; en supposant que  $mo$  &  $ao$  soient les projections de  $am$  sur les plans auxquels les directions désignées sont perpendiculaires.

Ainsi le courant dirigé sur la face antérieure de  $emio$  (fig. 7. G.) exerce sur chacun de ses élémens horizontaux  $ab$  ; une pression  $p.ab(h+x \sin.i^2 - x \cos.i^2)$  dans un sens perpendiculaire au plan.

Le courant exerce aussi une pression sur chaque élément correspondant de la face postérieure de ce plan ;

& pour en juger il faut remarquer que le fluide placé derrière ce plan , peut sans obstacle prendre la vitesse commune des eaux courantes. Sa pression sur la face arrière de  $ab$  est donc  $p.ab(h-x)$  ; & perpendiculaire à ce plan , elle est opposée à la pression exercée sur la face avant de  $ab$ . En raisonnant ainsi sur chaque élément de la surface  $emio$  exposée au choc du courant , la puissance réelle qui sollicite celle-ci à se mouvoir perpendiculairement à son plan est la différence des pressions calculées. Elle est donc exprimée par  $2p.s.x \sin.i^2$  , ( en supposant que  $s$  soit la surface plane exposée au choc du fluide , & que celui-ci ait une même vitesse à toutes les profondeurs ).

276. Ces principes & ces résultats doivent être employés sans restriction , dans la recherche de l'impulsion du vent sur une surface plane. Ainsi imaginons que les voiles d'un vaisseau ne présentent au choc du vent qu'une surface de ce genre , on en conclura que  $2d.s.x \sin.i^2$  doit être l'expression de l'action du vent perpendiculairement à une voile , lorsque celle-ci est frappée sous un angle  $i$  d'incidence , dans toute son étendue  $s$  , par un courant d'air qui a une vitesse due à la hauteur  $x$  , & une pesanteur spécifique  $d$ . L'effet du vent sur cette voile , dans une direction oblique à celle-ci , seroit exprimé par la même formule , en y substituant au lieu de  $s$  la projection de la voile frappée sur un plan auquel la direction désignée seroit perpendiculaire.

Cette formule fait voir que l'impulsion du vent est en raison du carré  $x$  de sa vitesse , & de l'étendue  $s$  de la surface frappée. Cette action dépend aussi du carré du sinus de l'incidence  $i$  ; c'est pourquoi le vent dont la direction peut être regardée comme horizontale , exerce sur une voile l'action la plus grande , lorsque son plan est vertical ( toutes choses égales d'ailleurs ) ainsi que l'expérience le démontre. Les mêmes formules permettent aussi de juger les effets d'une voile , soit pour pousser un vaisseau dans le sens de sa longueur , ou latéralement pour le faire dériver , de quelque manière que cette voile soit orientée. Tous ces développemens trouveront & occuperont une place dans le traité de l'art de la marine.

C'est par la même raison que nous n'ajouterons pas ici une application immédiate, de ces principes aux effets que le gouvernail doit produire sur un vaisseau, lorsque cette machine est exposée au choc d'une eau courante.

277. Après avoir examiné l'état d'un corps, qui sans pouvoir changer de place flotte sur une eau calme ou courante; cherchons la résistance que l'eau calme peut opposer à un corps en mouvement. Je vais sur une telle matière présenter des principes nouveaux qui par l'heureuse explication qu'ils fournissent des principaux phénomènes de la résistance de l'eau, ont été deux fois couronnés par l'académie des sciences de Paris. L'état de l'eau, autour d'un corps en mouvement, doit sur-tout être développé pour en conclure l'expression vraie & complete de la résistance de l'eau, c'est pourquoi cette recherche doit être précédée de quelques réflexions générales.

Un corps flottant est-il sollicité au mouvement par une puissance motrice, l'eau forme un obstacle qui retarde sa marche progressive dans l'espace. Mais comment alors le corps agit-il sur ce fluide; & comment le fluide lui-même se compose-t-il autour du corps qui trouble son repos, & qu'il ne cesse d'envelopper dans sa course. De telles questions méritent d'être résolues, afin que ce sujet soit éclairé autant qu'il doit l'être.

278. Si un plan *emio* (fig. 7. G.) plongé verticalement dans l'eau, est poussé dans le sens *ip*, perpendiculairement à sa surface; il ne peut s'avancer sur cette ligne qu'en refoulant devant lui le fluide qui est sur son passage, & en abandonnant après lui l'espace qu'il occupoit. Le fluide antérieur est donc sollicité par ce plan à prendre la vitesse que la force motrice tend à lui imprimer; c'est-à-dire que cette vitesse étant due à la hauteur  $x$ , chaque molécule refoulée par le plan est dans le même état que si elle étoit pressée par une colonne d'eau dont la hauteur seroit  $h+x$  (en nommant  $h$  la distance au niveau de l'eau). Car avant le mouvement de *emio*, chaque molécule tendoit à se mouvoir avec une vitesse due à la profondeur  $h$ ; & comme ce plan, pour s'avancer dans l'espace, tend à prendre & à imprimer au fluide qui le



précède une vitesse due à la hauteur  $x$ , il s'ensuit que chaque molécule tend à se mouvoir avec une vitesse due à la hauteur  $h+x$ . Ainsi, par sa réaction sur le plan qui s'avance dans l'espace, elle le presse avec tout le poids d'une colonne d'eau de la hauteur  $h+x$ .

279. L'expérience vient à l'appui de ce raisonnement. Un tube recourbé (fig. 2. G) garni de son flotteur *pqq* (263) est-il plongé verticalement dans l'eau calme, & est-il mu parallèlement à lui-même avec une vitesse horizontale qui lui fait parcourir 100<sup>p</sup> en 21''; on observe que l'état du flotteur, ou la hauteur de la colonne fluide intérieure, varie suivant la position respective de l'orifice *f*, & du fluide refoulé. Le tube s'avance-t-il de *d* vers *c*, & l'orifice est-il ouvert du côté de *c*, le flotteur s'élève de 4<sup>pou</sup> 7<sup>lig</sup> au-dessus du point où il s'arrête dans l'état de repos. Cet orifice est-il placé dans le sens opposé, ou est-il ouvert du côté de *d*, alors dans le transport du tube de *d* en *c*, le flotteur s'abaisse de 4<sup>pou</sup> 7<sup>lig</sup> au-dessous de l'état de repos. Son abaissement est encore le même, lorsque la direction de la branche *if* du tube, est perpendiculaire à celle *cd* de son mouvement progressif; & tel est aussi l'abaissement d'un flotteur dans un tube droit & vertical *ao*, lorsqu'il est transporté suivant *dc*, parallèlement à lui-même. Cette quantité 4<sup>pou</sup> 7<sup>lig</sup> est à-peu-près la hauteur  $x$  à laquelle est due la vitesse observée de 100 pieds en 21''. Ainsi un de ces résultats démontre évidemment que la colonne fluide renfermée dans ce tube en mouvement, reçoit sur sa base plongée à une profondeur *h* une impulsion de l'eau refoulée, qui est égale au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur seroit  $h+x$ .

Telle est donc la réaction de l'eau sur un plan qui la refoule dans une direction perpendiculaire à sa surface. L'effet de cette réaction seroit d'empêcher le mouvement du plan, si le fluide antérieur ne pouvoit se retirer d'aucun côté, pour laisser au plan un passage libre, puisque l'eau est incompressible. Ainsi le plan ne peut réellement obéir à la force qui le pousse, qu'en raison de la retraite plus ou moins facile du fluide dont il tend à occuper la place. La résistance que l'eau oppose au mouvement, dépend donc, & de la difficulté de cette retraite, & de la pres-

sion que l'eau exerce sur ce plan dans un sens contraire au mouvement imaginé. Examinons d'abord comment le fluide antérieur doit faire sa retraite, en supposant que les dimensions du plan soient très-inférieures à celles de la masse fluide où il se meut.

280 Dès que le plan supposé tend à pousser devant lui le fluide qui est en contact avec sa face antérieure; celui-ci transmet dans tous les sens la pression qu'il éprouve. Il dirige donc sa retraite sur toute sorte de directions, tant horizontales que verticales. Cette retraite qui d'abord a lieu dans le sens vertical ou de bas en haut, se fait sur-tout du côté qui lui offre le plus petit obstacle; & le vuide que le plan laisse après lui dans son mouvement détermine le sens de la plus grande partie de cette retraite. Car le fluide qui est derrière le plan tend à s'avancer horizontalement comme lui, pour venir remplir le vuide indiqué. La retraite des molécules antérieures, doit donc se faire en très-grande partie suivant des directions horizontales & d'ailleurs avec plus de facilité que dans le sens vertical. C'est donc dans ce premier sens que la pression du plan se communiquant de proche en proche à toutes les molécules antérieures, dont plusieurs s'élèvent au-dessus du niveau des eaux environnantes, produit par la somme de leurs retraites partielles, un passage libre au plan qui est sollicité à s'avancer dans l'espace.

Tel est sans doute l'état naturel de l'eau autour de la partie antérieure d'un corps en mouvement, mais avec des circonstances qui dépendent de la forme du corps & de sa situation à l'égard de l'eau environnante. Car on en trouve une preuve sensible dans l'agitation de l'eau autour d'un vaisseau au moment où celui-ci est lancé à la mer. Dans ce dernier cas les molécules dont il vient occuper la place, forment devant lui une intumescence considérable, & s'élèvent au-dessus du niveau général, à une hauteur bien plus grande, que lorsqu'un pareil vaisseau, animé d'une même vitesse, s'avance dans l'eau où il flotte & sans cesser d'en être enveloppé pendant tout le temps de son mouvement. Le vaisseau qui descend du chantier, & qui n'est pas encore entièrement plongé dans

l'eau, ne peut laisser aucun vuide après lui pendant sa descente, c'est pourquoi, la retraite du fluide antérieur n'est ni facilitée, ni déterminée vers l'arrière du corps, & l'eau est forcée de s'élever extraordinairement au-dessus de son niveau primitif pour former devant le corps un vuide qu'il puisse occuper.

D'autres expériences faites par Bossut prouvent aussi combien la difficulté de la retraite du fluide qui précède un corps en mouvement, a une grande influence sur la résistance qu'il doit vaincre & que l'eau lui oppose. Car il a observé que si son mouvement a lieu dans un canal étroit, la résistance éprouvée est plus grande que dans un fluide dont l'étendue est indéfinie en tout sens, & que cet accroissement peut même aller très loin, suivant la différence qui regne entre les dimensions transversales & homologues du corps & du canal.

281. Après avoir ainsi établi que l'eau refoulée par la face antérieure d'un plan en mouvement, se retire suivant des directions horizontales, en très-grande partie; & que la facilité plus ou moins grande de cette retraite fait varier l'intensité de la résistance de l'eau; examinons comment s'exécute cette même retraite qui paroît devoir être d'autant plus prompte qu'elle se fait sur un plus grand nombre de directions en même temps.

Considérons un plan *so* (fig. 6. G) qui, vertical, s'avance horizontalement sur une ligne *men* perpendiculaire à sa surface, dans un canal *sbro* dont il touche les parois par ses côtés, & qui est ouvert par les deux bouts. Alors toutes les molécules antérieures ne font place à ce plan qu'en fuyant parallèlement à la direction du canal. Mais supposons que ce plan situé en *br*, se meuve suivant la ligne *cn* qui lui est perpendiculaire, & dans un fluide dont l'étendue est indéfinie. Chaque molécule alors, telle que *c*, en contact avec le plan, peut être regardée comme le centre d'autant de directions horizontales qu'on peut mener de rayons aux divers points d'une demi-circonférence *btr*, décrite du point *c* comme centre. Elle exerce dans toutes ces directions, sur le fluide environnant, la pression que le plan lui fait éprouver. Ainsi on voit qu'en ayant

égard à certaines de ces directions, les molécules antérieures qui sont placées dans l'angle  $ncr$  tendent à se porter dans l'espace angulaire  $ncb$ , tandis que celles qui sont dans ce dernier espace tendent avec une égale force à se répandre dans  $ncr$ . Les mouvemens imprimés dans ce fluide, & dirigés de gauche à droite, sont donc détruits par ceux qui le sollicitent de droite à gauche. C'est pourquoi les molécules placées devant ce plan ne pouvant se retirer effectivement que sur des directions où elles ne se gênent pas mutuellement, doivent (comme l'expérience le démontre) se partager en nombre égal de part & d'autre de ce plan qui se meut perpendiculairement à sa surface. Alors celles de la gauche de  $c$ , pour n'être pas gênées par celles de la droite, doivent fuir sur toutes les directions qu'on peut imaginer, entre celles qui sont parallèles, l'une au mouvement  $cn$  du plan, & l'autre à la surface  $br$  de ce même plan. On en diroit de même des molécules qui correspondent à la partie droite de ce plan; & par conséquent le nombre des directions sur lesquelles le fluide antérieur fait sa retraite est déterminé par la grandeur de l'angle  $ncr$  du plan avec la route qu'il suit. Cet angle est ici de  $90^\circ$ .

282. Si le plan supposé  $AB$  (fig. 18. G) dirigeoit son mouvement horizontal suivant une ligne  $BC$  inclinée sous un angle  $i$  à sa surface, & avec une vitesse due à la hauteur  $x$ ; alors chaque molécule antérieure  $o$  ne recevrait du plan qu'une impulsion qui tendroit à lui faire prendre une vitesse  $oi$ , perpendiculaire à  $AB$ , & due à une hauteur  $x \sin. i^*$ . Cette pression transmise à tout le fluide antérieur, le forceroit à faire sa retraite; & comme le fluide renfermé dans l'espace angulaire  $noA$ , ne peut se porter dans  $noB$  où d'autre fluide tend avec une égale force à occuper  $noA$ , tout le fluide antérieur, comme pressé par la molécule  $o$ , ne peut se retirer que sur les lignes qu'on peut mener du point  $o$  dans l'ouverture de l'angle  $noA$  qui est le supplément de  $i$ . En raisonnant ainsi sur l'effet de la pression exercée sur chaque molécule qui est en contact avec la face antérieure du plan, on doit en conclure que le fluide qui précède un plan dont le mouvement est oblique à sa

surface, fait sa retraite sur un nombre de directions déterminé par la grandeur du supplément de l'angle d'incidence, c'est-à-dire par  $180^\circ - i$ . Nous ne parlerons pas de l'ascension verticale du fluide antérieur au-dessus du niveau général. Elle est foible lorsque la retraite latérale est facile, ou lorsque le fluide a une étendue indéfinie; & elle n'est considérable, qu'au devant des corps qui se meuvent dans des canaux étroits.

283. Nous venons d'indiquer sous quel rapport varie la facilité de la retraite du fluide qui est refoulé par un plan en mouvement, & par conséquent sous quel rapport partiel, la résistance de l'eau augmente ou diminue, puisque celle-ci est en partie en raison inverse de cette facilité de retraite. Mais cette résistance est aussi en raison directe de la pression que l'eau exerce sur ce plan dans un sens directement opposé au mouvement; & ce dernier élément de la résistance est celui dont il nous reste à déterminer l'expression générale. Déjà nous avons parlé de la réaction du fluide antérieur sur le plan qui le refoule perpendiculairement. Nous avons vu que chaque ligne horizontale, telle que  $ab$  (fig. 7. G) tracée sur sa surface, qui est à une profondeur  $h$  au-dessous du niveau  $eo$ , éprouve une pression  $p.ab.(h+x)$ , qui est directement opposée au plan, lorsque celui-ci s'avance perpendiculairement à lui-même suivant  $vp$ , & avec une vitesse due à la hauteur  $x$ . Mais cette pression exercée par l'eau environnante sur la face antérieure, n'est pas la seule qui soit éprouvée par ce plan; & le fluide en contact avec la face postérieure, agit aussi sur lui. Cette dernière pression est égale à  $p.ab.h$ , dans l'état de repos; mais elle lui est inférieure dans l'état de mouvement. Car aussi-tôt que le plan s'avance sur  $vp$ , les molécules qui étoient en contact avec sa face arrière, accourent pour remplir le vuide qu'il laisse après lui. Parmi elles, il en est qui, par leur profondeur, tendent à se mouvoir avec une vitesse plus grande que celle du plan qui les fuit, & celles-ci ne cessent par conséquent d'accompagner ce plan dans sa marche. Il en est d'autres qui placées à une profondeur plus petite que  $x$ , ne peuvent suivre le plan. Elles sont forcées de l'abandonner

& de laisser se former derrière lui un vuide, qui a une profondeur  $x$  & qui n'est ensuite rempli qu'avec le temps, soit par la chute des molécules collatérales, soit par l'ascension de celles qui sont verticalement inférieures à ce même vuide. Les collatérales affluent parce qu'elles ne sont plus soutenues de ce côté, & les inférieures s'élèvent pour concourir à combler le vuide momentané, parce que n'étant plus pressées de haut en bas comme elles continuent à l'être dans tout autre sens, elles doivent se porter de bas en haut vers le niveau de l'eau. Ces molécules inférieures tendent donc à prendre, non-seulement une vitesse horizontale égale à celle du plan, si leur profondeur est convenable; mais aussi une vitesse ascensionnelle qui comme celle du plan est due à une hauteur  $x$ , ou à la profondeur du vuide momentané. Elles prennent donc réellement cette vitesse dirigée obliquement à l'horizon & qui est due à la hauteur  $2x$ . La pression exercée par ce fluide sur un élément superficiel  $ab$ , de la face postérieure de  $emio$ ; & qui dans l'état de repos est  $p.ab.h$ , n'est plus alors exprimée que par  $p.ab.(h-2x)$  (262) parce que telle est la pression des eaux courantes; & cette force est dirigée dans le sens  $ip$  du mouvement du plan, ou elle est opposée directement à la pression exercée sur l'élément correspondant  $ab$  de la face antérieure du même plan. Elle détruit en partie celle-ci, & l'élément  $ab$  ne supporte réellement, dans un sens contraire au mouvement, qu'une force qui est égale à la différence de ces pressions. Celle du fluide antérieur sur  $ab$  est  $p.ab.(h+x)$ . Et sa différence à celle exercée sur la face arrière de  $ab$ , est  $3p.ab.x$ . On peut donc en conclure que si on nomme  $f$  la surface submergée du plan supposé, la pression qu'il éprouve dans son mouvement est  $3p.sx$ , parce que la surface  $f$  n'est composée que de petites lignes superficielles, telles que  $ab$  & ses parallèles.

284. La résistance que l'eau oppose à un tel plan dans son mouvement perpendiculaire à sa surface, étant, comme on l'a dit, en raison directe de la pression soutenue par ce plan, & en raison inverse de la facilité de la retraite de l'eau refoulée, peut donc être exprimée

par  $3bp\,sx$  ( en supposant en général que  $b(180^\circ - i) = 1$  ); & par  $3psx$  dans le cas présent parce que  $i = 90^\circ$  &  $b. 90 = 1$ .

Si la direction  $im$  ( fig. 3. G ) de la vitesse d'un plan vertical, dont un élément horizontal est représenté par  $am$ , faisoit un angle  $i$  avec sa surface, alors la pression de l'eau sur la face antérieure de  $am$  seroit exprimée par  $p.mo. (h+x\sin.i^2)$  ( en supposant, que  $mo$  soit la projection de cet élément auquel  $im$  est perpendiculaire, & que  $x$  soit la hauteur à laquelle est due la vitesse représentée par la ligne  $im$  ). Mais la pression de l'eau sur la face arriere de ce même élément qui est également à une profondeur  $h$  au-dessous du niveau de l'eau, ne seroit plus  $p.mo (h-2x)$ , mais  $p.mo (h-x-x\sin.i^2)$ . Car le vuide qui se forme alors derriere le plan a une profondeur qui n'est plus égale à  $x$ , mais à  $x\sin.i^2$ . En effet parmi les molécules qui sont en contact avec la face arriere du plan, celles qui sont au-dessous du niveau de l'eau à une profondeur plus grande que,  $x$  prennent toute la vitesse  $im$  du plan qui s'éloigne d'elles, & l'accompagnent dans sa marche. Quant à celles dont la profondeur est plus petite que  $x$ , elles ne peuvent sans doute suivre le plan dans le sens  $im$ ; mais sollicitées à se mouvoir en tout sens avec une vitesse due à leur profondeur, elles se répandent subitement dans le vuide qui tend à se former derriere le plan, en se dirigeant sur de nouveaux points de ce plan, & en ne cessant de l'atteindre ou de le toucher que lorsqu'elles ne peuvent prendre qu'une vitesse plus petite que  $ir$ ; qui composante de la vitesse  $im$ , est due à une hauteur  $x\sin.i^2$ . Les molécules dont la profondeur est plus petite que cette dernière hauteur sont donc les seules qui ne peuvent rester en contact avec la face arriere du plan pendant son mouvement. Le vuide qui se forme derriere celui-ci, ne doit donc avoir qu'une profondeur  $x\sin.i^2$ ; & les molécules qui inférieures à ce vuide, accompagnent le plan, ne tendent à prendre de vitesse ascensionnelle que celle qui est dûe à la hauteur  $x\sin.i^2$ . Toutes les molécules placées derriere ce plan en mouvement peuvent donc prendre, & une vitesse horizontale due à la hauteur  $x$ ,

parce que le plan fuit directement avec cette vitesse ; & une vitesse ascensionnelle due à la hauteur  $x \sin.i^2$ . Ainsi celles qui exercent quelque pression sur un élément de la face arrière du plan, doivent avoir une profondeur  $h$  plus grande que  $(x + x \sin.i^2)$  & leur pression doit être généralement exprimée par  $p.mo. (h - x - x \sin.i^2)$ . La différence de cette pression, à celle opposée que le même élément éprouve sur sa face antérieure, est  $p.mo.x (1 + \sin.i^2 + \sin.i^2)$ . En raisonnant de même sur tous les élémens horizontaux d'un plan vertical tel que *eoim* (fig. 7. G) & nommant  $f$  la projection de sa surface  $f$ , sur un plan auquel est perpendiculaire la direction de sa vitesse, la résistance éprouvée par ce plan, dans le sens de son mouvement est exprimée avec une précision qui est suffisante pour l'art de la marine par  $bpsx (1 + \sin.i^2 + \sin.i^2)$ .

285. Toutes les idées précédentes, qui se réunissent ainsi pour conduire à une expression très-simple de la résistance de l'eau, embrassent cependant toutes les circonstances de ce phénomène naturel ; & leur probabilité est parfaitement établie, sur la concordance des conséquences qui en résultent, avec les faits que l'expérience a fait connoître. Car par de tels principes, on détermine les rapports observés entre les résistances qui sont éprouvées, 1° par deux parallépipèdes tels que *bsor* (fig. 6 G) qui présentent perpendiculairement au choc de l'eau, des faces verticales dont les surfaces sont différentes ; 2° par un prisme pareil aux précédens, & par ce même prisme, lorsque sa face antérieure est recouverte, soit par un avant-angulaire *btr* composé de deux plans verticaux *tr* & *bt*, soit par un plan incliné (fig. 11. G) ; 3° par un prisme triangulaire *abceoi* (fig. 12 G), & par ce même prisme garni d'un avant pyramidal *adcb* ; 4° par un prisme, qui dans chacune de ses sections a la forme *fnum* (fig. 8. G) & une largeur principale *nm* égale à celle *br* (fig. 6. G) du prisme qui lui est comparé.

Les succès des applications de ces principes, ne se bornent pas à l'explication des résistances éprouvées par des surfaces planes, obliques, ou perpendiculaires à la direction de leur mouvement. Ils s'étendent encore aux effets



effets de la résistance que l'eau oppose à des corps qui présentent des surfaces courbes au fluide qu'ils refoulent dans un mouvement horizontal & progressif. Mais on ne peut s'assurer de ces nouveaux succès qu'après quelques développemens qui vont être présentés.

286. Considérons par exemple , un parallélipède dont la face antérieure est verticale & recouverte par un demi-cylindre , dont la base a pour diamètre la largeur de cette face. *bson* ( fig. 6. G ), & le demi-cercle *btr* sont des sections horizontales , du prisme supposé , & de son avant. Décomposons l'arc *bt* en ses élémens rectilignes , & supposons que la direction de son mouvement soit *nc* perpendiculaire au diamètre *br*. Nous reconnaitrons aisément que chaque élément tel que *n* fait avec une ligne qui est parallèle à la direction *cn* , un angle égal à *ucb* , ou qui a pour mesure l'arc compris entre le lieu de cet élément & l'extrémité *b* du diamètre. La grandeur , des angles d'incidence , ou de ceux qui sont formés par la direction du mouvement avec chaque élément , augmente donc progressivement depuis *b* jusqu'en *t* , comme les arcs compris entre le point *b* & chacun des élémens de l'arc *bt*. Ainsi les molécules qui sont en contact avec eux sont refoulés sous des angles d'incidence *i* qui sont tous différens les uns des autres , & leur retraite devroit varier comme ces angles. Mais ces molécules peuvent-elles obéir , chacune en particulier , isolément , & indépendamment , à ces pressions qui sont toutes inégales ? Et peuvent-elles faire leur retraite sur des lignes divergentes ? Ne doit-on pas présumer , au contraire , que ces molécules contigues , toujours pressées d'être unies étroitement , & de se mettre en équilibre , se transmettent instantanément les pressions variées qu'elles expriment ; que ces mêmes pressions se combinent ensemble pour se réduire à l'égalité où elles tendent continuellement , c'est-à-dire à une pression moyenne , par laquelle le fluide qui environne *tb* est forcé de fuir en masse devant cette ligne courbe , en ne cessant de former un tout continu ; & qu'enfin dans cette même masse , les molécules qui sont placées pour obtenir une retraite plus facile , doivent partager avec les collatérales qui

les touchent sans interruption, la gêne plus grande que celles-ci devroient éprouver dans leur fuite isolée. On peut penser que ces communications réciproques qui paroissent si plausibles, à cause de la grande mobilité des molécules de l'eau, à cause de leur tendance continuelle à l'égalité de pression, se propagent subitement de proche en proche, & forcent enfin toute la masse fluide qui correspond à *tb*, de réagir & de faire sa retraite devant cet arc comme si elle étoit frappée & repoussée sous un angle d'incidence qui tiendrait le milieu entre tous les angles *i*, que chaque élément de *bt* forme avec la direction *ct* du mouvement.

L'arc *bt* étant de  $90^\circ$ , l'angle moyen d'incidence dont nous venons de parler est de  $45^\circ$ . Il est le même que celui de la direction du mouvement avec la corde *tb* de cet arc. Ainsi en étendant ce raisonnement à la recherche de l'action de l'eau sur toutes les sections d'un prisme couvert d'un avant semi-cylindrique; on en conclut que l'eau lui oppose la même résistance qu'éprouveroit ce même prisme si sa face antérieure étoit recouverte, à la place du demi-cylindre, d'un avant angulaire formé par deux plans verticaux qui seroient dirigés comme les cordes *bt* & *tr*, & inclinées l'une & l'autre de  $45^\circ$  en *b* & *r* à la face recouverte.

L'expérience a démontré, non-seulement l'égalité des résistances éprouvées par ce prisme, lorsque successivement il est couvert par les deux avant indiqués; mais aussi la vérité du rapport que cette théorie indique entre les résistances que l'eau oppose, & à ce prisme nud, & à ce prisme garni d'un de ces avans. Ces principes, dans leurs résultats, s'accordent aussi avec ceux de l'expérience. Celle-ci démontre, 1<sup>o</sup> qu'un prisme dont la section horizontale est ACDB (fig. 15. G) éprouve une même résistance dans ses mouvemens dirigés, soit de A vers B, soit de B vers A, lorsque les arcs CA & BA qui terminent une partie de cette section, ont des cordes égales aux lignes CD & DB qui sont les limites de l'autre partie; 2<sup>o</sup> qu'un solide (formé par la demi-résolution d'une surface telle que DHAC, dont le contour est composé d'un arc de parabole CA & d'une ligne droite CD

qui se joignent en C vis-à-vis le milieu H de la longueur DA) doit se mouvoir dans l'eau avec une même vitesse, soit dans le sens AD, soit suivant DA; 3° que l'eau n'oppose pas une résistance différente, à un vaisseau dont les sections horizontales, sont terminées par une courbe *imbd* (fig. 16. G), & à un autre vaisseau qui ne diffère du premier que parce que ses sections horizontales sont terminées par les lignes droites, *ib*, *bd*, *dc*, *ci*, &c. cordes des arcs correspondans des contours des lignes d'eau réelles du vaisseau comparé; 4° qu'un vaisseau tel qu'on en construit aujourd'hui, éprouve moins de résistance, que dans le cas où sa proue *z*onfe, restant la même (fig. 29. G), sa poupe seroit changée de la forme *z*agfe, en celle d'un prisme rectangle *ibcefz*, dont la bate seroit le maître couple *z*fe.

287. L'expression de la résistance que l'eau oppose à un vaisseau en mouvement est extrêmement importante. C'est pourquoi je vais ajouter quelques développemens qui puissent en faire connoître sommairement les résultats les plus intéressans.

Dans un vaisseau (fig. 75. G) chaque ligne d'eau a un contour curviligne tel que *AeBgDhct* (fig. 30. G). L'avant *BeAtc* & l'arrière *BgDhc*, sont séparés par la largeur principale *ec* située dans le maître couple; & la surface est partagée en deux parties *ABDGA* & *ACDGA*, par la ligne AD qui est leur largeur principale située dans le plan diamétral. Les résistances que l'eau opposeroit à une ligne d'eau isolée *AeBgDhct*, seroit la même que celle qui seroit éprouvée (286) par une figure *ABDC* inscrite à la première, & qui auroit comme elle AD & BC pour dimensions principales; tandis qu'elle seroit terminée par des lignes droites, AB, BD, DC, CA qui sont les cordes des courbes *AeB*, *BgD*, *Dhc*, *ctA*. C'est pourquoi considérons les lignes d'eau réelles d'un vaisseau comme si leur contour étoit rectiligne, & cherchons les résistances qu'éprouvent ces dernières figures pour en conclure la résistance que l'eau oppose, aux premières, & à la carene entière.

La vitesse d'un vaisseau est-elle dirigée de D en A & due à la hauteur *x*. Soient nommés, *i* l'angle BAG; *J*

l'angle GAC,  $a$  l'angle BDG, & A l'angle GDC. Faisons  $b$  ( $180-i$ ), & B ( $180-j$ ) = I. Rappelons-nous que la résistance de l'eau est, en raison directe de la pression contraire au mouvement, & inverse de la facilité de la retraite du fluide refoulé. (Distinguons sous les titres de *longitudinales*, *latérales*, & *verticales*, les pressions de l'eau qui sont dirigées perpendiculairement aux plans, du maître couple, du diamétral, & de la flottaison). Ainsi déterminons séparément ces diverses pressions d'après les principes exposés précédemment. La résultante des pressions que l'eau exerce dans le sens AD sur le contour ABD, est  $p.BG.x (1+\sin.i^2+\sin.a^2)$  parce que BG est la projection commune de BA & de BD sur le plan du maître couple. Sur le contour ACD, la pression exercée est  $p.GC.x (1+\sin.j^2+\sin.A^2)$ . La résultante des pressions latérales que l'eau exerce sur l'avant BCA, ou perpendiculairement au plan diamétral AD est  $p.GAx (\sin.j^2-\sin.i^2)$ ; (GA étant la projection commune des côtés AB & AC sur le plan diamétral,) & sur l'arrière BDC, elle est  $p.GDx (\sin.A^2-\sin.a^2)$ .

On voit donc que lorsqu'il y a égalité entre les angles A &  $a$ , entre  $j$  &  $i$ , entre BG & GC, ainsi qu'entre les momens des pressions tant longitudinales que latérales, 1<sup>o</sup> les pressions longitudinales peuvent aisément se balancer; 2<sup>o</sup> les pressions latérales se détruisent réciproquement; & 3<sup>o</sup> l'égalité de  $b$  & B qui en résulte assure au fluide refoulé la même facilité pour faire sa retraite de chaque côté de l'avant. C'est en se fondant sur de pareils rapports qu'on peut juger si une ligne d'eau donnée, doit suivre la direction DA sur laquelle elle est sollicitée à se mouvoir: & on doit reconnoître que sans ces égalités son mouvement ne peut se diriger invariablement sur la ligne indiquée. Par une conséquence immédiate de ces réflexions, il faut donc établir pour règle générale, que les lignes d'eau d'un vaisseau doivent chacune être composées de deux parties parfaitement égales & placées de part & d'autre du plan diamétral. En étendant cette réflexion à l'ensemble de toutes les sections horizontales de la carene, on doit en conclure que cette carene, ainsi que le maître couple, les couples qui lui sont pa-

rales, & toutes les lignes d'eau, doivent être toujours partagés par le plan diamétral en deux parties égales. C'est sur ces principes qu'est fondé l'usage reçu dans l'architecture navale de faire symétrique la carene des vaisseaux, afin qu'ils aient la propriété essentielle de suivre sans déviation la direction de leur quille, lorsque dans ce sens direct ils sont sollicités au mouvement. D'ailleurs l'expérience a fait voir qu'une altération même légère, dans la symétrie des deux flancs de la carene, donne à un vaisseau une tendance à diriger son mouvement progressif du côté opposé au flanc qui est le plus renflé. Car deux corps flottans, ayant dans leur carene des tranches telles que *AMBN* & *abcd* (fig. 19 & 20. G) qui avoient reçu latéralement en *MB* & *dn* un renflement qui n'existoit pas sur le flanc opposé; ces corps dis-je suivoient dans l'expérience, la route curviligne *Anmr* & *co*, lorsqu'ils étoient sollicités à se mouvoir suivant leur longueur.

288. C'est en combinant ces pressions longitudinales, latérales, & verticales ainsi que leurs momens à l'égard du centre de gravité des vaisseaux qu'on arriveroit aux grands résultats qui doivent servir, soit à établir le lieu de la mâture d'un vaisseau (fig. 75. G) & la hauteur *SV* à laquelle peut être placé sans danger l'effort *ov* des voiles exposées au choc du vent; soit à expliquer les auloffées & les arrivées d'un vaisseau, ses tangages & ses roulis, sa dérive dans les routes obliques, les déviations lorsqu'il est à la bande, & enfin tous ses mouvemens qu'il peut recevoir à la mer dans les différentes situations où il peut être placé. Je ne parcourrai pas ces conséquences nombreuses, quoiqu'elles soient des applications directes à la marine des principes exposés précédemment; & je les réserve pour un traité de marine, parce qu'elles méritent, par leur importance, d'être largement détaillées, pour l'instruction des marins, & les progrès de l'art.

---

## A P P E N D I C E

*Sur les nouvelles Mesures usuelles adoptées par le Peuple Français.*

Nous avons donné une idée générale (2) des mesures connues sous le nom d'*unités*. Nous avons fait sentir combien les nations, même les plus éclairées, ont mis d'arbitraire dans le choix des mesures usuelles; & c'est assez sans doute pour démontrer combien il étoit devenu nécessaire de chercher des bases fixes sur lesquelles pussent reposer des mesures dignes d'être adoptées sur toute la surface du globe.

Ces recherches & ces changemens intéressoient surtout la nation Française, parce que les mesures employées au nord & au midi de la France, ont présenté jusqu'ici une discordance qui ne doit jamais être connue dans les usages des diverses sections d'un même peuple; & parce qu'elles étoient des sources d'abus, de fraudes, & d'erreurs. Il appartenoit donc aux Français d'appeler les premiers des innovations utiles dans leurs mesures usuelles. Favorisés par des circonstances qui leur ont enfin permis de développer leur amour pour la liberté & l'égalité, ils ont les premiers proclamés que dans la nature seule, il convenoit de chercher des échelles simples & invariables, pour mesurer uniformément la grandeur ainsi que le poids de tous les corps; & qu'elles devoient être indépendantes des hommes, de leurs caprices, & de leurs opinions. Ils ont pensé qu'elles devoient être fondées sur la forme actuelle de la terre, & sur le poids de l'eau qui descend de la région des nuages. Ils ont donc adopté, *la longueur du quart d'un méridien terrestre* pour l'unité nouvelle lineaire; & le poids d'un certain volume d'eau distillée, pour servir à mesurer les poids de tous les corps. En conséquence, des savans Français ont été chargés de déterminer immédiatement la longueur réelle d'un arc terrestre, du méridien, compris entre Dunkerque & Barcelonne; & la connoissance de cet arc, ( dont la

position entre le pôle & l'équateur, produit le balancement des effets qu'on peut attribuer à une dissemblance présumée entre les divers arcs d'un même méridien) a servi à établir avec une exactitude suffisante, que la longueur de l'arc de  $90^{\circ}$  ou l'unité universelle, est de 5132430 toises.

Une telle mesure, par sa grande étendue, ne seroit commode ni dans la société, ni dans la marine. C'est pourquoi, il a été nécessaire de la diviser & de la subdiviser. Le mode qui a été adopté, est celui de la division décimale, parce qu'ainsi que nous l'avons fait voir (29), il procure autant de facilité que d'uniformité dans tous les calculs des grandeurs.

Cette unité universelle étant ainsi partagée en dixièmes, centièmes, millièmes, &c; on a choisi sa dix-millionième partie, pour servir d'unité lineaire usuelle; & la toise, unité ancienne, a été remplacée par le metre, unité nouvelle, dont la longueur est de 0 toise, 513243 ou de 3 pieds 0 pouces 11 lignes, 442.

Les longueurs de toutes les lignes, seront donc désormais exprimées en metres; mais les grandes distances exigent, pour être évaluées, des mesures assorties; & comme auparavant elles étoient estimées en lieues, elles le seront aujourd'hui en millaires, qui valent chacun 1000 metres ou 513 toises, 243. Quant aux dimensions plus petites qu'un metre, elles ne seront plus évaluées, ni en pieds, ni en pouces, ni en lignes, mais en parties décimales du metre, désignées sous les noms de *décimètres*, *centimètres*, *millimètres*, &c.

Les rapports réciproques des anciennes mesures aux nouvelles, se trouvent ainsi parfaitement déterminés; & des proportions simples peuvent servir à évaluer, en metres & parties décimales de metre, des grandeurs exprimées en toises, pieds, pouces, ou lignes. Les marins parviendront aussi par de pareilles proportions à apprécier, en millaires, metres, & décimales de metre; la lieue marine, l'encablure, la brasse, la palme; & les calculs conduisent à donner, à la lieue de 2851 toises, 2 la valeur de 5,5568 millaires; à l'encablure de 100 toises celle de 194,84 metres; à la brasse de 5 pieds celle de

1,6237 metres ; & à la palme de 1 pouce, 08333 celle  
2,9316 centimetres.

Ces premieres unités lineaires, étant établies, doivent servir à mesurer les dimensions de tous les corps. Ainsi les surfaces doivent être évaluées en *metres quarrés*. (131) ; & cette nouvelle unité superficielle vaut 9,4831 pieds quarrés. Précédemment les surfaces, selon leur étendue plus ou moins grande, étoient mesurées en arpens, en perches, en toises, en pieds quarrés, &c ; & aujourd'hui le metre quarré & ses multiples ou sous-multiples décimaux, serviront aux mêmes usages sous les noms de *are*, *deciare*, *centiare*, *décimetre quarré*, *centimetre quarré*, &c. L'are vaut 10000 metres quarrés ; le deciare est une surface dix fois plus petite ; le centiare est le centieme de l'are, & les décimetres, centimetres, &c quarrés sont des mesures dix fois, cent fois, &c plus petites que le metre quarré. Ainsi, d'après ces rapports, on trouve par des proportions, que la valeur de l'ancien arpent est de 5103,76 metres quarrés ; que celle de la perche quarrée est de 51,0376 m. q. ; que celle de la toise quarrée est de 3,79626 m. q., &c. Par le même moyen, toute surface évaluée en anciennes mesures peut être aisément réduite en nouvelles.

Les volumes des corps doivent aussi être mesurés avec une unité solide nouvelle, nommée *metre cube*, comme ils l'étoient précédemment avec une toise cube (143) ; & des décimales de ce metre, serviront à assortir cette mesure à toutes les circonstances, avec la même facilité qu'on trouvoit à employer le pied, le pouce & la ligne, cubes.

Les innovations dans ce genre, en ont même entraîné de très-particulières dans le mesurage des grains & des liquides. La même unité, le même metre cube, doit en conséquence être désormais la mesure commune des volumes de tous les corps soit, solides, soit fluides, soit liquides.

Ainsi, au lieu d'employer spécialement, pour les grains, le litron, le boisseau, le septier ; & pour les liquides, la pinte, la velle, le muid, le tonneau ; on se servira, comme pour les corps les plus solides, du seul metre



cube & de ses décimales. Dans cet usage, cependant, pour les liquides & les grains; la mesure, dont la contenance est celle d'un metre cube, recevra le nom de *cade*, & ses décimales, ceux de *décicade*, *centicade*, *cadil*, *décicadil*, *centicadil*, pour indiquer les, dixieme, centieme, millieme, dix-millieme, & cent-millieme, du cade ou du metre cube. Par ces rapports, & par des proportions, on trouve, que le volume du cade, est de 1051,3333 pintes de Paris ( dont chacune est de 48 pouces cubes ), & de 78,9 boisseaux de Paris; que le cadil vaut 1,05 pinte, & 0,0789 boisseau, &c. Le cadil deviendra, par cette raison, une mesure élémentaire destinée aux usages qu'on a fait de la pinte & du boisseau.

Il ne suffit pas aux besoins de la société, qu'il y ait des *unités* pour mesurer, les dimensions, les surfaces, & les volumes des corps. Car, dans le commerce, plusieurs objets sont vendus, achetés, ou échangés, en raison de leur poids. C'est pourquoi il faut aussi un terme de comparaison pour les poids de tous les corps. Cette *unité de poids* qui doit être choisie pour conserver l'uniformité la plus grande dans le système général des mesures; celle qui, prise dans la nature, doit remplacer la mesure ancienne, est le poids ( mesuré dans le vuide ) d'un metre cube rempli d'une eau distillée qui est à la température de la glace fondante. Le choix d'une telle unité, ne porte, comme on voit, aucune trace d'arbitraire; & elle convient non-seulement à la nation Française, mais aussi à tous les peuples de la terre; parce que sur toute la surface du globe, cette unité, ou cette eau qui ne cesse d'être par-tout homogène, est aisée à peser & à retrouver. Des savans Français, ont été chargés de mesurer le poids d'un metre cube de cette eau; & il a été trouvé de 2044,4 livres anciennes. On donne au poids de ce volume d'eau le nom de *bar*; & ses décimales dans un ordre successif ont reçu les noms de, *décibar*, *centibar*, *grave*, *décigrave*, *centigrave*, *gravet*, *décigravet*, *centigravet*. Le bar est une mesure trop grande, pour être employée dans tous les usages du commerce & de la vie civile; & s'il peut remplacer le tonneau de 2000 toises, qui jusqu'à présent a servi

à évaluer le port des bâtimens de mer ; *l'unité usuelle de poids* a paru devoir être la millièmiè partie , du bar , ou du metre cube ; & par conséquent être équivalente à 2,0444 livres. Les décimales de cette unité , s'étendent successivement du décigrave , aux centigrave , gravet , décigravet , centigravet , & peuvent se prolonger autant que les circonstances l'exigent.

Les rapports , des livres & des graves ; du bar & du tonneau ; suffisent pour déterminer par des proportions les valeurs des nouvelles mesures en anciennes , & réciproquement. Ainsi , on trouve que la valeur du quintal ancien est de 4,8914 centibars ; celle de la livre de 0,489146 grave , celle du grain de 5,30736 centigravets , &c. Réciproquement celle du décibar est de 204,44 livres anciennes , celle du centigrave est de 2,616832 gros ; & celle du centigravet de 0,1884119 grains.

Les monnoies qui , par leur poids , sont entre les diverses nations , des matieres propres à faciliter les échanges des objets de leurs besoins , ou de leurs richesses réciproques ; ont éprouvé aussi une réforme qui les assujettit au système uniforme des mesures. L'unité de toutes les monnoies Françaises , ou *l'unité monétaire* , qui déjà est désignée sous le nom de *franc-d'argent* , aura désormais le poids d'un centieme de grave , ou d'un centigrave d'argent. Sa valeur matérielle , est donc à celle de l'écu de 3 livres de même titre ( qui sert de base au change de la France avec les autres nations commerçantes ) , dans le rapport de 188,41 à 276,505 ; parce que l'écu de 6 livres pese 553,01 grains. A l'aide de ces rapports , les valeurs relatives des anciennes pieces de monnoie dont le poids est connu ( le titre étant supposé constant ) seront aisément estimées en francs-d'argent ou en parties décimales de cette unité nouvelle , & réciproquement.

La livre de compte , qui a servi jusqu'ici d'unité simplement numéraire , & qui n'est réellement qu'une unité imaginaire propre à faciliter les calculs du commerce & de la vie civile ; reste seule en usage pour exprimer les valeurs numériques changeantes , soit des pieces de monnoie , soit des denrées , soit de tous les

objets de nos besoins. Elle a été conservée, (je ne fais par quelles considérations, puisque les valeurs des objets échangés, pourroient être aussi bien exprimées par le poids de pieces d'argent, comme par leur valeur idéale & numéraire) & le seul changement qu'elle ait éprouvé pour lui donner une certaine analogie avec les autres mesures, est celui de ses subdivisions. La livre numéraire ne sera donc plus, comme précédemment, partagée, en 20 sous & 240 deniers, mais en parties décimales qui porteront les noms de *décime*, *centime*, *millime*, &c.

Le passage des anciens comptes à ceux que comporte le nouvel ordre numéraire, ne présente aucune difficulté, en ayant égard aux réflexions précédentes. En effet le sou, étant le 20<sup>e</sup> de la livre, doit en être regardé comme les cinq centièmes, ou il vaut 0,05 de livre. Le denier équivaut à-peu-près aux quatre millièmes de la même unité, ou plus exactement à 0,004167 livre. Ainsi est-il question de réduire des sous en centimes, il faut multiplier leur nombre par 5 ; & pour exprimer des deniers en millimes, leur nombre doit être multiplié par 4. Ce calcul simple & facile conduit à la valeur du denier, approchée à moins d'un millième près ; parce que le millime actuel ne vaut que les 24 centièmes d'un denier ancien. D'ailleurs des proportions serviront à déterminer des valeurs plus approchées lorsqu'elles seront exigées par l'importance des résultats.

Le système général des mesures, ne se borne pas à celles qui viennent d'être indiquées. Il embrasse encore, & les divisions du jour, & celles de la circonférence d'un cercle.

Le *jour*, qui est l'unité de révolution de la terre sur elle-même, a donc été partagé en parties décimales nommées, *heures*, *minutes*, & *secondes*, comme précédemment. Mais l'heure sera actuellement la dixième partie du jour moyen, au lieu d'en être la 24<sup>e</sup> partie. La minute sera le centième de cette heure, & la seconde, le centième de la minute. Ainsi le jour sera désormais de 10 heures, & l'heure nouvelle vaudra 2 heures 24', ou 144 minutes, ou 8640 secondes anciennes ; ce qui peut servir à réduire, les heures, minutes, & secondes nouvelles en mesures anciennes ; & réciproquement.

Enfin , cette circonférence que le soleil paroît décrire chaque jour dans le ciel, autour de la terre ; ainsi que celles de tous les cercles qui sont tracés , ou sur la rose des bouffoles , ou sur les instrumens propres à la mesure des angles (168) cesseront d'être divisés en degrés. Chaque quart d'une circonférence , ainsi que le quart du méridien terrestre qui est l'unité universelle , sera regardé comme composé de cent parties égales nommées *grades*. Cette division sera substituée à celle de  $90^{\circ}$  ; & chaque grade ne sera pas partagé comme l'ancien degré en  $60'$  ou  $3600''$  ; mais en 100 minutes , & 10000 secondes. La valeur du grade nouveau sera donc de  $54'$  de degré. L'ancienne minute équivaudra à 1,852 minute nouvelle ; & il faudra 3,086 secondes nouvelles pour former la grandeur d'une seconde ancienne.

Tel est le système général des mesures adoptées par le peuple Français. Telles sont les bases , & les liaisons simples autant qu'uniformes de toutes ses parties. La méthode de calculer les nombres de ces nouvelles unités , ne diffère pas de celle dont les principes ont été exposés dans cet ouvrage ( 32 ) ; & ces principes peuvent , dans tous les cas , servir à déterminer & à différencier les résultats de toutes les opérations , d'arithmétique , de géométrie , d'astronomie , ou de mécanique.

Nous remarquerons seulement que les mesures , dont on vient d'indiquer la grandeur & les rapports , doivent être pour les marins , les mêmes que pour les autres sections du peuple Français ; parce que les besoins qui sont de même genre , & sur terre , & sur mer , n'exigent , ni des mesures différentes , ni des noms particuliers qui les distinguent. Cependant , il est certaines conséquences de ces mesures nouvelles , qui sont spécialement applicables à l'art de la marine , & dont l'adoption reste encore à ordonner par les Représentans du peuple ; afin que n'étant pas abandonnée aux caprices variés des marins , les usages soient uniformes dans les divers ports de la République. Telles sont les divisions de la rose de la bouffole , qui marquées jusqu'à présent par 32 airs de vent ; paroissent devoir être désormais au nombre de 40 , afin que chaque quart d'une rose se trouve ainsi

partagé en dix parties égales. Tels sont les nœuds de la ligne de lok, dont la longueur, doit avoir un rapport fixe avec le millaire, comme elle en a eu avec l'étendue de la lieue marine. Telle est enfin la durée du sablier de lok, qui, employé dans la détermination de la marche des vaisseaux, doit avoir avec l'heure nouvelle, un rapport déterminé d'après celui du nœud au millaire.

Dans ces vues, j'ai proposé d'étendre, la durée du nouveau sablier de lok à 50 secondes nouvelles, & la longueur du nœud à 20 metres; afin que le sablier devenant les deux centièmes de l'heure nouvelle, & le nœud dans le même rapport avec le millaire; on puisse conclure facilement, en jetant le lok, qu'un vaisseau qui parcourt un nœud nouveau pendant la durée d'un tel sablier, doit franchir quatre millaires par heure, lorsque sa vitesse ne cesse d'être la même.

Déjà j'ai présenté ces idées, avec de plus grands détails, dans un *avis aux marins*, que des Représentans du peuple ont cru devoir faire imprimer à Rochefort pour l'instruction publique. Leur convenance a été soumise au jugement de la Convention Nationale; & ses décisions sur ces objets particuliers acheveront de donner au système des mesures, ce caractère d'uniformité que réclame l'ordre général, non-seulement pour les usages de la vie civile, mais aussi pour toutes les opérations de la marine Française.



# T A B L E (\*)

*DES heures & minutes qu'il faut ajouter à l'établissement d'un port , pour déterminer chaque jour , assez exactement , suivant l'âge de la Lune , le moment de la haute mer.*

A G E de la L U N E.	T E M P S à ajouter.	A G E de la L U N E.	T E M P S à ajouter.
I jours.	0 h. 44'	16 jours.	0 h. 56'
2	1 22	17	1 34
3	1 56	18	2 8
4	2 28	19	2 40
5	3 2	20	3 14
6	3 40	21	3 52
7	4 24	22	4 36
8	5 12	23	5 22
9	6 4	24	6 16
10	7 4	25	7 18
11	8 8	26	8 22
12	9 12	27	9 26
13	10 15	28	10 30
14	11 16	29	11 32
15	12 12	29 $\frac{1}{2}$	12 2

(\*) *Nota.* Cette table avoit été annoncéé , (179) dans l'Astronomie , comme propre à donner des résultats plus exacts que ceux qui sont fondés sur 49 m. de retard journalier des marées. Elle ne satisfait pas encore à toutes les influences , des positions relatives du soleil & de la lune , & des distances variables de ces astres à la terre. Mais je la présente , comme préférable à la table de Lacaille , qui , suivant des expériences nombreuses faites en Angleterre , a été souvent trouvée en erreur de 40 m ; & comme étant formée d'après des observations multipliées & choisies.

# T A B L E

*Des MATIERES traitées dans cet Ouvrage.*

---

	pages
ARITHMÉTIQUE.....	I
Addition des Nombres entiers.....	5
Soustraction.....	8
Multiplication.....	10
Division.....	16
Des Fractions en général & des décimales..	25
Des Nombres complexes.....	44
Arithmétique universelle, ou élémens d'Algebre.	54
Puissances des nombres.....	71
Racines des nombres.....	76
Rapports & proportions des nombres.....	91
Progressions.....	109
Logarithmes.....	119
GEOMETRIE.....	134
Des lignes.....	140
Angles rectilignes.....	147
Des figures planes , ou des Polygones.....	170
Trigonométrie rectiligne.....	201
Des plans & des surfaces planes.....	223
Angles des lignes droites avec des plans....	225
Angles plans.....	229
Projections des lignes & des surfaces sur des plans.....	235
Mesure des surfaces planes.....	245
Rapports des surfaces planes.....	253

	pages
Des solides.....	265
Surface des solides.....	266
Solidité des solides.....	274
Rapports des solidités des corps.....	286
Trigonométrie sphérique.....	290
Cartes marines.....	313
Réduction des routes des vaisseaux.....	323
<b>ASTRONOMIE.</b> .....	348
État réel du ciel.....	353
Etat apparent , du ciel vu de la terre.....	358
Observations astronomiques utiles à la marine.	383
Correction de la position estimée des vaisseaux, en mer.....	414
Déclinaison de l'aiguille aimantée.....	419
Flux & reflux de la mer.....	429
<b>MECANIQUE.</b> .....	439
Des forces en général.....	441
De la communication des mouvemens , & des Machines.....	481
Des forces physiques ou naturelles qui ont des rapports utiles à l'art de la marine.....	528
De la gravité.....	ibid
De la force de l'homme.....	548
Du frottement.....	554
De la roideur des cordes.....	562
De l'action de l'eau & de l'air.....	565
Appendix sur les nouvelles mesures républic..	604
Table pour le calcul des marées.....	612



